Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О бозе-конденсате в двумерном случае,
 λ -точке и двухжидкостной модели Тисса–Ландау, *ТМФ*,
2009, том 159, номер 1, 174–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:41:40

© 2009 г.

В. П. Маслов*

О БОЗЕ-КОНДЕНСАТЕ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ, λ -ТОЧКЕ И ДВУХЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ ТИССА–ЛАНДАУ

Прослеживается связь бозе-конденсата с проблемами кризиса в экономике, теорией чисел и кластеризацией.

Ключевые слова: бозе-конденсат, перколяция, λ -точка, кризис.

Поскольку точных математических теорем о бозе-конденсате пока не сформулировано, то о существовании бозе-конденсата в двумерном случае в физической литературе существуют различные мнения [1], [2]. Путаница в этом вопросе связана с определением бозе-распределения как распределения, в котором химический потенциал не является положительным (см. § 53, 59 в [3]), что верно лишь в термодинамическом пределе, т.е. когда число частиц $N \rightarrow \infty$, объем $V \rightarrow \infty$, $N/V = \text{const}$. В определении же энтропии участвует произведение $-\mu N$ [3], и это произведение будет отрицательным при $N \rightarrow \infty$, когда возникает явление бозе-конденсата, т.е. когда $N > N_{\text{cr}}$, где N_{cr} – число частиц при $\mu = 0$.

Рассмотрим суммы

$$\varepsilon \sum i N_i = \mathcal{E}, \quad \sum N_i = N, \quad (1)$$

$\mathcal{E}$ – полная энергия, ε – энергия одной частицы, $\mathcal{E}/\varepsilon = M$ – целое число. Поскольку $N_i \leq N$, справедлива парастатистика [2]

$$N_{\text{cr}} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{\beta x} - 1} - \frac{N_{\text{cr}}}{e^{\beta N_{\text{cr}} x} - 1} \right) dx. \quad (2)$$

Рассмотрим этот интеграл от ε до ∞ и затем устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. После замены в первом члене $\beta x = \xi$, а во втором $\beta N_{\text{cr}} x = \xi$ получим

$$\begin{aligned} N_{\text{cr}} &= \frac{1}{\beta} \int_{\varepsilon\beta}^\infty \frac{d\xi}{e^\xi - 1} - \int_{\varepsilon\beta N_{\text{cr}}}^\infty \frac{d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{1}{\beta} \int_{\varepsilon\beta}^{\varepsilon\beta N_{\text{cr}}} \frac{d\xi}{e^\xi - 1} \sim \frac{1}{\beta} \int_{\varepsilon\beta}^{\varepsilon\beta N_{\text{cr}}} \frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \frac{1}{\beta} \{ \ln(\varepsilon\beta N_{\text{cr}}) - \ln(\varepsilon\beta) \} = \frac{1}{\beta} \ln N_{\text{cr}}. \end{aligned} \quad (3)$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

С другой стороны,

$$M = \int_0^\infty \frac{x dx}{e^{\beta x} - 1},$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{\int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1}}, \quad N_{\text{cr}} = c\sqrt{M} \ln M + O(M^{1/2}),$$

где $c = \sqrt{3/2}/\pi$. При $N > N_{\text{cr}}$ и $M \rightarrow \infty$

$$M = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{N} \int_0^{\mu N} \frac{x dx}{1 - e^{-x}} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad N = \frac{1}{\beta} \int_\mu^{\mu N} \frac{dx}{1 - e^{-x}} + O\left(\frac{\ln N}{\beta}\right). \quad (4)$$

Отсюда $\mu N \ll \sqrt{N}$, например $\mu N = \sqrt{N^{1-\delta}}$ для любых $1 > \delta > 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть $N_{\text{cr}}^0 = c\sqrt{M} \ln M$. Обозначим через l число частиц в конденсате. Пусть $N > N_{\text{cr}}^0$. Тогда

$$\mathbf{P}\{|l - [N - N_{\text{cr}}^0]| \geq O(M^{1/2})\} \leq e^{-(N - N_{\text{cr}}^0)^{(1/2) - \delta}}, \quad (5)$$

где δ – сколь угодно малое, не зависящее от M число, а $\mathbf{P}$ – отношение числа вариантов, удовлетворяющих условию в фигурных скобках, к полному числу вариантов при $N = N_{\text{cr}}$.

Другими словами, в этой теореме утверждается, что вероятность того, что число частиц в конденсате равно $N - N_{\text{cr}}^0 + O(M^{1/2})$, мало отличается от единицы при $N - N_{\text{cr}}^0 \rightarrow \infty$.

Задача аналогична описанной М. А. Булгаковым в романе “Мастер и Маргарита”. В варьете над головами N зрителей было рассыпано M купюр достоинством в 1 червонец. Все варианты распределения купюр между зрителями равновероятны. Если $N > N_{\text{cr}}$, то примерно $N - N_{\text{cr}}$ зрителей останутся без купюр. Чтобы этого не случилось, зрители должны объединиться в N/N_{cr} групп (семей), и в каждой из этих групп распределить деньги по установленным правилам (например, поровну). Это аналог совмещения рыночного и государственного распределений, т.е. двух различных арифметик [4]. Таким образом, соотношение государственного и рыночного секторов при кризисе должно быть равно $[N/N_{\text{cr}}]$ [5].

По схеме, предложенной автором [6] для бозе-конденсата газа, происходит объединение в димеры, тримеры и кластеры в идеальном газе. Идеальный газ – это модель, в которой частицы можно считать точками, а значит, у них есть только поступательное движение. Если температура T стала ниже T_{cr} , то с большой вероятностью число частиц $N - N_{\text{cr}}$ попало в бозе-конденсат, а это согласно теории автора [6] означает, что точки соединились в пары (димеры), а следовательно, возникло колебательное движение осцилляторов (трехмерных осцилляторов или шестимерных частиц), что дает зависимость термоемкости от температуры $\sim T^3$. Если при этом газ вращается или движется по капилляру, то у части пар появляются дополнительные интегралы движения и возникает смесь двумерных и шестимерных частиц. Это аналогично двухжидкостной модели Тисса–Ландау. При этом двумерные частицы

(одномерный осциллятор) в силу вышеприведенного вычисления при $T_{\text{cr}}^1 < T_{\text{cr}}$ дают теплоемкость вида λ -точки. Следовательно, такая концепция согласуется с концепцией Тисса–Ландау и с понятием λ -точки (см. рис. 57 в [2]).

Список литературы

- [1] H. N. V. Temperley, *Proc. Roy. Soc. London A*, **199**:1058 (1949), 361–375.
- [2] И. А. Квасников, *Термодинамика и статистическая физика*. Т. 2. *Теория равновесных систем. Статистическая физика*, Учебное пособие, УРСС, М., 2002.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика* Т. V. *Статистическая физика*, Наука, М., 1964.
- [4] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 944–947.
- [5] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:1 (2009), 103–120.
- [6] В. П. Маслов, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 250–272.

Поступила в редакцию 9.02.2009