Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, Корреляционные функции XX -магнетика Гейзенберга и случайные блуждания недружественных пешеходов, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 179–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:03:19

© 2009 г.

Н. М. Боголюбов*, К. Л. Малышев*

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ХХ-МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА И СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НЕДРУЖЕСТВЕННЫХ ПЕШЕХОДОВ

Исследуется связь между случайными блужданиями по одномерной периодической решетке и корреляционными функциями спиновой ХХ-цепочки Гейзенберга. Операторные средние над ферромагнитным состоянием играют роль производящих функций для числа путей случайных блужданий так называемых “недружественных” пешеходов (при встрече в любом из узлов решетки недружественные пешеходы уничтожают друг друга). Показано, что парную корреляционную функцию спинов, вычисленную по всем собственным состояниям ХХ-магнетика, можно интерпретировать как производящую функцию блужданий одиночного пешехода в среде с переменным числом недружественных соседей. Получены ответы для числа путей указанного пешехода, перемещающегося из некоторого фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки. Представлены асимптотические оценки числа путей в случае, когда количество выполняемых шагов велико.

Ключевые слова: случайные блуждания, магнетик Гейзенберга, корреляционные функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Случайные блуждания являются классической проблемой как для комбинаторики, так и для статистической физики. Задача о перечислении путей, пройденных так называемыми *недружественными* пешеходами в результате блужданий по одномерной решетке, была сформулирована и подробно рассмотрена Фишером [1]. Предполагается, что при встрече в одном из узлов решетки любая пара недружественных пешеходов уничтожает не только друг друга, но и всех остальных пешеходов. Указанная задача продолжает привлекать значительное внимание физиков и математиков [2]–[9]. Близкие проблемы возникают также при изучении самоорганизующейся критичности [10], доменных стенок [11] и полимеров [12]. В работе [13]

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru, malyshev@pdmi.ras.ru

рассматривается подход к описанию случайного блуждания аннигилирующих частиц по кольцу. В работе [14] изучаются блуждания со случайными поворотами на полуоси, в начале которой могут рождаться частицы.

В работах [15], [16] было показано, что корреляционные функции XX -цепочки Гейзенберга над ферромагнитным состоянием могут быть использованы для перечисления путей блуждания недружественных пешеходов. В предлагаемой статье рассмотрены средние специального вида как над ферромагнитным состоянием, так и над суперпозицией собственных состояний XX -магнетика в нулевом магнитном поле. Рассмотренные средние играют роль производящих функций числа путей недружественных пешеходов. Вычисление корреляционных функций производится с помощью функционального интегрирования [17], [18]. Получены ответы для числа путей одиночного пешехода, перемещающегося из фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки. Представлены асимптотические оценки числа путей в пределе бесконечно большого количества выполняемых шагов (и, соответственно, числа случайных поворотов).

Работа организована следующим образом. Гамильтониан модели и вычисление корреляционных функций обсуждаются в разделе 2. Раздел 3 посвящен конкретным вычислениям и соответствующим асимптотическим оценкам. Обсуждение в разделе 4 завершает статью.

2. МОДЕЛЬ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Интересующий нас XX -магнетик является частным случаем более общей спиновой модели – XY -цепочки Гейзенберга, гамильтониан которой в поперечном магнитном поле $h > 0$ задается следующими формулами [19], [20]:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \gamma H_1 - h S^z, \\ H_0 &\equiv - \sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} \sigma_n^+ \sigma_m^-, \\ H_1 &\equiv - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} (\sigma_n^+ \sigma_m^+ + \sigma_n^- \sigma_m^-), \quad S^z \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sigma_n^z, \end{aligned} \quad (1)$$

где S^z означает z -компоненту оператора полного спина, γ – параметр анизотропии. Локальные спиновые операторы $\sigma_n^\pm = (\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)/2$ и σ_n^z представляют собой матрицы Паули, зависящие от решеточного аргумента $n \in \mathcal{M} \equiv \{1, 2, \dots, M\}$, где $M = 0 \pmod{2}$. Соответствующие перестановочные соотношения имеют вид $[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{k,l} \sigma_l^z$, $[\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2\delta_{k,l} \sigma_l^\pm$. Кроме того, введена матрица перескоков $\Delta^{(s)}$ с матричными элементами

$$\Delta_{nm}^{(s)} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{|n-m|,1} + s\delta_{|n-m|,M-1}), \quad (2)$$

где $\delta_{n,l}$ – символ Кронекера, а s может принимать два значения: $s = \pm$. Мы предполагаем, что наложены периодические граничные условия: $\sigma_{n+M}^\alpha = \sigma_n^\alpha$ для любого

$n \in \mathcal{M}$. При нулевом значении параметра γ гамильтониан H (1) сводится к гамильтониану ХХ-магнетика.

Общее определение зависящих от времени t и температуры $T \equiv 1/\beta$ корреляционных функций рассматриваемой модели имеет вид

$$G_{j;l}^{ab}(t) \equiv \frac{1}{Z} \text{Tr}(\sigma_j^a(0)\sigma_l^b(t)e^{-\beta H}), \quad Z \equiv \text{Tr}(e^{-\beta H}), \quad (3)$$

где $\sigma_l^b(t) \equiv e^{itH}\sigma_l^b e^{-itH}$ и Tr означает усреднение по всем собственным состояниям гамильтониана H . Кроме того, в нормировке используется статистическая сумма Z . В работе [21] обсуждалось вычисление корреляторов (3) в базисе собственных функций гамильтониана ХХ-магнетика. Основное внимание при этом уделялось связи корреляционных функций с определителями Фредгольма в термодинамическом пределе. В нашей статье мы будем рассматривать только ХХ-цепочку и через H будем обозначать ее гамильтониан.

