Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайнутдинов, Обобщение формулы Верлинде в логарифмической конформной теории поля, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 194–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:21:58

© 2009 г.

А. М. Гайнутдинов*

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ВЕРЛИНДЕ В ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Предложена обобщенная формула Верлинде для $(1, p)$ -моделей двумерной конформной теории поля, которые находят свое применение в таких задачах статистической физики, как модель песочной горы и фазовые переходы в полимерах. Данная формула дает целочисленные структурные константы во всем $(3p - 1)$ -мерном пространстве вакуумных амплитуд на торе, в котором алгебра слияний содержится как $2p$ -мерная подалгебра.

Ключевые слова: конформная теория поля, логарифмические модели, неполупростая алгебра слияний, формула Верлинде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Логарифмические конформные теории поля [1]–[5] привлекают к себе внимание в силу их важности в приложениях (таких, как модели песочной горы [6] и перколяции [7], [8]), а также с точки зрения общих вопросов в самой теории [9]. Среди логарифмических конформных теорий поля наиболее подробно изучены $(1, p)$ -модели [1], [10], которые характеризуются центральным зарядом $c = 13 - 6(p + p^{-1})$; спектр конформных размерностей примарных полей имеет вид

$$\Delta_r = \frac{r^2 - 1}{4p} + \frac{1 - r}{2}, \quad 1 \leq r \leq p.$$

Киральной алгеброй симметрии $(1, p)$ -моделей является триплетная W -алгебра [11], [12], которую в дальнейшем мы будем обозначать как $\mathcal{W}_p$. Киральная алгебра $\mathcal{W}_p$ имеет $2p$ неприводимых представлений $\mathcal{X}^\pm(s)$ и $2p$ проективных накрывающих $\mathcal{P}^\pm(s)$ [12] неприводимых представлений ($1 \leq s \leq p$).

Исследование логарифмических теорий представляется особенно важным в той части, которая касается обобщения классической формулы Верлинде [13] на неунитарные случаи. Формула Верлинде воспроизводит правила слияния в модели конформной теории поля исходя из поведения системы при глобальных диффеоморфизмах мирового листа. В случае системы с периодическими граничными условиями глобальные диффеоморфизмы представляют собой модулярные преобразования тора.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: azot@mccme.ru

Мы предлагаем использовать соответствие Каждана–Люстига, сформулированное для ряда логарифмических моделей [3], [14], [15], при построении “логарифмического” варианта формулы Верлинде. Соответствие Каждана–Люстига для $(1, p)$ -моделей является эквивалентностью [16] между категориями представлений триплетной алгебры $\mathcal{W}_p$ и *ограниченной* квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ при $q = e^{i\pi/p}$. Строго говоря, эти категории эквивалентны как ленточные косовые квазитензорные категории [16], [17]. Такая эквивалентность приводит к следующим отождествлениям:

- 1) центр Z_{cft} категории представлений $\mathcal{W}_p$ -алгебры и центр Z квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ изоморфны как ассоциативные коммутативные алгебры;
- 2) действия модулярной группы на Z_{cft} и Z эквивалентны.

Как утверждается в работе [18], пространство Z_{cft} является $(3p-1)$ -мерным и имеет выделенный базис вакуумных амплитуд на торе, т.е. базис, состоящий из характеристик и псевдохарактеров

$$\chi_s^\pm(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{X}^\pm(s)} q^{L_0 - c/24}, \quad 1 \leq s \leq p,$$

и псевдохарактеров

$$\chi_s(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{P}^+(s) \oplus \mathcal{P}^-(p-s)}(q^{L_0 - c/24} \mathbf{I}), \quad 1 \leq s \leq p-1,$$

где $\mathbf{I}$ – логарифмический партнер вакуумного поля (единичного оператора $\mathbf{1}$), а $\mathcal{P}^\pm(s)$ – проективные накрывающие неприводимых представлений $\mathcal{X}^\pm(s)$ $\mathcal{W}_p$ -алгебры. Пространство Z_{cft} можно снабдить структурой коммутативной ассоциативной алгебры, которую мы введем ниже в п. 2.2. Структурные константы Z_{cft} в базисе характеристик и псевдохарактеров являются целыми числами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. При $1 \leq r, s \leq p$ и $\alpha, \beta = \pm$ имеем

$$\chi_r^\alpha \chi_s^\beta = \sum_{\substack{t=|r-s|+1, \\ \text{шаг}=2}}^{r+s-1} \tilde{\chi}_t^{\alpha\beta}, \quad \tilde{\chi}_t^\alpha = \begin{cases} \chi_t^\alpha, & 1 \leq t \leq p, \\ \chi_{2p-t}^\alpha + 2\chi_{t-p}^{-\alpha}, & p+1 \leq t \leq 2p-1, \end{cases} \quad (1.1)$$

а при $1 \leq r, s \leq p-1$

$$\chi_r^+ \chi_s = \sum_{\substack{t=|r-s|+1, \\ \text{шаг}=2}}^{\min(r+s-1, 2p-r-s-1)} \chi_t, \quad \chi_{p-r}^- \chi_s = - \sum_{\substack{t=|r-s|+1, \\ \text{шаг}=2}}^{\min(r+s-1, 2p-r-s-1)} \chi_t, \quad \chi_p^\pm \chi_s = 0, \quad \chi_r \chi_s = 0,$$

где для краткости введены обозначения $\chi_s^\pm = \chi_s^\pm(\tau)$ и $\chi_s = \chi_s(\tau)$.

