Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, Спектральная параметризация для степенных сумм квантовых суперматриц, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 207–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:03:00

© 2009 г. Д. И. Гуревич^{*†}, П. Н. Пятов^{*‡}, П. А. Сапонов[§]

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ СУММ КВАНТОВЫХ СУПЕРМАТРИЦ

Получена параметризация степенных сумм квантовой (супер)матрицы $GL(m|n)$ -типа в терминах ее спектральных значений.

Ключевые слова: квантовая (супер)матрица, характеристическая подалгебра, спектральное значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа представляет собой дополнение к нашим предыдущим работам [1]–[3], посвященным квантовым матричным алгебрам (КМА) $GL(m|n)$ -типа. Мы продолжаем исследование коммутативной характеристической подалгебры в КМА. Более точно, для набора “квантовых” следов “степеней” квантовой (супер)матрицы мы находим параметризацию в терминах ее спектральных значений, которые являются квантовыми аналогами собственных значений (супер)матрицы. Заметим, что упомянутый набор квантовых следов порождает характеристическую подалгебру. Для иллюстрации наших утверждений кратко напомним соответствующие факты о классических матричных алгебрах.

Как хорошо известно, любая комплексная $(N \times N)$ -матрица $M \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ удовлетворяет полиномиальному тождеству Кэли–Гамильтона (или характеристическому тождеству), которое можно представить в факторизованном виде

$$\prod_{i=1}^N (M - \mu_i I) = 0,$$

где I – единичная матрица, а $\mu_i, i = 1, \dots, N$, – собственные значения M . Раскрывая скобки, можно переписать это тождество так:

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k e_k(\mu) M^{N-k} = 0,$$

^{*}Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany

[†]Université de Valenciennes, Valenciennes, France. E-mail: gurevich@univ-valenciennes.fr

[‡]Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pyatov@theor.jinr.ru

[§]Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: Pavel.Saponov@ihep.ru

где $e_k(\mu)$, $k = 0, 1, \dots, N$, – элементарные симметрические многочлены¹⁾ от переменных $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq N}$. Элементарные симметрические многочлены порождают всю алгебру симметрических многочленов от собственных значений μ_i . Другой хорошо известный производящий набор для симметрических многочленов дается степенными суммами

$$p_k(\mu) := \sum_{i=1}^N \mu_i^k \equiv \text{Tr } M^k.$$

Соотношение между двумя наборами генераторов выражается ньютоновой рекурсией

$$k e_k + \sum_{r=1}^k (-1)^r p_r e_{k-r} = 0, \quad k \geq 1.$$

В работах [1], [2] были найдены аналоги описанных выше классических результатов для геккеского семейства КМА, которое включает q -обобщения суперматриц $GL(m | n)$ -типа для всех целых $m \geq 0$ и $n \geq 0$ (см. определения в следующем разделе). В частности, для этих алгебр были выведены тождества Кэли–Гамильтона, что прояснило способ введения спектральных значений для квантовых матриц. Отметим, что коэффициенты многочлена Кэли–Гамильтона коммутируют между собой. Они порождают коммутативную характеристическую подалгебру в КМА, которая является аналогом алгебры симметрических многочленов от собственных значений матрицы M . Именно тождество Кэли–Гамильтона позволяет представить элементы характеристической подалгебры как (супер)симметрические многочлены от спектральных значений квантовой матрицы.

Как и в классическом случае, квантовые аналоги степенных сумм можно определить как некоторые следы “степеней” квантовой матрицы. По своему построению степенные суммы принадлежат характеристической подалгебре, но их явные выражения через спектральные значения до сих не были известны. Основная цель настоящей работы состоит в выводе таких выражений.

Наше изложение в значительной мере основано на цитированных выше предыдущих работах. В следующем разделе мы приведем список обозначений, определений и основные результаты, которые будут использоваться в дальнейшем. По поводу более подробного изложения, доказательств и короткого обзора мы отсылаем читателя к работам [1], [2].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть V – конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\dim V = N$. Пусть I обозначает единичную матрицу (ее размерность ясна из контекста, если не указана явно), а $P \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$ – автоморфизм перестановки: $P(u \otimes v) = v \otimes u$.