Для вычисления средних (3) можно воспользоваться переходом от спиновых переменных к каноническим ферми-переменным $c_j, c_j^\dagger, j \in \mathcal{M}$ [19], [20]. Соответствующее преобразование Йордана–Вигнера таково:

$$\sigma_n^+ = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j^z \right) c_n, \quad \sigma_n^- = c_n^\dagger \left(\prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j^z \right), \quad n \in \mathcal{M}, \quad (4)$$

где $\sigma_j^z = 1 - 2c_j^\dagger c_j$. Периодические граничные условия для спиновых операторов приводят к следующим граничным условиям для фермиевских переменных:

$$c_{M+1} = (-1)^\mathcal{N} c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = c_1^\dagger (-1)^\mathcal{N}, \quad (5)$$

где $\mathcal{N} = \sum_{n=1}^M c_n^\dagger c_n$ – оператор полного числа частиц. Гамильтониан H (1) в фермионном представлении принимает вид [19], [20]

$$H = H^+ P^+ + H^- P^-, \quad (6)$$

где P^+ (P^-) – проекторы на состояния с четным (нечетным) числом фермионов: $P_+ + P_- = \mathbb{I}$, $P_+ - P_- = (-1)^\mathcal{N}$. При этом операторы $H^\pm$ (6) формально идентичны, однако индекс $s = \pm$ указывает на соответствующую конкретизацию условий (5): $c_{M+1} = -sc_1$, $c_{M+1}^\dagger = -sc_1^\dagger$. Иными словами, квадратичные по фермионным переменным операторы $H^\pm$ имеют следующее представление:

$$H^\pm = c^\dagger \hat{H}^\pm c - \frac{Mh}{2}, \quad \hat{H}^\pm = -\hat{\Delta}^{(\mp)} + h\hat{I}, \quad (7)$$

где матрицы $\hat{H}^\pm$ выражены через матрицы перескоков (2) и $\hat{I}$ – единичная матрица. Кроме того, в (7) использованы сокращенные обозначения $c^\dagger$ и c для M -компонентных строки и столбца, построенных из $c_n^\dagger, c_n, n \in \mathcal{M}$.

В частности, коррелятор (3) для $a = b = z$ в представлении (4) записывается как [18], [22], [23]

$$G_{j;l}^{zz}(t) = 1 - \frac{2}{Z} \text{Tr}(c_j^\dagger c_j e^{-\beta H}) - \frac{2}{Z} \text{Tr}(c_l^\dagger c_l e^{-\beta H}) + \frac{4}{Z} \text{Tr}(c_j^\dagger c_j e^{itH} c_l^\dagger c_l e^{-(\beta+it)H}). \quad (8)$$

Для его вычисления удобно вести производящий функционал [18]

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(S, T \mid \lambda, \nu) = \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^S e^{-\lambda H} e^T e^{-\nu H}), \quad (9)$$

где λ, ν – комплексные параметры, $\lambda + \nu = \beta$. В соотношении (9) использованы квадратичные операторы $S \equiv c^\dagger \hat{S} c$ и $T \equiv c^\dagger \hat{T} c$, задаваемые с помощью матриц $\hat{S} = \text{diag}\{S_1, S_2, \dots, S_M\}$ и $\hat{T} = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_M\}$. Например, последнее слагаемое в правой части (8) получается из (9) следующим образом: оно равно

$$\lim_{\substack{S_n, T_n \rightarrow 0, \\ n \in \mathcal{M}}} \lim_{\lambda \rightarrow -it} \lim_{\nu \rightarrow \beta + it} \frac{\partial}{\partial S_j} \frac{\partial}{\partial T_l} \mathcal{G}(S, T \mid \lambda, \nu). \quad (10)$$

С учетом (6) след в правой части (9) переписывается так [18]:

$$\text{Tr}(e^S e^{-\lambda H} e^T e^{-\nu H}) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}_F^+ Z_F^+ + \mathcal{G}_F^- Z_F^- + \mathcal{G}_B^+ Z_B^+ - \mathcal{G}_B^- Z_B^-), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm &\equiv \text{Tr}(e^S e^{-\lambda H^\pm} e^T e^{-\nu H^\pm}), \\ \mathcal{G}_B^\pm Z_B^\pm &\equiv \text{Tr}(e^S e^{-\lambda H^\pm} e^T (-1)^{\mathcal{N}} e^{-\nu H^\pm}), \end{aligned} \quad (12)$$

и $Z_F^\pm = \text{Tr}(e^{-\beta H^\pm})$, $Z_B^\pm = \text{Tr}((-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^\pm})$. При этом для статистической суммы Z получаем $Z = (Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-)/2$. В термодинамическом пределе слагаемые в (11) с индексом В взаимно компенсируются, и для вычисления $\mathcal{G}$ (9) достаточно вычислить $\mathcal{G}_F^\pm$.