Умножение (1.1) было впервые выведено в работе [12] как слияние неприводимых представлений $\mathcal{W}_p$ -алгебры; в работе [14] было затем показано, что оно определяет кольцо Гротендика квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$. Элементы $\chi_s^\pm$ линейно порождают алгебру слияний $\mathcal{G} \subset Z_{\text{cft}}$; псевдохарактеры χ_s линейно порождают $(p-1)$ -мерный идеал в Z_{cft} . Пространство Z_{cft} допускает действие модулярной группы, порождаемое элементами

$$S: \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}, \quad T: \tau \mapsto \tau + 1.$$

Структурные константы из предложения 1.1 воспроизводятся из действия S -матрицы, и таким образом получается обобщенная формула Верлинде для $(1, p)$ -моделей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Структурные константы в алгебре Z_{cft} в базисе характеров и псевдохарактеров имеют вид*

$$N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]} = \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{\lambda=1}^{n_l} \frac{S_{[l;1]}^{\text{vac}} S_{[l;1]}^{[r;\alpha]} S_{[l;\lambda]}^{[s;\beta]} + S_{[l;1]}^{\text{vac}} S_{[l;\lambda]}^{[r;\alpha]} S_{[l;1]}^{[s;\beta]} - S_{[l;\lambda]}^{\text{vac}} S_{[l;1]}^{[r;\alpha]} S_{[l;1]}^{[s;\beta]}}{(S_{[l;1]}^{\text{vac}})^2} S_{[k;\gamma]}^{[l;\lambda]}, \quad (1.2)$$

где $1 \leq r, s, k \leq p+1$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n_l \leq 3$, а $S_{[r;\alpha]}^{\text{vac}}$ – элементы “вакуумной” строки.

Обозначения, использованные в данном предложении, вводятся в разделах 2 и 4.

Формулу Верлинде (1.2) можно рассматривать как обобщение формулы Верлинде для $(1, p)$ -модели, выведенной в работе [12], поскольку (1.2) дает структурные константы во всем пространстве амплитуд на торе, в котором алгебра слияний является $2p$ -мерной подалгеброй. Обобщенная формула Верлинде (1.2) основана на следующих результатах. В базисе

$$\phi_s^{\pm} = S(\chi_s^{\pm}), \quad \phi_s = S(\chi_s) \quad (1.3)$$

умножение в Z_{cft} является блочно-диагональным, а структурные константы выражаются через элементы “вакуумной” строки матрицы S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *При $1 \leq r, s \leq p-1$ единственные ненулевые произведения в Z_{cft} относительно базиса (1.3) суть*

$$\begin{aligned} \phi_r \phi_r &= \frac{1}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \left(\phi_r - \frac{S_{[r;2]}^{\text{vac}}}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi_r^+ - \frac{S_{[r;3]}^{\text{vac}}}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi_{p-r}^- \right), \\ \phi_r \phi_r^+ &= \frac{1}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi_r^+, \quad \phi_r \phi_{p-r}^- = \frac{1}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi_{p-r}^-, \\ \phi_p^+ \phi_p^+ &= \frac{1}{S_{[p;1]}^{\text{vac}}} \phi_p^+, \quad \phi_p^- \phi_p^- = \frac{1}{S_{[p+1;1]}^{\text{vac}}} \phi_p^-. \end{aligned}$$

Здесь $S_{[r;\alpha]}^{\text{vac}}$ при $\alpha = 1, 2, 3$ – элементы “вакуумной” строки.

Обозначения, использованные здесь, вводятся ниже в разделе 2.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 вводится пространство Z_{cft} вакуумных амплитуд на торе для $(1, p)$ -моделей и в п. 2.1 напоминает, как устроено действие модулярной группы на нем; наше изложение здесь очень близко работам [12], [14]. В п. 2.2 вводится структура ассоциативной алгебры на пространстве амплитуд на торе. В п. 3.1 приводится напоминание о квантовой группе $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}} \mathfrak{sl}(2)$, дуальной триплетной алгебре $\mathcal{W}_p$, а в п. 3.2 – о действии модулярной группы на центре Z квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}} \mathfrak{sl}(2)$. В разделе 4 приведены результаты, которые используются для получения обобщенной формулы Верлинде для $(1, p)$ -моделей.

2. ПРОСТРАНСТВО Z_{cft} АМПЛИТУД НА ТОРЕ В $(1, p)$ -МОДЕЛИ

Пространство Z_{cft} вакуумных амплитуд на торе является $(3p-1)$ -мерным и линейно порождается $2p$ характеристами неприводимых представлений $\mathcal{X}^\pm(s)$ алгебры $\mathcal{W}_p$,

$$\chi_s^+(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{X}^+(s)} e^{2i\pi\tau(L_0 - c/24)}, \quad \chi_s^-(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{X}^-(s)} e^{2i\pi\tau(L_0 - c/24)}, \quad 1 \leq s \leq p, \quad (2.1)$$

которые выражены через тета-функции (см. формулы (II.1)), и $p-1$ псевдохарактерами, относимыми к проективным модулям $\mathcal{P}^+(s) \oplus \mathcal{P}^-(p-s)$,

$$\begin{aligned} \chi_s(\tau) &= a_0 \tau \left(\frac{p-s}{p} \chi_s^+(\tau) - \frac{s}{p} \chi_{p-s}^-(\tau) \right) = \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{P}^+(s) \oplus \mathcal{P}^-(p-s)} (e^{2i\pi\tau(L_0 - c/24)} \mathbf{1}), \quad 1 \leq s \leq p-1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Псевдохарактеры $\chi_s(\tau)$ определены в (II.2). Заметим, что псевдохарактеры (2.2) не имеют канонической нормировки, а потому определены с точностью до ненулевой константы a_0 .