¹⁾Обзор основных результатов о симметрических функциях см. в монографии [4].

Со всяким элементом $X \in \text{End}(V^{\otimes p})$, $p = 1, 2, \dots$, свяжем последовательность эндоморфизмов $X_i \in \text{End}(V^{\otimes k})$, $k \geq p$, $i = 1, \dots, k - p + 1$, следуя правилу

$$X_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes X \otimes I^{\otimes(k-p-i+1)}, \quad 1 \leq i \leq k - p + 1,$$

где I – тождественный автоморфизм пространства V .

Рассмотрим пару обратимых операторов $R, F \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$, подчиненных следующим условиям.

1. Операторы R и F удовлетворяют *уравнениям Янга–Бакстера*

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2, \quad F_1 F_2 F_1 = F_2 F_1 F_2. \quad (2.1)$$

Такие операторы называются *R-матрицами*.

2. Пара R -матриц $\{R, F\}$ является *совместной*, т.е.

$$R_1 F_2 F_1 = F_2 F_1 R_2, \quad F_1 F_2 R_1 = R_2 F_1 F_2. \quad (2.2)$$

3. Матрицы обоих операторов R и F являются *строго косо обратимыми*. Это требование, например для оператора R , означает следующее:

- а) оператор R косо обратим, если существует такой оператор $\Psi^R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$, что

$$\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23}^R = P_{13},$$

где нижний индекс в обозначении следа указывает номер пространства V , в котором вычисляется след (нумерация пространств-компонент в тензорном произведении принята такой: $V^{\otimes k} := V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k$);

б) оператор R строго косо обратим, если дополнительно оператор $D_1^R := \text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R$ обратим.

Имея матрицу D^R , определяем операцию *R-следа*²⁾ $\text{Tr}_R: \text{Mat}_N(W) \rightarrow W$

$$\text{Tr}_R X := \sum_{i,j=1}^N D^{Rj}_i X^i_j, \quad X \in \text{Mat}_N(W),$$

где W – произвольное линейное пространство.

Для совместной пары $\{R, F\}$ строго косо обратимых R -матриц *квантовая матричная алгебра* $\mathcal{M}(R, F)$ является унитарной ассоциативной алгеброй, порожденной N^2 компонентами матрицы $\|M^i_j\|_{i=1}^N$, которые удовлетворяют соотношениям

$$R_1 M_1 M_2 = M_1 M_2 R_1. \quad (2.3)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$M_{\bar{1}} := M_1, \quad M_{\overline{k+1}} := F_k M_{\bar{k}} F_k^{-1}$$

для различных экземпляров $M_{\bar{k}}$ матрицы M . Из определяющих соотношений (2.3) тогда вытекают соотношения того же типа для последовательных пар экземпляров M (см. [5]):

$$R_k M_{\bar{k}} M_{\overline{k+1}} = M_{\bar{k}} M_{\overline{k+1}} R_k.$$

²⁾В литературе по квантовым группам R -след обычно называется квантовым следом или, коротко, q -следом. Давая этой операции другое название, мы надеемся избежать неуместных ассоциаций с параметром q из алгебры Гекке (см. ниже).

Конкретные подсемейства в многообразии КМА выделяются наложением дополнительных условий на R -матрицу R , входящую в соотношение (2.3). Эти условия мы сейчас опишем.

Предположим, что R имеет квадратичный минимальный многочлен, который удобно нормировать так³⁾:

$$(R - qI)(R + q^{-1}I) = 0, \quad q \in \mathbb{C} \setminus 0. \quad (2.4)$$

В данном контексте это соотношение называется *условием Гекке*, а удовлетворяющие ему R -матрицы называются *геккевскими R -матрицами*. Мы будем далее полагать, что параметр q из (2.4) находится в *общем положении*, это означает, что он не совпадает с корнем уравнения

$$k_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = 0 \quad (2.5)$$

ни при каком $k = 2, 3, \dots$.