Рассматриваемое фермиевское представление характеризуется фоковским состоянием $|0\rangle$, одинаковым для H^+ и H^- таким, что $c_k|0\rangle = 0$, $k \in \mathcal{M}$. Соответствующие когерентные состояния над $|0\rangle$, $|z\rangle \equiv e^{c^\dagger z}|0\rangle$ и $\langle z^*| \equiv \langle 0|e^{z^* c}$ различны для H^+ и H^- . Здесь мы используем сокращенные обозначения $z^* \equiv (z_1^*, \dots, z_M^*)$ и $z \equiv (z_1, \dots, z_M)$ для наборов независимых грассмановых параметров z_k, z_k^* , $k \in \mathcal{M}$ (дополнительный индекс $\pm$ для z^* , z уместно опустить). Кроме того, $\sum_{k=1}^M c_k^\dagger z_k \equiv c^\dagger z$, $\prod_{k=1}^M dz_k \equiv dz$. Будем вычислять $\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm$ в (12), пользуясь представлением следа в подходе грассманова интегрирования [18]:

$$\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm = \int dz dz^* e^{z^* z} \langle z^* | e^S e^{-\lambda H^\pm} e^T e^{-\nu H^\pm} | z \rangle. \quad (13)$$

Чтобы представить правую часть этого равенства в виде функционального интеграла, введем L новых когерентных состояний $|x(I)\rangle$, $\langle x^*(I)|$, где $I \in \{1, 2, \dots, L\}$. В качестве индексов здесь выступают $2L$ наборов $x^*(I)$, $x(I)$, каждый из которых образован M независимыми грассмановыми параметрами. Использование разложений единицы позволяет представить правую часть (13) в виде $(L+1)$ -кратного интеграла. Введем добавочные переменные, выражающие условие квазипериодичности:

$$-\hat{E}x(0) = x(L+1) \equiv z, \quad -x^*(L+1) = x^*(0)\hat{E}^{-1} \equiv z^*, \quad (14)$$

где $\hat{E} \equiv e^{\hat{S}} e^{-\lambda \hat{H}^{\pm}} e^{\hat{T}}$. Устремляя L к бесконечности, приходим к функциональному интегралу на пространстве траекторий $x^*(\tau)$, $x(\tau)$, где $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{G}_{\text{F}}^{\pm} Z_{\text{F}}^{\pm} = \int e^S d\lambda^* d\lambda \prod_{\tau} dx^*(\tau) dx(\tau). \quad (15)$$

Здесь функционал действия $S \equiv \int L(\tau) d\tau$ выражается через лагранжиан

$$L(\tau) \equiv x^*(\tau) \left(\frac{d}{d\tau} - \hat{H}^{\pm} \right) x(\tau) + J^*(\tau) x(\tau) + x^*(\tau) J(\tau),$$

где

$$J^*(\tau) \equiv \lambda^*(\delta(\tau) \hat{I} + \delta(\tau - \nu) \hat{E}^{-1}), \quad J(\tau) \equiv (\delta(\tau) \hat{I} + \delta(\tau - \nu) \hat{E}) \lambda.$$

Интегрирование в (15) по вспомогательным грассмановым переменным λ^* , λ гарантирует соблюдение наложенной связи (14), и δ -функции в $J^*(\tau)$, $J(\tau)$ редуцируют $\tau \in \mathbb{R}$ к $\tau \in [0, \beta]$. Условия стационарности $\delta S / \delta x^* = 0$, $\delta S / \delta x = 0$ приводят к регуляризованному ответу [18]

$$\mathcal{G}_{\text{F}}^{\pm} = \det \left(\hat{I} + \frac{e^{(\beta-\nu) \hat{H}^{\pm}} e^{\hat{S}} e^{-\lambda \hat{H}^{\pm}} e^{\hat{T}} - \hat{I}}{\hat{I} + e^{\beta \hat{H}^{\pm}}} \right). \quad (16)$$

Далее, мы подставляем (16) в (10) и переходим в импульсное представление. Данная процедура применима и к остальным корреляторам $G_{j;l}^{ab}(t)$ (3), $a, b \in \{+, -\}$.

3. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

Как показано в работах [15], [16], перевороты спинов на одномерной решетке можно ассоциировать со случайными перемещениями пешеходов. Действительно, рассмотрим состояние ХХ-цепочки Гейзенберга, соответствующее ферромагнитному упорядочению M спинов: $|\uparrow\rangle \equiv \bigotimes_{n=1}^M |\uparrow\rangle_n$ (т.е. все спины направлены “вверх”). Рассмотрим среднее следующего вида:

$$F_{j;l}(\lambda) \equiv \langle \uparrow | \sigma_j^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_l^- | \uparrow \rangle, \quad (17)$$

где H_0 соответствует нулевому магнитному полю $h = 0$ в гамильтониане (6), (7) (для соответствующих матриц $\hat{H}^{\pm}$ (7) нижний индекс вводить не будем), $\lambda \in \mathbb{C}$ – “эволюционный” параметр. Направление спина “вверх” (или “вниз”) соответствует пустым (или заполненным) узлам. Дифференцируя $F_{j;l}(\lambda)$ (17) и раскрывая коммутатор $[H_0, \sigma_j^+]$, мы получаем разностно-дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda} F_{j;l}(\lambda) = \frac{1}{2} (F_{j+1;l}(\lambda) + F_{j-1;l}(\lambda)) \quad (18)$$

(аналогичное уравнение можно получить и для фиксированного индекса j). Решение данного уравнения определяется налагаемыми граничными условиями по решеточному аргументу, а также условием при $\lambda = 0$.