Определим составленный из характеров и псевдохарактеров вектор

$$\underbrace{(\chi_1(\tau), \chi_1^+(\tau), \chi_{p-1}^-(\tau), \dots, \chi_{p-1}(\tau), \chi_{p-1}^+(\tau), \chi_1^-(\tau), \chi_p^+(\tau), \chi_p^-(\tau))}_{3 \times (p-1)}, \quad (2.3)$$

в котором характеры и псевдохарактеры разбиты на $p-1$ триплетов $\{\chi_s(\tau), \chi_s^+(\tau), \chi_{p-s}^-(\tau)\}$ при $1 \leq s \leq p-1$ и два синглета $\chi_p^+(\tau)$ и $\chi_p^-(\tau)$.

В дальнейшем будем использовать двухиндексную параметризацию элементов из (2.3):

$$\begin{aligned} (\chi_{[s;1]}(\tau), \chi_{[s;2]}(\tau), \chi_{[s;3]}(\tau)) &= (\chi_s(\tau), \chi_s^+(\tau), \chi_{p-s}^-(\tau)), \quad 1 \leq s \leq p-1, \\ \chi_{[p;1]}(\tau) &= \chi_p^+(\tau), \quad \chi_{[p+1;1]}(\tau) = \chi_p^-(\tau). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1. Действие модулярной группы на Z_{cft} . $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие на вектор $(\chi_{[s;\alpha]}(\tau))$ в (2.4) можно записать как

$$\chi_{[s;\alpha]} \left(-\frac{1}{\tau} \right) = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\beta=1}^{n_j} S_{[s;\alpha][j;\beta]} \chi_{[j;\beta]}(\tau), \quad 1 \leq s \leq p-1,$$

где $n_j = 3$ при $1 \leq j \leq p-1$ и $n_j = 1$ при $j = p, p+1$, а матрица $S_{[s;\alpha][j;\beta]}$ имеет блочную структуру [14] (см. также [12], [19]), которую условно можно представить так:

$$\begin{pmatrix} 3 \times 3 & \dots & 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 \times 3 & \dots & 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ 2 \times 3 & \dots & 2 \times 3 & 2 \times 2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где (3×3) -блоки, занумерованные индексами (s, j) , $s, j = 1, \dots, p-1$, имеют следующий вид при $q = e^{i\pi/p}$:

$$\begin{pmatrix} S_{[s;1][j;1]} & S_{[s;1][j;2]} & S_{[s;1][j;3]} \\ S_{[s;2][j;1]} & S_{[s;2][j;2]} & S_{[s;2][j;3]} \\ S_{[s;3][j;1]} & S_{[s;3][j;2]} & S_{[s;3][j;3]} \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{p+s+j}}{\sqrt{2p}} \begin{pmatrix} 0 & a_0 \frac{p-j}{p} (q^{sj} - q^{-sj}) & -a_0 \frac{j}{p} (q^{sj} - q^{-sj}) \\ -\frac{1}{a_0} (q^{sj} - q^{-sj}) & \frac{s}{p} (q^{sj} + q^{-sj}) & \frac{s}{p} (q^{sj} + q^{-sj}) \\ \frac{1}{a_0} (q^{sj} - q^{-sj}) & \frac{p-s}{p} (q^{sj} + q^{-sj}) & \frac{p-s}{p} (q^{sj} + q^{-sj}) \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

(3×2) -блоки, занумерованные индексами (s, p) , $s = 1, \dots, p-1$, имеют вид

$$\begin{pmatrix} S_{[s;1][p;1]} & S_{[s;1][p+1;1]} \\ S_{[s;2][p;1]} & S_{[s;2][p+1;1]} \\ S_{[s;3][p;1]} & S_{[s;3][p+1;1]} \end{pmatrix} = \frac{1}{p\sqrt{2p}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & (-1)^{p-s}s \\ p-s & (-1)^{p-s}(p-s) \end{pmatrix}; \quad (2.7)$$

(2×3) -блоки, занумерованные индексами (p, j) , $j = 1, \dots, p-1$, суть

$$\begin{pmatrix} S_{[p;1][j;1]} & S_{[p;1][j;2]} & S_{[p;1][j;3]} \\ S_{[p+1;1][j;1]} & S_{[p+1;1][j;2]} & S_{[p+1;1][j;3]} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2p}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & (-1)^{p-j} & (-1)^{p-j} \end{pmatrix}; \quad (2.8)$$

и, наконец, (2×2) -блок есть

$$\begin{pmatrix} S_{[p;1][p;1]} & S_{[p;1][p+1;1]} \\ S_{[p+1;1][p;1]} & S_{[p+1;1][p+1;1]} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (-1)^p \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

В матрице S имеется выделенная строка

$$(S_{[j;\beta]}^{\text{vac}}) = (S_{[1;2][j;\beta]}), \quad (2.10)$$

которая соответствует S -преобразованию характера $\chi_1^+(\tau)$ вакуумного представления:

$$\chi_1^+ \left(-\frac{1}{\tau} \right) = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\beta=1}^{n_j} S_{[j;\beta]}^{\text{vac}} \chi_{[j;\beta]}(\tau).$$