Для всякой заданной геккевской R -матрицы R можно построить серию R -матричных представлений ρ_R алгебр Гекке A -типа $\mathcal{H}_k(q) \xrightarrow{\rho_R} \text{End}(V^{\otimes k})$, $k = 2, 3, \dots$. Характеристические свойства этих представлений используются для классификации геккевских R -матриц⁴⁾. Не вдаваясь в подробности конструкции, упомянем только, что при выполнении условия (2.5) алгебра Гекке $\mathcal{H}_k(q)$ изоморфна групповой алгебре симметрической группы $\mathbb{C}[S_k]$, а ее неприводимые представления нумеруются множеством разбиений $\lambda \vdash k$; соответствующие центральные идемпотенты из $\mathcal{H}_k(q)$ в дальнейшем обозначаются как e^λ . Фиксируем некоторое разложение идемпотента e^λ в сумму примитивных идемпотентов $e_a^\lambda \in \mathcal{H}_k(q)$: $e^\lambda = \sum_{a=1}^{d_\lambda} e_a^\lambda$, где d_λ – размерность представления, индексированного разбиением λ . Удобно также ввести следующие обозначения:

для произвольных целых $m \geq 0$ и $n \geq 0$ бесконечное множество разбиений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, удовлетворяющих ограничению $\lambda_{m+1} \leq n$, обозначается как $H(m, n)$;

разбиение $((n+1)^{m+1}) \vdash (m+1)(n+1)$ кратко обозначается как $\lambda_{m,n}$, соответствующая диаграмма Юнга – прямоугольник с $m+1$ строками длины $n+1$ (заметим, что $\lambda_{m,n}$ – минимальное разбиение, не принадлежащее множеству $H(m, n)$).

Теперь мы готовы к классификации геккевских R -матриц.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [8], [3]. Для q в общем положении множество геккевских R -матриц разбивается на подмножества, индексированные упорядоченными парами неотрицательных целых $\{m, n\}$. R -матрицы, принадлежащие подмножеству с меткой $\{m, n\}$, называются R -матрицами $GL(m|n)$ -типа (или, другими словами, имеют би-ранг $(m|n)$). R -матричные представления ρ_R , порожденные R -матрицей R , имеющей $GL(m|n)$ -тип, обладают следующим свойством: для всех целых $k \geq 2$ и для любого разбиения $\nu \vdash k$ образы идемпотентов $e^\nu \in \mathcal{H}_k(q)$ удовлетворяют соотношениям

$$\rho_R(e^\nu) = 0, \quad \text{если и только если } \nu \notin H(m, n),$$

³⁾Заметим, что условия (2.1), (2.2) не зависят от нормировки R .

⁴⁾Краткое описание алгебр Гекке и их R -матричных представлений можно найти в работе [1]. По поводу более подробного изложения этого предмета мы отсылаем читателя к работам [6], [7] и приведенной в них библиографии.

или, эквивалентно, если и только если $\lambda_{m,n} \subset \nu$, где включение $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \subset \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ означает, что $\mu_i \leq \nu_i$ для всех i .

Об алгебре $\mathcal{M}(R, F)$, определяемой геккевской R -матрицей R ($GL(m|n)$ -типа), будем далее говорить, как о квантовой матричной алгебре *геккевского* ($GL(m|n)$ -типа).

Для геккевской КМА $\mathcal{M}(R, F)$ рассмотрим множество ее элементов $s_\lambda(M)$, называемых *функциями Шура*:

$$s_0(M) := 1, \quad s_\lambda(M) := \text{Tr}_{R^{(1 \dots k)}}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{p}} \rho_R(e_a^\lambda)), \quad \lambda \vdash p, \quad p = 1, 2, \dots,$$