Среднее $F_{j;l}(\lambda)$ можно рассматривать как производящую функцию траекторий со случайными поворотами, начинающихся в l -м узле и оканчивающихся в j -м узле. Действительно, введем обозначение $\mathcal{D}_\lambda^K$ для оператора K -кратного дифференцирования по λ в точке $\lambda = 0$. Применение $\mathcal{D}_\lambda^K$ к среднему (17) приводит к ответу

$$\mathcal{D}_\lambda^K [F_{j;l}(\lambda)] = \langle \uparrow | \sigma_j^+ (-H_0)^K \sigma_l^- | \uparrow \rangle = \sum_{n_1, \dots, n_{K-1}} \Delta_{jn_{K-1}}^{(+)} \dots \Delta_{n_2 n_1}^{(+)} \Delta_{n_1 l}^{(+)} \quad (19)$$

Правая часть (19) совпадает с матричным элементом j -й строки и l -го столбца матрицы, равной произведению K матриц перескоков (2), каждая из которых соответствует переходу между двумя ближайшими узлами решетки. Будучи умноженной на 2^K (что связано с принятой нормировкой матрицы (2)), правая часть (19) дает число траекторий из K шагов между l -м и j -м узлами. Будем обозначать это число $|P_K(l \rightarrow j)|$.

Пусть $|P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)|$ обозначает число путей из K звеньев, проходимых N недружественными пешеходами в модели блужданий со случайными поворотами. Здесь начальные и конечные положения пешеходов на узлах заданы, соответственно, последовательностями $l_1 > l_2 > \dots > l_N$ и $j_1 > j_2 > \dots > j_N$. Рассмотрим N -точечную корреляционную функцию ($N \leq M$)

$$F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda) = \langle \uparrow | \sigma_{j_1}^+ \sigma_{j_2}^+ \dots \sigma_{j_N}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- \dots \sigma_{l_N}^- | \uparrow \rangle. \quad (20)$$

Данный коррелятор связан с перечислением допустимых траекторий, проходимых N недружественными пешеходами. Действительно, применение к (20) оператора $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$ приводит к среднему вида $\langle \uparrow | \sigma_{j_1}^+ \sigma_{j_2}^+ \dots \sigma_{j_N}^+ (-2H_0)^K \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- \dots \sigma_{l_N}^- | \uparrow \rangle$. Указанное же среднее дает числа $|P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)|$, что можно получить с использованием коммутатора

$$[H_0, \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- \dots \sigma_{l_K}^-] = \sum_{k=1}^K \sigma_{l_1}^- \dots \sigma_{l_{k-1}}^- [H_0, \sigma_{l_k}^-] \sigma_{l_{k+1}}^- \dots \sigma_{l_K}^- \quad (21)$$

(при этом дифференцирование по $\lambda/2$, а не по λ позволило нам учесть нормировку матрицы перескоков (2)). Условие того, что пути пешеходов не пересекаются, выражается в обращении в нуль корреляционной функции (20) для любой пары совпадающих индексов l_k или j_p .

Дифференцируя определение (20) по λ и применяя соотношение (21), получаем уравнение

$$\frac{d}{d\lambda} F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (F_{j_1, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_k+1, \dots, l_N}(\lambda) + F_{j_1, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_k-1, \dots, l_N}(\lambda)), \quad (22)$$

которое было рассмотрено в работе [16] для случая периодичности по решеточному аргументу и при начальном условии $F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(0) = \prod_{m=1}^N \delta_{j_m, l_m}$. Функция $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$ может быть выражена в виде определителя матрицы, составленной из средних вида (17) [16]:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) = \det(F_{j_r; l_s}(\lambda))_{1 \leq r, s \leq N}. \quad (23)$$

3.1. Случайные блуждания на оси. Пусть цепочка бесконечна ($M \rightarrow \infty$). Тогда решением уравнения (18), удовлетворяющим условию $F_{j;l}(0) = \delta_{j,l}$, оказывается [15] модифицированная функция Бесселя $I_{j-l}(\lambda)$:

$$F_{j;l}(\lambda) = I_{j-l}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{\lambda \cos \theta} e^{i(j-l)\theta}. \quad (24)$$

Для $I_{j-l}(\lambda)$ имеется следующее разложение в степенной ряд:

$$I_{j-l}(\lambda) = \sum_{Q \geq |l-j|} \frac{1}{\left(\frac{Q-j+l}{2}\right)! \left(\frac{Q+j-l}{2}\right)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^Q, \quad (25)$$

где индекс суммирования Q подчиняется требованию $Q + |j-l| = 0 \pmod{2}$. В пределе больших “времен” ($\lambda \rightarrow \infty$) и при умеренных $m \equiv |l-j|$ для производящей функции возникает известная асимптотика

$$F_{j;l}(\lambda) \simeq \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{8\lambda} + \dots\right).$$

Таким образом, степенное поведение $F_{j;l}(\lambda)$ определяется показателем $\xi = -1/2$.

Пусть число K удовлетворяет соотношениям $K \geq |l-j|$ и $K + |j-l| = 0 \pmod{2}$. Дифференцируя ряд (25), приходим к биномиальной формуле $|P_K(l \rightarrow j)| = C_K^L$ для числа всех решеточных путей “длины” K между двумя узлами на бесконечной оси:

$$|P_K(l \rightarrow j)| \equiv \mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j;l}(\lambda)] = \frac{(m+2L)!}{L!(m+L)!}. \quad (26)$$

Здесь $L \equiv (K-m)/2$ – половина числа поворотов.