2.2. Умножение в пространстве амплитуд на торе. Пространство вакуумных амплитуд на торе можно снабдить структурой ассоциативной коммутативной алгебры аналогично тому, как это сделано в работах [20], [21] в полупростом (рациональном) случае. Мы введем структуру такой алгебры на пространстве Z_{eff} амплитуд на торе для $(1, p)$ -моделей. Заметим, однако, что мы даем лишь эвристическое описание.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначают два базисных твиста Дена на торе, изображенном на следующем рисунке:

(2.11)

где τ лежит в верхней полуплоскости. Характеры $\chi_s^\pm(\tau)$ (2.1) и псевдохарактеры $\chi_s(\tau)$ (2.2) являются конформными блоками нуль-точечных корреляций на торе. Изобразим эти конформные блоки как

$$\chi_s^\pm(\tau) = \text{circle with arrow and } \chi_s^\pm \text{ label} , \quad \chi_s(\tau) = \text{circle with arrow, label } \chi_s \text{ and a small circle with } \mathbb{I} \text{ inside} ,$$

где циклы соответствуют **b**-циклу на торе. Далее введем конформные блоки

$$\mathcal{F}_{r,r^*}^{\pm,s}(z-w) = \text{circle with arrow and } \chi_s^\pm \text{ label, with external legs } \psi_r(z) \text{ and } \psi_{r^*}(w) \text{ meeting at } 1 , \quad \mathcal{F}_{r,r^*}^s(z-w) = \text{circle with arrow, label } \chi_s \text{ and a small circle with } \mathbb{I} \text{ inside, with external legs } \psi_r(z) \text{ and } \psi_{r^*}(w) \text{ meeting at } 1 ,$$

двухточечных корреляторов $\langle \psi_r(z) \psi_{r^*}(w) \rangle$ с самосопряженными примарными полями $\psi_r(z)$ ($r = r^*$) относительно алгебры $\mathcal{W}_p$. Характеры $\chi_s^\pm(\tau)$ и псевдохарактеры $\chi_s(\tau)$ можно получить из этих конформных блоков в пределе совпадающих точек:

$$\chi_s^\pm(\tau) = \lim_{z \rightarrow w} (z-w)^{\Delta_r} \mathcal{F}_{r,r^*}^{\pm,s}(z-w), \quad \chi_s(\tau) = \lim_{z \rightarrow w} (z-w)^{\Delta_r} \mathcal{F}_{r,r^*}^s(z-w),$$

где Δ_r – конформная размерность поля $\psi_r(z)$.

Определим $\star$ -умножение примарного поля $\psi_r(z)$ на характеры $\chi_s^\pm(\tau)$ и псевдохарактеры $\chi_s(\tau)$ как результат вычисления монодромии вдоль **b**-цикла конформных блоков $\mathcal{F}_{r,r^*}^{\pm,s}(z-w)$ и $\mathcal{F}_{r,r^*}^s(z-w)$ относительно координаты z :

$$\begin{aligned} \psi_r(z) \star \chi_s^\pm(\tau) &= \text{diagram of } \mathcal{F}_{r,r^*}^{\pm,s} \text{ with a large loop } b \text{ around it} , \\ \psi_r(z) \star \chi_s(\tau) &= \text{diagram of } \mathcal{F}_{r,r^*}^s \text{ with a large loop } b \text{ around it} , \end{aligned}$$

причем в конце вычисления берется предел совпадающих точек. Тогда умножение на пространстве Z_{cf} вакуумных амплитуд на торе определяется как

$$\chi_r^\pm \chi_s^\alpha = \psi_r^\pm(z) \star \chi_s^\alpha(\tau), \quad \chi_r^\pm \chi_s = \psi_r^\pm(z) \star \chi_s(\tau), \quad \chi_r \chi_s = \psi_r(z) \star \chi_s(\tau),$$

где $\alpha \in \{+, -\}$, $\psi_r^\pm(z)$ – примарные поля, отвечающие представлениям $\mathcal{X}^\pm(r)$, а $\psi_r(z)$ – соответствующие логарифмические партнеры.

Соответствие Каждана–Люстига, сформулированное в работе [14] для логарифмических $(1, p)$ -моделей, привело [16] к эквивалентности между категориями представлений киральной алгебры $\mathcal{W}_p$ и квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$. Такое замечательное соответствие подсказывает изоморфизм между пространством Z_{cf} амплитуд на торе в $(1, p)$ -моделях и центром Z квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$, рассматриваемыми как коммутативные ассоциативные алгебры. Ниже в теореме 3.1 мы укажем, как вычислять введенное на Z_{cf} умножение, используя квантово-групповой подход.

3. ЦЕНТР Z КВАНТОВОЙ ГРУППЫ

Чтобы описать Z_{cf} как ассоциативную коммутативную алгебру, сначала напомним некоторые факты о центре Z ограниченной квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$. Как было показано в работе [14], центр Z является $(3p-1)$ -мерным и допускает $SL(2, \mathbb{Z})$ -действие, которое устроено следующим образом. Пространство Z содержит два специальных базиса. Первый из них состоит из образов характеров и псевдохарактеров (которые связаны с некоторыми неразложимыми представлениями) при отображении Дринфелда χ [22], а второй – при отображении Радфорда ϕ [23]. Будем называть эти базисы *базисом Дринфелда* и *базисом Радфорда*. Тогда S -преобразование из модулярной группы отображает каждый вектор в базисе Дринфелда в некоторый вектор в базисе Радфорда и обратно. Схематично действие модулярной группы на центре можно представить диаграммами

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ch} & \\ \chi \swarrow & & \searrow \phi \\ S: Z & & Z \\ & \xleftarrow{S} & \end{array}, \quad \mathcal{T}: Z \xrightarrow{\mathbf{v}} Z,$$

где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ch – пространство характеров и псевдохарактеров, а $\mathbf{v}$ – ленточный (ribbon) элемент.