где определение $s_\lambda(M)$ не зависит от конкретного выбора примитивного идемпотента e_a^λ (на самом деле его можно заменить на $d_\lambda^{-1} e^\lambda$). Как установлено в работе [9], линейная оболочка функций Шура $s_\lambda(M)$ является абелевой подалгеброй в $\mathcal{M}(R, F)$. Будем далее называть ее *характеристической подалгеброй* в $\mathcal{M}(R, F)$. Оказывается, что характеристическая подалгебра в КМА $GL(m|n)$ -типа линейно порождена функциями Шура $s_\lambda(M)$, $\lambda \in \mathbf{H}(m, n)$. Таблица умножения для элементов $s_\lambda(M) \in \mathcal{M}(R, F)$ совпадает с таблицей умножения для базиса из функций Шура в кольце симметрических функций (см. [4]), что и оправдывает введенное обозначение. Имеем [2]

$$s_\lambda(M) s_\mu(M) = \sum_\nu C_{\lambda\mu}^\nu s_\nu(M), \quad (2.6)$$

где $C_{\lambda\mu}^\nu$ – коэффициенты Литлвуда–Ричардсона. Далее нам понадобятся сведения о производящих множествах характеристической подалгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [9], [5]. *Для q в общем положении характеристическая подалгебра в геккевской КМА $\mathcal{M}(R, F)$ порождена любым из следующих трех множеств:*

- 1) *однострочные функции Шура $a_k(M) := s_{(1^k)}(M)$, $k = 0, 1, 2, \dots$;*
- 2) *однострочные функции Шура $s_k(M) := s_{(k)}(M)$, $k = 0, 1, 2, \dots$;*
- 3) *множество степенных сумм*

$$p_0(M) := (\text{Tr}_R I)1, \quad p_k(M) := \text{Tr}_{R^{(1 \dots k)}}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} R_{k-1} \dots R_1), \quad k \geq 1. \quad (2.7)$$

Эти множества связаны рядом рекуррентных соотношений Ньютона и Вронского

$$(-1)^k k_q a_k(M) + \sum_{r=0}^{k-1} (-q)^r a_r(M) p_{k-r}(M) = 0, \quad (2.8)$$

$$k_q s_k(M) - \sum_{r=0}^{k-1} q^{-r} s_r(M) p_{k-r}(M) = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r a_r(M) s_{k-r}(M) = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.10)$$

Вводя производящие функции для этих множеств порождающих элементов

$$\begin{aligned} A(t) &:= \sum_{k \geq 0} a_k(M) t^k, & S(t) &:= \sum_{k \geq 0} s_k(M) t^k, \\ P(t) &:= 1 + (q - q^{-1}) \sum_{k \geq 1} p_k(M) t^k, \end{aligned} \quad (2.11)$$

можно переписать соотношения (2.8)–(2.10) в компактном виде [4], [10]⁵⁾

$$P(-t)A(qt) = A(q^{-1}t), \quad P(t)S(q^{-1}t) = S(qt), \quad A(t)S(-t) = 1. \quad (2.12)$$

Для КМА $GL(m|n)$ -типа нулевая степенная сумма равна [3]

$$p_0(M) = q^{n-m}(m-n)_q 1. \quad (2.13)$$

Одно из замечательных свойств геккевских КМА $\mathcal{M}(R, F)$ состоит в существовании характеристического тождества для матрицы M ее генераторов. Чтобы сформулировать результат, введем понятие *матричного $\star$ -произведения квантовых матриц* (более подробное изложение см. в работе [12], раздел 4.4). А именно, начиная с квантовой матрицы генераторов M и скалярных квантовых матриц $s_\lambda(M)I$ при всех $\lambda \vdash k$, $k \geq 0$, построим всё множество квантовых матриц с помощью следующей рекуррентной процедуры: для всякой квантовой матрицы N ее $\star$ -умножение на $s_\lambda(M)I$ и левое $\star$ -умножение на M также являются квантовыми матрицами, определяемыми как

$$\begin{aligned} M \star (s_\lambda(M)I) &= (s_\lambda(M)I) \star M := M \cdot s_\lambda(M), \\ M \star N &:= M \cdot \phi(N), \quad \text{где} \quad \phi(N)_1 := \text{Tr}_{R^{(2)}} N_2 R_{12}. \end{aligned}$$