Перейдем к многоточечной корреляционной функции $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$. Как показано выше, величина $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)]$ имеет смысл числа траекторий N недружественных пешеходов, каждый из которых совершает K шагов. Однако можно дать несколько иную комбинаторную интерпретацию указанной величины. Для этого рассмотрим представление многоточечного коррелятора в виде определителя (23). Для бесконечной цепочки его матричные элементы $F_{j_r; l_s}(\lambda)$ являются функциями Бесселя $I_{j_r-l_s}(\lambda)$ (24). Действие $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$ на определитель будем рассматривать как K -кратное дифференцирование произведения N функций:

$$(f_1(x)f_2(x)\dots f_N(x))^{(K)} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=K} P(n_1, n_2, \dots, n_N) f_1^{(n_1)} f_2^{(n_2)} \dots f_N^{(n_N)}. \quad (27)$$

В последней формуле использовано обозначение $f^{(n)} \equiv d^n f(x)/dx^n$, а коэффициентами являются числа $P(n_1, n_2, \dots, n_N)$ перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_N) \equiv \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_N)!}{n_1! n_2! \dots n_N!}. \quad (28)$$

Суммирование в правой части равенства (27) распространяется на все неотрицательные значения $n_1, n_2, \dots, n_N$, сумма которых равна K .

Далее, пусть задана бесконечная (гипер)кубическая решетка размерности N , каждый узел которой пронумерован набором из N чисел. Введем обозначение $\mathcal{T}_K(q_1, q_2, \dots, q_N)$ для числа решеточных траекторий, по которым некоторый пешеход, расположенный в “начальной” точке $\mathbf{O} \equiv (0, 0, \dots, 0)$, может переместиться в точку $(q_1, q_2, \dots, q_N)$, делая K шагов (за шаг пешеход смещается в один из ближайших узлов). Предположим, что все q_k неотрицательны, и выполнено неравенство $K \geq q_1 + q_2 + \dots + q_N$. Иными словами, возможны шаги, компенсирующие друг друга. Обозначим их количество через $2L$,

$$L \equiv \frac{K - q_1 - q_2 - \dots - q_N}{2}. \quad (29)$$

С учетом (29) мы имеем формулу для числа путей:

$$\mathcal{T}_K(q_1, q_2, \dots, q_N) = \sum_{L_1 + L_2 + \dots + L_N = L} P(q_1 + L_1, q_2 + L_2, \dots, q_N + L_N, L_1, L_2, \dots, L_N), \quad (30)$$

где суммирование распространяется на все неотрицательные $L_1, L_2, \dots, L_N$, сумма которых равна L , и используется формула для числа перестановок с повторениями (28).

Вернемся к функции $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$ и с помощью ее индексов определим матрицу $(n_{rs})_{1 \leq r, s \leq N}$ с матричными элементами $n_{rs} \equiv j_r - l_s$. Тогда имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Число траекторий из K звеньев, проходящих N недружественными пешеходами на оси, выражается через число траекторий такой же “длины” K одиночного пешехода, перемещающегося по узлам N -мерной бесконечной решетки:

$$\begin{aligned} |P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)| &\equiv \mathcal{D}_{\lambda/2}^K [F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)] = \\ &= \sum_{S_{a_1, a_2, \dots, a_N}} (-1)^{\mathcal{P}_S} \mathcal{T}_K(n_{a_1 1}, n_{a_2 2}, \dots, n_{a_N N}), \end{aligned} \quad (31)$$

где суммирование идет по всем перестановкам $S_{a_1, a_2, \dots, a_N} \equiv S(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & \dots, & N \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_N \end{smallmatrix})$ чисел $1, 2, \dots, N$, и $\mathcal{P}_S$ есть четность конкретной перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить равенство (31), следует разложить определитель (23) по строке или по столбцу и применить индукцию, используя при этом соотношения (26)–(30). ■

Вычислим (30), например, для $N = 2$:

$$\mathcal{T}_K(q_1, q_2) = C_{q_1 + q_2 + 2L}^{q_1 + L} \sum_{k=0}^L C_{q_1 + L}^{L-k} C_{q_2 + L}^k = C_K^{q_1 + L} C_K^L, \quad (32)$$

где $L = (K - q_1 - q_2)/2$ – половина числа поворотов. Тогда, пользуясь (31), получаем

$$\mathcal{D}_{\lambda/2}^K [F_{j_1, j_2; l_1, l_2}(\lambda)] = \mathcal{T}_K(n_{11}, n_{22}) - \mathcal{T}_K(n_{21}, n_{12}) = \begin{vmatrix} C_K^L & C_K^{L+n_{21}} \\ C_K^L & C_K^{L+n_{11}} \end{vmatrix}, \quad (33)$$

где $L = (K - n_{11} - n_{22})/2$ и используется равенство $n_{11} + n_{22} = n_{12} + n_{21}$.

Представление матричных элементов $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$ (23) в виде интеграла (24) позволяет получить следующее представление [15]:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) = \frac{e^{\lambda N}}{N!} \prod_{i=1}^N \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) e^{-\lambda \sum_{k=1}^N (1 - \cos \theta_k)} \times \\ \times S_{\pi}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2, \quad (34)$$

где $S_{\pi}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N})$ – функция Шура [24],

$$S_{\pi}(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \frac{\det(x_j^{\pi_k + N - k})_{1 \leq j, k \leq N}}{\det(x_j^{N - k})_{1 \leq j, k \leq N}}. \quad (35)$$

Эта функция связана с разбиением $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$, определяемым последовательностью целых неотрицательных чисел, которые расположены в порядке нестрогого убывания: $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_N \geq 0$. Благодаря трансляционной инвариантности всегда можно положить $l_1 > l_2 > \dots > l_N \geq -N$ для начального положения пешеходов и задать элементы разбиения равенствами $\pi_k = l_k + k$. Для вычисления ведущей асимптотики производящей функции в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ сведем интеграл (34) к следующему интегралу [7], [25]:

$$\int d^n \theta \prod_{1 \leq j < k \leq N} |\theta_j - \theta_k|^2 e^{-\lambda/2 \sum_{k=1}^N \theta_k^2} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\lambda^{N^2/2}} \left(\prod_{p=1}^N p! \right).$$