Как будет показано ниже в теореме 3.1, структурные константы алгебры Z в базисе Дринфелда являются целыми числами, а в базисе Радфорда умножение является блочно-диагональным, причем структурные константы выражаются через элементы вакуумной строки матрицы S . Использование этих сведений в разделе 4 позволит нам получить обобщенную формулу Верлинде (1.2) для $(1, p)$ -моделей.

3.1. Определение квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$. Квантовая группа, дуальная логарифмической $(1, p)$ -модели с киральной алгеброй $\mathcal{W}_p$, представляет собой “ограниченную” квантовую $\mathfrak{sl}(2)$, обозначаемую как $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ [14], при $q = e^{i\pi/p}$. Ее три

генератора E , F и K удовлетворяют соотношениям для квантовой $sl(2)$

$$KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

с дополнительными связями $E^p = F^p = 0$, $K^{2p} = 1$; структура ее алгебры Хопфа приведена в работе [14].

3.2. Действие модулярной группы на центре. Как показано в работе [18], в Z имеются два базиса: базис Радфорда

$$\{\phi^\pm(s), \phi(r) \mid 1 \leq s \leq p, 1 \leq r \leq p-1\} \quad (3.1)$$

и базис Дринфельда

$$\{\chi^\pm(s), \chi(r) \mid 1 \leq s \leq p, 1 \leq r \leq p-1\}. \quad (3.2)$$

Эти базисы связаны $\mathcal{S}$ -преобразованием из модулярной группы:

$$\mathcal{S}(\chi^\pm(r)) = \phi^\pm(r), \quad \mathcal{S}(\chi(r)) = \phi(r). \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.1 [18]. *Единственные ненулевые произведения в Z относительно базисов Дринфельда и Радфорда имеют следующий вид:*

для базиса Дринфельда (3.2) при $1 \leq r, s \leq p$ и $\alpha, \beta = \pm$

$$\chi^\alpha(r)\chi^\beta(s) = \sum_{\substack{t=|r-s|+1, \\ \text{max}=2}}^{r+s-1} \tilde{\chi}^{\alpha\beta}(t), \quad \text{где} \quad (3.4)$$

$$\tilde{\chi}^\alpha(t) = \begin{cases} \chi^\alpha(t), & 1 \leq t \leq p, \\ \chi^\alpha(2p-t) + 2\chi^{-\alpha}(t-p), & p+1 \leq t \leq 2p-1, \end{cases}$$

и при $1 \leq r, s \leq p-1$

$$\chi^+(r)\chi(s) = \sum_{\substack{i=|r-s|+1, \\ \text{max}=2}}^{\min(r+s-1, 2p-r-s-1)} \chi(i), \quad (3.5)$$

$$\chi^-(p-r)\chi(s) = - \sum_{\substack{i=|r-s|+1, \\ \text{max}=2}}^{\min(r+s-1, 2p-r-s-1)} \chi(i); \quad (3.6)$$

для базиса Радфорда (3.1) при $1 \leq r, s \leq p-1$

$$\phi(r)\phi(r) = \frac{1}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \left(\phi(r) - \frac{S_{[r;2]}^{\text{vac}}}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi^+(r) - \frac{S_{[r;3]}^{\text{vac}}}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi^-(p-r) \right), \quad (3.7)$$

$$\phi(r)\phi^+(r) = \frac{1}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi^+(r), \quad \phi(r)\phi^-(p-r) = \frac{1}{S_{[r;1]}^{\text{vac}}} \phi^-(p-r), \quad (3.8)$$

$$\phi^+(p)\phi^+(p) = \frac{1}{S_{[p;1]}^{\text{vac}}} \phi^+(p), \quad \phi^-(p)\phi^-(p) = \frac{1}{S_{[p+1;1]}^{\text{vac}}} \phi^-(p). \quad (3.9)$$

Здесь $(S_{[r;\beta]}^{\text{vac}}) = (S_{[1;2][r;\beta]})$, $1 \leq r \leq p+1$, $1 \leq \beta \leq n_r$, – “вакуумная” строка, которая соответствует $\mathcal{S}$ -преобразованию единицы $\chi^+(1) = 1$, а $S_{[1;2][r;\beta]}$ определяется в (2.6) и (2.7).

Отождествляя элементы в Z_{cft} и Z с одними и теми же свойствами относительно модулярных преобразований,

$$\begin{aligned}\chi^\pm(s) &\mapsto \chi_s^\pm(\tau), & \chi(s) &\mapsto \chi_s(\tau), \\ \phi^\pm(s) &\mapsto \chi_s^\pm\left(-\frac{1}{\tau}\right), & \phi(s) &\mapsto \chi_s\left(-\frac{1}{\tau}\right),\end{aligned}$$

получаем таким образом два специальных базиса в Z_{cft} . Первый является базисом характеров и псевдохарактеров, определенных в (2.1) и (2.2), что соответствует базису Дринфельда в Z . Второй базис – это базис (1.3), который соответствует базису Радфорда в Z . Таким образом получаем предложение 1.1, используя (3.4)–(3.6), и предложение 1.3, используя (3.7)–(3.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Структурные константы (3.5) совпадают со структурными константами в алгебре слияний для аффинной алгебры $\widehat{sl}(2)_k$ уровня $k=p-2$.