Здесь точка обозначает обычное умножение матрицы на скаляр (матрицу). От $\star$ -произведения квантовых матриц требуется ассоциативность; по построению оно коммутативно. Кроме того, $\star$ -степени квантовой матрицы M равны

$$\begin{aligned} M^{\bar{0}} &:= I, \quad M^{\bar{1}} := M, \\ M^{\bar{k}} &:= \underbrace{M \star \cdots \star M}_{k \text{ матриц}} = \text{Tr}_{R^{(2 \dots k)}} (M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} R_{k-1} \dots R_1), \quad k > 1. \end{aligned}$$

Заметим, что для семейства так называемых *алгебр уравнения отражения* – КМА вида $\mathcal{M}(R, R)$ – $\star$ -произведение совпадает с обычным матричным произведением.

Характеристическое тождество существенно зависит от типа КМА. Для КМА $GL(m|n)$ -типа оно представляет собой полиномиальное тождество порядка $m+n$ по $\star$ -степеням матрицы M с коэффициентами из характеристической подалгебры. Имеется следующий q -аналог классической теоремы Кэли–Гамильтона.

ТЕОРЕМА 1 [1], [2]. *Характеристическое тождество для матрицы генераторов КМА $GL(m|n)$ -типа $\mathcal{M}(R, F)$ имеет вид*

$$\left(\sum_{k=0}^m (-q)^k M^{\overline{m-k}} s_{[m|n]^k}(M) \right) \star \left(\sum_{r=0}^n q^{-r} M^{\overline{n-r}} s_{[m|n]^r}(M) \right) \equiv 0, \quad (2.14)$$

где использовано сокращенное обозначение для разбиений

$$[m|n]^k := ((n+1)^k, n^{m-k}), \quad [m|n]_r := (n^m, r).$$

⁵⁾Первое из этих соотношений в предельном случае $\mathcal{M}(R, R) \xrightarrow{q \rightarrow 1} U(\mathfrak{gl}_n)$ было также выведено в работе [11].

Примечательно, что для КМА общего типа (т.е. при $mn > 0$) характеристический многочлен в левой части тождества (2.14) разлагается в произведение двух сомножителей степеней m и n . Поэтому при постановке задачи полной факторизации характеристического многочлена необходимо различать в наборе его $m + n$ корней два поднабора из m и n корней.

Пусть $\mathbb{C}[\mu, \nu]$ – алгебра многочленов от двух наборов взаимно коммутирующих и алгебраически независимых переменных $\mu := \{\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $\nu := \{\nu_j\}_{1 \leq j \leq n}$. Рассмотрим следующее отображение коэффициентов характеристического многочлена в $\mathbb{C}[\mu, \nu]$:

$$s_{[m|n]^k}(M) \mapsto s_{[m|n]^k}(\mu, \nu) := s_{[m|n]}(\mu, \nu) e_k(q^{-1}\mu), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2.15)$$

$$s_{[m|n]^r}(M) \mapsto s_{[m|n]^r}(\mu, \nu) := s_{[m|n]}(\mu, \nu) e_r(-q\nu), \quad 1 \leq r \leq n, \quad (2.16)$$

где $e_k(\cdot)$ – элементарные симметрические многочлены по своим аргументам (например, $e_k(\mu) \equiv e_k(\mu_1, \dots, \mu_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}$). Временно не будем указывать выражение для многочлена $s_{[m|n]}(\mu, \nu)$. Для алгебры квантовых матриц с $\star$ -произведением определим ее центральное расширение скалярными матрицами вида $p(\mu, \nu)I$, $p(\mu, \nu) \in \mathbb{C}[\mu, \nu]$ таким образом, что $s_\lambda(M)I \equiv s_\lambda(\mu, \nu)I$. В расширенной алгебре характеристическое тождество (2.14) принимает полностью факторизованный вид

$$\prod_{i=1}^m (M - \mu_i I) \star \prod_{j=1}^n (M - \nu_j I) \cdot (s_{[m|n]}(\mu, \nu))^2 \equiv 0.$$

Полагая, что $s_{[m|n]}(\mu, \nu) \neq 0$, можно интерпретировать переменные μ_i , $i = 1, \dots, m$, и ν_j , $j = 1, \dots, n$, как собственные значения квантовой матрицы M . Они называются соответственно “четными” и “нечетными” спектральными значениями матрицы M .