Это специальный случай *интеграла Мехты*, возникающего в теории *гауссовых матричных ансамблей*. В результате получаем асимптотику для производящей функции блужданий N пешеходов:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) \simeq \mathcal{A} \frac{e^{\lambda N}}{\lambda^{N^2/2}}, \quad \mathcal{A} = \frac{\prod_{p=1}^{N-1} p!}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{l_j - l_k}{k - j},$$

где в $\mathcal{A}$ учтена известная формула для $S_{\lambda}(1, 1, \dots, 1)$ [9], [25]. Таким образом, степенное поведение $F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)$ определяется показателем $\xi = -N^2/2$.

3.2. Случайные блуждания над суперпозицией собственных состояний.

Собственные функции ХХ-гамильтониана, задаваемого соотношениями (6), (7), строятся как комбинации состояний, которые возникают при “опрокидывании” N спинов, находящихся в состоянии $|\uparrow\rangle$ [21]. Действительно, рассмотрим всевозможные строгие разбиения $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, где $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 1$. Каждому такому разбиению поставим в соответствие последовательность нулей и единиц вида $\{e_k \equiv e_k(\mu)\}_{k \in \mathcal{M}}$, где $e_k = \delta_{k, \mu_n}$, $1 \leq n \leq N$. Искомую собственную функцию определим следующим образом:

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \sum_{\{e_k(\mu)\}_{k \in \mathcal{M}}} \Upsilon_N(\{u_k\} | \mu) (\sigma_M^-)^{e_M} (\sigma_{M-1}^-)^{e_{M-1}} \dots (\sigma_1^-)^{e_1} | \uparrow \rangle, \quad (36)$$

где в суммировании участвуют все строгие разбиения μ указанного вида. Количество таких разбиений выражается числом перестановок $P(N, M - N) = C_M^N$ с повторениями (28). Для периодических граничных условий волновые функции

$$\Upsilon_N(\{u_k\}|\mu) \equiv \det(u_k^{2\mu_l})_{1 \leq k, l \leq N} \quad (37)$$

параметризуются разбиениями μ и различными, с точностью до перестановки, наборами $\{u_1, \dots, u_N\}$ решений уравнений Бете:

$$u_k^{2M} = (-1)^{N-1}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (38)$$

Эти решения имеют вид $u_k^2 = e^{i2\pi I_k/M}$, где I_k – это целые или полуцелые числа (в зависимости от четности N). В силу антисимметричности формулы (36) по отношению к перестановкам параметров u_k достаточно ограничиться строгими разбиениями $M \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 1$. С учетом (36) мы получаем, что соответствующее нормированное среднее вида

$$\langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^- \rangle_N \equiv \frac{\langle \Psi_N | \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^- | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle} \quad (39)$$

может быть представлено как линейная комбинация $(N+1)$ -точечных производящих функций (20) и, таким образом, связано с блужданиями $N+1$ пешехода. Начальное и конечные положения одного из них зафиксированы при $l_1 = 1$ и $j_1 = m+1$, соответственно, в то время как для остальных (*виртуальных*) пешеходов выбор положений случаен.

Представляет интерес вычисление среднего (39) в термодинамическом пределе, когда M и N растут (но их отношение остается конечным), т.е. число виртуальных пешеходов возрастает. В данном пределе [26]

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) \equiv \langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^- \rangle_N \Big|_{M, N \gg 1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}'(\sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-), \quad (40)$$

где Tr' означает, что для вычисления нормированного среднего используется процедура, указанная в разделе 2. Для $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ (40) имеет место разностно-дифференциальное соотношение, аналогичное уравнению (18):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) &= \frac{1}{2} (\tilde{F}_{m;1}(\lambda) + \tilde{F}_{m+2;1}(\lambda)) - \text{Tr}'(H_0 \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-) - \\ &- \text{Tr}'\left(\left(\frac{1 - \sigma_{m+1}^z}{2}\right) \sigma_m^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-\right) - \text{Tr}'\left(\left(\frac{1 - \sigma_{m+1}^z}{2}\right) \sigma_{m+2}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Вид данного уравнения заставляет предположить, что среднее $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ тоже может представлять интерес как производящая функция случайных блужданий.

Займемся вычислением $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ (40) в фермионном представлении (4). Удобно свести задачу к вычислению производящей функции следующего вида:

$$\tilde{\mathcal{G}} \equiv \text{Tr}'(e^S c_{m+1} e^{-\lambda H_0} c_1^\dagger e^{-\nu H_0}), \quad (42)$$