4. ПРАВИЛА СЛИЯНИЯ И ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ВЕРЛИНДЕ

В данном разделе мы сначала приведем замечания по поводу обобщения классической формулы Верлинде [13] на неполупростой случай, а затем используем результаты теоремы 3.1 для получения обобщенной формулы Верлинде для $(1, p)$ -моделей.

4.1. К обобщению формулы Верлинде. Будем предполагать, что S -преобразование из модулярной группы, действующее на конечномерной ассоциативной алгебре, которую обозначим как Z_{cft} , удовлетворяет условию $S^2|_{Z_{\text{cft}}} = \text{id}$ и приводит структурные константы (коэффициенты “слияния”) в Z_{cft} относительно выделенного базиса $\{\chi_i \mid i \in I\}$ (где I – некоторое конечное множество) к блочно-диагональному виду, структуру которого можно условно изобразить так:

$$n_1 \times n_1 \oplus \cdots \oplus n_r \times n_r \oplus \cdots \oplus n_P \times n_P, \quad (4.1)$$

где P – число жордановых блоков, $1 \leq r \leq P$, а $n_r \geq 1$ – ранг r -го жорданова блока. Мы предполагаем также, что в Z_{cft} имеется единица **1**.

Сгруппируем элементы выделенного базиса $\{\chi_i \mid i \in I\}$ в Z_{cft} в блоки (наборы) в соответствии с блочно-диагональной структурой (4.1):

$$\{\chi_{[r;\alpha]} \equiv \chi_{n_1+\cdots+n_{r-1}+\alpha} \mid 1 \leq r \leq P, 1 \leq \alpha \leq n_r\}.$$

Кроме того, соберем структурные константы, описывающие произведение $\chi_{[r;\alpha]}$ и $\chi_{[s;\beta]}$, результат которого лежит в блоке $[k;\gamma]$, в тензор третьего ранга $N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]}$:

$$\chi_{[r;\alpha]} \chi_{[s;\beta]} = \sum_{k=1}^P \sum_{\gamma=1}^{n_k} N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]} \chi_{[k;\gamma]}. \quad (4.2)$$

При $1 \leq r \leq P$ и $1 \leq \alpha \leq n_r$ положим

$$\phi_{[r;\alpha]} = S(\chi_{[r;\alpha]}) = \sum_{j=1}^P \sum_{\beta=1}^{n_j} S_{[r;\alpha][j;\beta]} \chi_{[j;\beta]},$$

а структурные константы в этом базисе обозначим через $\phi_{[r;\lambda][s;\mu]}^{[k;\nu]}$:

$$\phi_{[r;\lambda]} \phi_{[s;\mu]} = \sum_{k=1}^P \sum_{\nu=1}^{n_k} \phi_{[r;\lambda][s;\mu]}^{[k;\nu]} \phi_{[k;\nu]}. \quad (4.3)$$

ТЕОРЕМА 4.1 [18]. Структурные константы $N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]}$ алгебры Z_{cft} воспроизводятся из действия S -матрицы:

$$N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]} = \sum_{l=1}^P \sum_{\lambda, \mu, \nu=1}^{n_l} S_{[r;\alpha][l;\lambda]} S_{[s;\beta][l;\mu]} \phi_{[l;\lambda][l;\mu]}^{[l;\nu]} S_{[l;\nu][k;\gamma]}, \quad (4.4)$$

где структурные константы $\phi_{[l;\lambda][l;\mu]}^{[l;\nu]}$ суть решения уравнений (при $1 \leq l \leq P$ и $1 \leq \mu, \nu \leq n_l$)

$$\sum_{\lambda=1}^{n_l} S_{[l;\lambda]}^{\text{vac}} \phi_{[l;\lambda][l;\mu]}^{[l;\nu]} = \delta_{\mu, \nu}. \quad (4.5)$$

Здесь $(S_{[l;\lambda]}^{\text{vac}}) = (S_{[1;2][l;\lambda]})$ при $1 \leq l \leq P$, $1 \leq \lambda \leq n_l$ – “вакуумная” строка, которая соответствует S -преобразованию единицы $\chi_2 = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Формула (4.4), подобная формуле Верлинде, воспроизводит классическую формулу Верлинде [13] для полупростых (рациональных) теорий, в которых S -преобразование диагонализует структурные константы в алгебре слияний. Действительно, уравнения (4.5) принимают вид $S_{[l;1]}^{\text{vac}} \phi_{[l;1][l;1]}^{[l;1]} = 1$, откуда получается формула Верлинде

$$N_{rs}^k \equiv N_{[r;1][s;1]}^{[k;1]} = \sum_{l=1}^P \frac{S_{rl} S_{sl} S_{lk}}{S_l^{\text{vac}}}.$$

4.2. Обобщенная формула Верлинде для $(1, p)$ -моделей. Применим теперь результаты из п. 4.1 и теоремы 3.1 для получения структурных констант (“обобщенных” коэффициентов слияния) относительно базиса характеров и псевдохарактеров в Z_{cft} , исходя из действия модулярной группы на Z_{cft} . Эти структурные константы совпадают со структурными константами в базисе Дринфельда (3.2):

$$\chi_{[r;\alpha]} \chi_{[s;\beta]} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{\gamma=1}^{n_k} N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]} \chi_{[k;\gamma]}, \quad (4.6)$$