Отображение (2.15), (2.16) допускает единственное расширение до гомоморфного отображения характеристических подалгебр в алгебру $\mathbb{C}[\mu, \nu]$ многочленов от спектральных значений μ_i и ν_j . Используя правило умножения Литтлвуда–Ричардсона (2.6), получаем (см. работу [2])

$$a_k(M) \equiv s_{[k|1]}(M) \mapsto a_k(\mu, \nu) := \sum_{r=0}^k e_r(q^{-1}\mu) h_{k-r}(-q\nu), \quad (2.17)$$

$$s_k(M) \equiv s_{[1|k]}(M) \mapsto s_k(\mu, \nu) := \sum_{r=0}^k e_r(-q\nu) h_{k-r}(q^{-1}\mu), \quad (2.18)$$

где $h_k(\cdot)$ – полный симметрический многочлен по своим переменным: $h_k(\mu) \equiv h_k(\mu_1, \dots, \mu_m) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq m} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}$.

Поскольку каждое из множеств $\{a_k(M)\}_{k \geq 0}$, $\{s_k(M)\}_{k \geq 0}$ порождает характеристическую подалгебру, гомоморфизм полностью определяется формулами (2.17) или (2.18). В частности, из формул (2.17) и (2.18) вытекает явное выражение для не определенного до сих пор многочлена $s_{[m|n]}(\mu, \nu)$ из (2.15), (2.16), который является образом $s_{[m|n]}(M)$:

$$s_{[m|n]}(\mu, \nu) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (q^{-1}\mu_i - q\nu_j).$$

Это индуцированное (2.17) или (2.18) гомоморфное отображение называется *спектральной параметризацией* характеристической подалгебры. В следующем разделе мы выведем спектральную параметризацию для третьего порождающего множества характеристической подалгебры, каковым является множество степенных сумм $\{p_k(M)\}_{k \geq 0}$.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СТЕПЕННЫХ СУММ

В данном разделе мы работаем с КМА $GL(m | n)$ -типа $\mathcal{M}(R, F)$, определяемой соотношениями (2.3) с R -матрицей R , удовлетворяющей критерию из предложения 1. В ходе рассмотрения мы предполагаем, что параметр q находится в общем положении (см. (2.5)), хотя впоследствии это ограничение можно отбросить: в отличие от функций Шура $a_k(M)$ и $s_k(M)$, степенные суммы $p_k(M)$ непротиворечивым образом определены для всех $q \in \mathbb{C} \setminus 0$.

В частном случае алгебры уравнения отражения $\mathcal{M}(R, R)$ $GL(m)$ -типа ($GL(m) := GL(m | 0)$) спектральная параметризация степенных сумм была найдена в работе [13]. С учетом того, что в случае $GL(m)$ -типа квантовая матрица имеет только “четные” собственные значения $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$, результат имеет вид

$$p_k(M) \mapsto \sum_{i=1}^m d_i \mu_i^k, \quad \text{где} \quad d_i := q^{-1} \prod_{j \neq i}^m \frac{\mu_i - q^{-2} \mu_j}{\mu_i - \mu_j}.$$

Наша цель состоит в распространении этой формулы на общий случай. Для этого введем вспомогательное множество многочленов $\{\pi_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{C}[\mu, \nu]$, определяемых соотношениями

$$\pi_k(\mu, \nu) := \sum_{i=1}^m (q^{-1} \mu_i)^k - \sum_{j=1}^m (q \nu_j)^k, \quad k \geq 1. \quad (3.1)$$

В дальнейшем мы используем следующие свойства этих многочленов.