где оператор S определен так же, как и в (9) (т.е. с помощью матрицы $\hat{S} = \text{diag}\{S_1, S_2, \dots, S_M\}$). Действительно, $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ соответствует выбору $\nu = 0$ и $S_k = -i\pi\theta(m-k)$, где $\theta(m-k)$ – функция Хевисайда, $\theta(0) = 1$. Второе слагаемое в правой части (41) соответствует дифференцированию по ν в точке $\nu = 0$, в третьем слагаемом мы считаем $\nu = 0$ и дифференцируем по S_{m+1} . При этом в обоих случаях выбираем $S_k = -i\pi\theta(m-k)$. Учитывая, что вкладом слагаемых с индексом B в (11) можно пренебречь при достаточно больших M и N , получаем приближенное равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} &\approx \left[\text{tr}(e^{-\lambda \hat{H}^0} \hat{e}_{1,m+1}) - \frac{d}{d\alpha} \right] \det(\hat{I} + \hat{\mathcal{M}}_1 + \alpha \hat{\mathcal{M}}_2)|_{\alpha=0}, \\ \hat{\mathcal{M}}_1 + \alpha \hat{\mathcal{M}}_2 &\equiv e^{-\nu \hat{H}^0} e^{\hat{S}} e^{-\lambda \hat{H}^0} (\hat{I} + \alpha \hat{e}_{1,m+1} e^{-\lambda \hat{H}^0}), \end{aligned} \quad (43)$$

где $\hat{e}_{1,m+1} \equiv (\delta_{1,n} \delta_{m+1,l})_{1 \leq n, l \leq M}$. Матрица $\hat{H}^0$ используется вместо $\hat{H}^\pm$, так как s можно заменить нулем при достаточно больших M .

Соотношения (43) записаны в координатном представлении. Для перехода к импульсному представлению удобно воспользоваться некоторыми формулами, представленными в работе [22]. Ответ для $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ запишем, сохраняя матричную символику (в пределе $M \rightarrow \infty$ соответствующие операции надо понимать в смысле действий над интегральными операторами [26]):

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) = \det(\hat{I} + \hat{\mathcal{U}}_m) \left[\text{tr}(e^{-\lambda \hat{\epsilon}_0} \hat{\epsilon}_{1,m+1}) - \text{tr} \left(\frac{\hat{\mathcal{V}}_m}{\hat{I} + \hat{\mathcal{U}}_m} \right) \right] \quad (44)$$

(например, tr соответствует следу $(M \times M)$ -матриц). Матрицы $\hat{\mathcal{U}}_m$, $\hat{\mathcal{V}}_m$, $\hat{\epsilon}_{1,m+1}$ соответствуют импульсным представлениям матриц $\hat{\mathcal{M}}_1$, $\hat{\mathcal{M}}_2$, $\hat{e}_{1,m+1}$ (43), но нам понадобятся только выражения для следов $\text{tr} \hat{\mathcal{U}}_m$ и $\text{tr} \hat{\mathcal{V}}_m$ (см. ниже). В импульсном представлении $\hat{\epsilon}_0$ означает диагональную матрицу собственных значений энергии ХХ-модели при $h = 0$ [21]. Разложим формально $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ по степеням $\hat{\mathcal{U}}_m$ и получим ответ в двух низших порядках:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) &\approx F_{m+1;1}(\lambda) + F_{m+1;1}(\lambda) \text{tr} \hat{\mathcal{U}}_m - \text{tr} \hat{\mathcal{V}}_m, \\ \text{tr} \hat{\mathcal{U}}_m &= (M - 2m) F_{1;1}(\lambda), \\ \text{tr} \hat{\mathcal{V}}_m &= F_{m+1;1}(2\lambda) - 2 \sum_{l=1}^m F_{m+1;l}(\lambda) F_{l;1}(\lambda), \end{aligned} \quad (45)$$

где обозначения $F_{j;l}(\lambda)$ введены в (24). Хотя M и m выбраны достаточно большими, отношение m/M считается ограниченным. В каждом порядке уравнение (41) удовлетворяется представленными вкладами в $\tilde{F}_{m+1;1}$ (45).

Аналогично случаю ферромагнитного состояния подействуем оператором $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$ на $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$ (45). Тогда в первом порядке придем к соотношению (26). Во втором порядке ответ имеет следующий вид:

$$MC_K^L C_K^L - C_K^L \sum_{l=0}^K C_K^l + 2 \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} C_K^{L+l-1} & C_K^L \\ C_K^L & C_K^L \end{vmatrix}. \quad (46)$$

асимптотическим разложением логарифма гамма-функции [27], можно, в частности, оценить число сочетаний C_K^L . Ограничиваясь первым порядком малости, приходим к соотношению

$$C_K^L \approx \frac{2^K}{\sqrt{\pi L}} e^{-m^2/(4L)} \left(1 - \frac{m}{2L} \left(1 - \frac{m^2}{4L}\right)\right) \approx \frac{2^K}{\sqrt{\pi L}} \left(1 - \frac{m^2}{4L}\right) \sim \frac{2^{2L}}{\sqrt{\pi L}}. \quad (49)$$

Второе приближенное равенство в (49) имеет место, если L растет быстрее, чем m^2 . Оценка (49) характеризует рост числа траекторий (26) для одного пешехода.

Далее, третье слагаемое в (46) можно записать как $2A(m, L)C_K^L C_K^L$, где

$$A(m, L) \equiv -m + \sum_{l=1}^m \frac{(L+m+2-l)_{l-1}}{(L+1)_{l-1}}. \quad (50)$$

Здесь использовано стандартное обозначение для символа Похгаммера $(\alpha)_n$ [27]. Пользуясь вновь разложением логарифма гамма-функции, мы можем оценить $A(m, L)$ (50):

$$A(m, L) \simeq mZ_1(m, L) - Z_0(m, L) + O(m^{-1}), \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} Z_0(m, L) &\equiv e^{m^2/4L} \left(1 + \frac{m}{L^2} \sum_{l=0}^{m/2} e^{-l^2/L} \left(\frac{m^2}{4} - l^2\right)\right), \\ Z_1(m, L) &\equiv -1 + e^{m^2/4L} \frac{2}{m} \sum_{l=0}^{m/2} e^{-l^2/L}. \end{aligned} \quad (52)$$