где базис Дринфельда (3.2) записан в обозначениях, аналогичных (2.4):

$$\begin{aligned} \{ \chi_{[s;\alpha]} \mid 1 \leq s \leq p+1, 1 \leq \alpha \leq n_s \} = \\ = \{ \chi(1), \chi^+(1), \chi^-(p-1), \dots, \chi(p-1), \chi^+(p-1), \chi^-(1), \chi^+(p), \chi^-(p) \}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$n_s = 3$ при $1 \leq s \leq p-1$ и $n_s = 1$ при $s = p, p+1$, т.е. элементы базиса Дринфельда сгруппированы в $p-1$ триплетов $\{\chi(s), \chi^+(s), \chi^-(p-s)\}$ при $1 \leq s \leq p-1$ и два синглета $\chi^+(p)$ и $\chi^-(p)$. Аналогичным образом для базиса Радфорда (3.1) введем обозначения

$$\{\phi_{[s;\alpha]} \mid 1 \leq s \leq p+1, 1 \leq \alpha \leq n_s\} = \{\phi(1), \phi^+(1), \phi^-(p-1), \dots, \phi(p-1), \phi^+(p-1), \phi^-(1), \phi^+(p), \phi^-(p)\}. \quad (4.8)$$

В работе [14] показано, что действие $SL(2, \mathbb{Z})$ на центре Z эквивалентно действию на пространстве Z_{eff} амплитуд на торе для $(1, p)$ -моделей. Поэтому элементы базиса (4.7) линейно выражаются через базис (4.8), $\chi_{[s;\alpha]} = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\beta=1}^{n_j} S_{[s;\alpha][j;\beta]} \phi_{[j;\beta]}$, и наоборот $\phi_{[s;\alpha]} = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\beta=1}^{n_j} S_{[s;\alpha][j;\beta]} \chi_{[j;\beta]}$, где элементы S -матрицы $S_{[s;\alpha][j;\beta]}$ определены в (2.5)–(2.9). Таким образом, структурные константы $N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]}$ (4.6) можно вычислить с использованием (4.4) и (4.5), где следует положить $P = p+1$, $n_r = 3$ при $1 \leq r \leq p-1$ и $n_p = n_{p+1} = 1$; в базисе Радфорда (4.8) структурные константы $\phi_{[l;\nu]}^{[l;\nu]}$ являются решениями уравнения (4.5) и совпадают с (3.7)–(3.9). При $1 \leq l \leq p-1$ эти структурные константы равны

$$\begin{aligned} \phi_{[l;1][l;\mu]}^{[l;\nu]} &= \frac{1}{S_{[l;1]}^{\text{vac}}} \left(\sum_{i=1}^3 \delta_{\mu,i} \delta_{\nu,i} - \frac{S_{[l;2]}^{\text{vac}}}{S_{[l;1]}^{\text{vac}}} \delta_{\mu,1} \delta_{\nu,2} - \frac{S_{[l;3]}^{\text{vac}}}{S_{[l;1]}^{\text{vac}}} \delta_{\mu,1} \delta_{\nu,3} \right), \\ \phi_{[l;2][l;\mu]}^{[l;\nu]} &= \frac{1}{S_{[l;1]}^{\text{vac}}} \delta_{\mu,1} \delta_{\nu,2}, \quad \phi_{[l;3][l;\mu]}^{[l;\nu]} = \frac{1}{S_{[l;1]}^{\text{vac}}} \delta_{\mu,1} \delta_{\nu,3}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

а при $l = p, p+1$ имеем $\phi_{[l;1][l;\mu]}^{[l;\nu]} = \frac{1}{S_{[l;1]}^{\text{vac}}} \delta_{\mu,1} \delta_{\nu,1}$. Таким образом, используя (4.4), окончательно получаем

$$N_{[r;\alpha][s;\beta]}^{[k;\gamma]} = \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{\lambda=1}^{n_l} \frac{S_{[l;1]}^{\text{vac}} S_{[l;1]}^{[r;\alpha]} S_{[l;1]}^{[s;\beta]} + S_{[l;1]}^{\text{vac}} S_{[l;1]}^{[r;\alpha]} S_{[l;1]}^{[s;\beta]} - S_{[l;\lambda]}^{\text{vac}} S_{[l;\lambda]}^{[r;\alpha]} S_{[l;1]}^{[s;\beta]}}{(S_{[l;1]}^{\text{vac}})^2} S_{[k;\gamma]}^{[l;\lambda]}, \quad (4.10)$$

где мы полагаем $S_{[l;\lambda]}^{[r;\alpha]} \equiv S_{[r;\alpha][l;\lambda]}$. Обобщенная формула Верлинде (4.10) воспроизводит структурные константы алгебры Z_{eff} (приведенные в предложении 1.1) относительно базиса (2.4) характеров и псевдохарактеров.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен конструктивный метод обобщения классической формулы Верлинде на случай логарифмических конформных теорий поля. Метод основан на соответствии Каждана–Люстига, установленного для $(1, p)$ -моделей в работе [14], а для (p, q) -логарифмических моделей – в работах [15], [3]. Соответствие Каждана–Люстига для $(1, p)$ -моделей является эквивалентностью [16] между категориями представлений триплетной алгебры $\mathcal{W}_p$ и ограниченной квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ при $q = e^{i\pi/p}$. Эта эквивалентность определяет изоморфизм между пространством вакуумных амплитуд на торе в $(1, p)$ -моделях и центром Z квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$. Эти результаты привели нас к обобщению классической формулы Верлинде (4.10), которое дает целочисленные структурные константы во всем