ЛЕММА 1. *Наборы многочленов $\{a_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$, $\{s_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$ (см. (2.17), (2.18)) и $\{\pi_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1}$ удовлетворяют ньютоновским рекуррентным соотношениям*

$$(-1)^k k a_k(\mu, \nu) + \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r a_r(\mu, \nu) \pi_{k-r}(\mu, \nu) = 0, \quad (3.2)$$

$$k s_k(\mu, \nu) - \sum_{r=0}^{k-1} s_r(\mu, \nu) \pi_{k-r}(\mu, \nu) = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, напомним соотношения между производящими функциями для степенных сумм и элементарных симметрических и полных симметрических многочленов от конечного числа переменных $x := \{x_i\}_{1 \leq i \leq p}$ (см. книгу [4],

раздел I.2):

$$\begin{aligned}
 E(x|t) &:= \sum_{k=0}^p e_k(x)t^k = \prod_{i=1}^p (1 + x_i t), \\
 H(x|t) &:= \sum_{k \geq 0} h_k(x)t^k = \prod_{i=1}^p (1 - x_i t)^{-1}, \\
 P(x|t) &:= \sum_{k \geq 1} p_k(x)t^{k-1} = -\frac{d}{dt} \ln E(x|t) = \frac{d}{dt} \ln H(x|t).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим три функции, зависящие от двух наборов переменных $x := \{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $y := \{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$:

$$\begin{aligned}
 A(x, y|t) &:= E(x|t)H(-y|t), \\
 S(x, y|t) &:= H(x|t)E(-y|t), \\
 \Pi(x, y|t) &:= P(x|t) - P(y|t).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Эти функции соответственно представляют собой суперматричные аналоги производящих функций элементарных многочленов, полных симметрических многочленов и степенных сумм (см. книгу [4], раздел I.5, упражнение 27, а также приведенную в этой книге библиографию). Действительно, используя (3.4), легко проверить, что эти функции удовлетворяют соотношениям, сходным с (3.4),

$$\Pi(x, y|t) = -\frac{d}{dt} \ln A(x, y|t) = \frac{d}{dt} \ln S(x, y|t). \tag{3.6}$$

Теперь утверждение леммы следует из того, что $A(q^{-1}\mu, q\nu|t)$, $S(q^{-1}\mu, q\nu|t)$ и $\Pi(q^{-1}\mu, q\nu|t)$ являются соответственно производящими функциями для множеств многочленов $\{a_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$, $\{s_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$ и $\{\pi_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1}$. Соотношения (3.2) и (3.3) представляют собой просто разложения соотношений (3.6) по степеням t .

Теперь можно сформулировать основной результат о степенных суммах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Спектральная параметризация (2.17) (или (2.18)) для сумм степеней $p_k(M)$ (2.7) квантовой матричной алгебры $GL(m|n)$ -типа дается формулами*

$$p_k(M) \mapsto p_k(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^m d_i \mu_i^k + \sum_{j=1}^n \tilde{d}_j \nu_j^k, \quad k \geq 0, \tag{3.7}$$

где “весовые” коэффициенты d_i и $\tilde{d}_j$ имеют явный вид

$$d_i := q^{-1} \prod_{\substack{p=1, \\ p \neq i}}^m \frac{\mu_i - q^{-2}\mu_p}{\mu_i - \mu_p} \prod_{j=1}^n \frac{\mu_i - q^2\nu_j}{\mu_i - \nu_j}, \tag{3.8}$$

$$\tilde{d}_j := -q \prod_{i=1}^m \frac{\nu_j - q^{-2}\mu_i}{\nu_j - \mu_i} \prod_{\substack{p=1, \\ p \neq j}}^n \frac{\nu_j - q^2\nu_p}{\nu_j - \nu_p}. \tag{3.9}$$

Поскольку спектральные значения $\{\mu_i\}$ и $\{\nu_j\}$ предполагаются алгебраически независимыми, все коэффициенты d_i и $\tilde{d}_j$ отличны от нуля и корректно определены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется еще один набор рекуррентных формул для сумм степеней $\{p_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1}$ (3.7) и многочленов $\{\pi_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1}$ (3.1).