Пусть значения параметров m и L возрастают, но отношение L/m^2 остается ограниченным и имеет порядок единицы. Можно показать (включая численную проверку), что коэффициентные функции $Z_0(m, L)$ и $Z_1(m, L)$ остаются при этом ограниченными, и в (51) вклад $Z_0(m, L)$ пренебрежим по сравнению с $mZ_1(m, L)$. Используем (49) и (51) для оценки величины (46) в ведущем приближении: имеем

$$\frac{2^{4L}}{\pi L} e^{-m^2/2L} (M + 2mZ_1(m, L) - (\pi L)^{1/2} e^{m^2/4L}). \quad (53)$$

Благодаря поведению коэффициента $Z_1(m, L)$ вклад соответствующего слагаемого в (53) может оказаться сопоставимым с M . Соотношение (53) свидетельствует о том, что картина блужданий в представлении суперпозиции собственных состояний сложнее, чем для ферромагнитного случая. Эта картина может рассматриваться как совместное блуждание исходного (основного) и виртуального пешеходов. Точки окончания траекторий, принадлежащие всем трем участкам пунктирной ломаной на рисунке (см. представление двумерных блужданий (48)), соответствуют сравнимым вкладам в оценку (53). В некоторых случаях, определяемых предельным поведением отношения m^2/L , доминирующим может оказаться вклад отрезка между точками $(m, 0)$ и $(0, m)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что корреляционные функции XX -магнетика Гейзенберга, вычисляемые над суперпозицией собственных состояний, как и для ферромагнитного случая, связаны с перечислением траекторий пешеходов, блуждающих по решетке. Установлена связь между числом траекторий нескольких недружественных пешеходов и числом путей единичного пешехода, перемещающегося со случайными поворотами по решетке, размерность которой совпадает с количеством недружественных пешеходов. Дифференцирование производящей функции, вычисленной для суперпозиции собственных состояний, демонстрирует более сложную комбинаторную картину, чем для ферромагнитного случая. В частности, к траекториям отдельного пешехода добавляются траектории, соответствующие совместному блужданию исходного и виртуального (недружественных) пешеходов. Получена оценка числа траекторий совместного блуждания основного и виртуального пешеходов.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00358) и программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] M. E. Fisher, *J. Statist. Phys.*, **34**:5–6 (1984), 667–729.
- [2] P. J. Forrester, *J. Phys. A*, **23**:7 (1990), 1259–1273.
- [3] T. Nagao, P. J. Forrester, *Nucl. Phys. B*, **620**:3 (2002), 551–565.
- [4] A. J. Guttmann, A. L. Owczarek, X. G. Viennot, *J. Phys. A*, **31**:40 (1998), 8123–8135.
- [5] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *J. Phys. A*, **33**:48 (2000), 8835–8866.
- [6] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *J. Statist. Phys.*, **110**:3–6 (2003), 1069–1086.
- [7] M. Katori, H. Tanemura, *Phys. Rev. E*, **66**:1 (2002), 011105.
- [8] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao, N. Komatsuda, *Phys. Rev. E*, **68**:2 (2003), 021112.
- [9] M. Katori, H. Tanemura, “Nonintersecting paths, noncolliding diffusion processes and representation theory”, *Combinatorial Methods in Representation Theory and their Applications*, RIMS Kôkyûroku, **1438**, ed. D. Sagaki, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto, 2005, 83–102.
- [10] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A*, **38**:1 (1988), 364–374.
- [11] D. Huse, M. Fisher, *Phys. Rev. B*, **29**:1 (1984), 239–270.
- [12] J. W. Essam, A. J. Guttmann, *Phys. Rev. E*, **52**:6 (1995), 5849–5862.
- [13] С. Ю. Григорьев, В. Б. Приезжев, *ТМФ*, **146**:3 (2006), 488–498.
- [14] J. W. van de Leur, A. Yu. Orlov, *Random turn walk on a half line with creation of particles at the origin*, [arXiv: 0801.0066](https://arxiv.org/abs/0801.0066).
- [15] Н. М. Боголюбов, Зап. научн. сем. ПОМИ, **325**, 2005, 13–27.
- [16] Н. М. Боголюбов, Зап. научн. сем. ПОМИ, **335**, 2006, 59–74.
- [17] С. Malyshev, “Functional integration with “automorphic” boundary conditions and correlators of z -components of spins in the XY and XX Heisenberg chains”, *New Developments in Mathematical Physics Research*, ed. C. V. Benton, Nova Sci., New York, 2004, 85–116.
- [18] К. Л. Малышев, Зап. научн. сем. ПОМИ, **317**, 2004, 142–173.
- [19] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Ann. Physics*, **16**:3 (1961), 407–466.
- [20] Th. Niemeijer, *Physica*, **36**:3 (1967), 377–419; **39**:3 (1968), 313–326.
- [21] Ф. Коломо, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, В. Тогнетти, *ТМФ*, **94**:1 (1993), 19–51.
- [22] А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин, Зап. научн. сем. ПОМИ, **245**, 1997, 173–206.
- [23] В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, Зап. научн. сем. ПОМИ, **269**, 2000, 219–261.

- [24] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.
- [25] M. Katori, H. Tanemura, *Scaling limit of vicious walkers, Schur function, and Gaussian random matrix ensemble*, [arXiv: cond-mat/0110274](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0110274).
- [26] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [27] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Grundlehren Math. Wiss., **52**, Springer, New York, 1966.