$(3p-1)$ -мерном пространстве вакуумных амплитуд на торе для $(1, p)$ -моделей (причем алгебра слияний является в нем $2p$ -мерной подалгеброй, ср. [24]). Эту формулу можно поэтому рассматривать как обобщение формулы Верлинде для $(1, p)$ -моделей, полученной в работах [12], [24], [25].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Характеры и псевдохарактеры W -алгебры

$\mathcal{W}_p$ -характеры имеют вид [12], [19] ($1 \leq s \leq p$)

$$\begin{aligned}\chi_s^+(q) &= \frac{1}{\eta(q)} \left(\frac{s}{p} \theta_{p-s,p}(q) + 2\theta'_{p-s,p}(q) \right), \\ \chi_s^-(q) &= \frac{1}{\eta(q)} \left(\frac{s}{p} \theta_{s,p}(q) - 2\theta'_{s,p}(q) \right),\end{aligned}\tag{П.1}$$

а $\mathcal{W}_p$ -псевдохарактеры

$$\chi_s(q) = \frac{2a_0}{\eta(q)} \ln q \cdot \theta'_{p-s,p}(q), \quad 1 \leq s \leq p-1 \tag{П.2}$$

(см. также [26]). Здесь использована эта-функция и тета-функция

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad \theta_{s,p}(q, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + s/2p} q^{pj^2} z^j,$$

где $|q| < 1$, $z \in \mathbb{C}$; мы также полагаем $\theta_{s,p}(q) := \theta_{s,p}(q, 1)$ и $\theta'_{s,p}(q) := z \frac{\partial}{\partial z} \theta_{s,p}(q, z) \Big|_{z=1}$.

Благодарности. Я благодарен моим учителям А. Семихатову, И. Типунину и Б. Фейгину. Настоящая работа частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00523), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1615.2008.2), а также фондами “Ландау”, “Династия” и “Поддержка Науки”.

Список литературы

- [1] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **386**:1–4 (1996), 131–137; [arXiv: hep-th/9606050](#).
- [2] P. A. Pearce, J. Rasmussen, J.-B. Zuber, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2006**:11 (2006), 11017; [arXiv: hep-th/0607232](#).
- [3] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **757**:3 (2006), 303–343; [arXiv: hep-th/0606196](#).
- [4] А. М. Семихатов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 291–346; [arXiv: hep-th/0701279](#).
- [5] H. Eberle, M. Flohr, *J. Phys. A*, **39**:49 (2006), 15245–15286; [arXiv: hep-th/0604097](#).
- [6] G. Piroux, P. Ruelle, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2004**:10 (2004), 10005; [arXiv: hep-th/0407143](#).
- [7] J. Cardy, *J. Phys. A*, **25**:4 (1992), L201–L206; [arXiv: hep-th/9111026](#).
- [8] G. M. T. Watts, *J. Phys. A*, **29**:14 (1996), L363–L368; [arXiv: cond-mat/9603167](#).
- [9] D. Adamović, A. Milas, *Adv. Math.*, **217**:6 (2008), 2664–2699; [arXiv: 0707.1857](#).
- [10] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **477**:1 (1996), 293–318; [arXiv: hep-th/9604026](#).
- [11] H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **259**:4 (1991), 448–455.

- [12] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Comm. Math. Phys.*, **247**:3 (2004), 713–742; [arXiv: hep-th/0306274](#).
- [13] E. P. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **300**:3 (1988), 360–376.
- [14] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Comm. Math. Phys.*, **265**:1 (2006), 47–93; [arXiv: hep-th/0504093](#).
- [15] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *J. Math. Phys.*, **48**:3 (2007), 032303; [arXiv: math.QA/0606506](#).
- [16] А. М. Гайнутдинов, А. М. Семихатов, И. Ю. Типунин, Б. Л. Фейгин, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 398–427; [arXiv: math.QA/0512621](#).
- [17] А. М. Семихатов, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 510–535; [arXiv: 0705.4267](#).
- [18] A. M. Gainutdinov, I. Yu. Tipunin, *Radford, Drinfeld, and Cardy boundary states in $(1, p)$ logarithmic conformal field models*, [arXiv: 0711.3430](#).
- [19] M. A. I. Flohr, *Internat. J. Modern Phys. A*, **11**:22 (1996), 4147–4172; [arXiv: hep-th/9509166](#).
- [20] G. Moore, N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **212**:4 (1988), 451–460.
- [21] G. Moore, N. Seiberg, *Nucl. Phys. B*, **313**:1 (1989), 16–40.
- [22] В. Г. Дринфельд, *Алгебра и анализ*, **1**:2 (1989), 30–46.
- [23] D. E. Radford, *J. Algebra*, **163**:3 (1994), 583–622.
- [24] M. A. I. Flohr, H. Knuth, *On Verlinde-like formulas in $c_{p,1}$ logarithmic conformal field theories*, [arXiv: 0705.0545](#).
- [25] M. R. Gaberdiel, I. Runkel, *J. Phys. A*, **41**:7 (2008), 075402; [arXiv: 0707.0388](#).
- [26] M. Flohr, M. R. Gaberdiel, *J. Phys. A*, **39**:8 (2006), 1955–1967; [arXiv: hep-th/0509075](#).