ЛЕММА 2. *Выполнены соотношения*

$$kp_k(\mu, \nu) = k_q \pi_k(\mu, \nu) + (q - q^{-1}) \sum_{r=1}^{k-1} r_q \pi_r(\mu, \nu) p_{k-r}(\mu, \nu), \quad k \geq 1. \quad (3.10)$$

В терминах производящих функций

$$P(\mu, \nu | t) := 1 + (q - q^{-1}) \sum_{k \geq 1} p_k(\mu, \nu) t^k, \quad \Pi(q^{-1} \mu, q \nu | t) := \sum_{k \geq 1} \pi_k(\mu, \nu) t^{k-1}$$

(здесь $P(\mu, \nu | t)$ – спектральная параметризация $P(t)$, см. (2.11); $\Pi(\mu, \nu | t)$ определено в (3.5)) соотношения (3.10) имеют краткий вид

$$P(\mu, \nu | t) (q \Pi(q^{-1} \mu, q \nu | qt) - q^{-1} \Pi(q^{-1} \mu, q \nu | q^{-1} t)) = \frac{d}{dt} P(\mu, \nu | t). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Введем мероморфную функцию $f: \mathbb{C}[\mu, \nu] \rightarrow \mathbb{C}(\mu, \nu)$ формулой

$$f(z) := \prod_{i=1}^m \frac{(z - q^{-2} \mu_i)}{(z - \mu_i)} \prod_{j=1}^n \frac{(z - q^2 \nu_j)}{(z - \nu_j)}.$$

Поскольку спектральные значения алгебраически независимы, данная функция имеет полюс первого порядка в каждой из точек μ_i и ν_j . Кроме того, как легко видеть, $f(0) = q^{2(n-m)}$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$. Учитывая указанный предел на бесконечности, разложим функцию $f(z)$ в сумму простых дробей:

$$f(z) = 1 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{z - \mu_i} \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\mu_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \nu_j} \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\nu_j}, \quad (3.12)$$

где вычеты в полюсах имеют вид

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\mu_i} = (q - q^{-1}) \mu_i d_i, \quad \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\nu_j} = (q - q^{-1}) \nu_j \tilde{d}_j.$$

Вычисляя правую часть (3.12) при $z = 0$, получаем

$$f(0) = q^{2(n-m)} = 1 - (q - q^{-1}) \left(\sum_{i=1}^m d_i + \sum_{j=1}^n \tilde{d}_j \right) := 1 - (q - q^{-1}) p_0(\mu, \nu),$$

и поэтому

$$p_0(\mu, \nu) = q^{n-m} (m - n)_q 1.$$

Таким образом мы проверили согласованность формул (3.7) с нашим предыдущим результатом (2.13) для $p_0(M)$.

Чтобы доказать соотношения (3.10), разложим функции $z^k f(z)$, $k \geq 1$, в суммы простых дробей. Помимо простых полюсов в μ_i и ν_j функция $z^k f(z)$ имеет полюс k -го порядка в $z = \infty$ или, в терминах новой переменной $y = z^{-1}$, в точке $y = 0$. Учитывая, что

$$\operatorname{Res} z^k f(z) \Big|_{z=\mu_i} = (\mu_i)^k \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\mu_i}, \quad \operatorname{Res} z^k f(z) \Big|_{z=\nu_j} = (\nu_j)^k \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\nu_j},$$

приходим к соответствующему разложению

$$z^k f(z) = \sum_{r=0}^k \frac{z^{k-r}}{r!} f_r + (q - q^{-1}) \left(\sum_{i=1}^m \frac{d_i \mu_i^{k+1}}{z - \mu_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{d}_j \nu_j^{k+1}}{z - \nu_j} \right), \quad (3.13)$$

где коэффициенты f_r суть производные:

$$f_r := \left. \frac{d^r f(y)}{dy^r} \right|_{y=0}.$$

Вычисляя (3.13) в точке $z = 0$ и учитывая (3.7), получаем соотношения

$$p_k(\mu, \nu) = \frac{f_k}{(q - q^{-1})k!}, \quad k \geq 1. \quad (3.14)$$

Обратимся к вычислению f_k . Вспомня, что $y = z^{-1}$, запишем производную первого порядка $f'(y)$ в виде

$$\frac{df(y)}{dy} = (q - q^{-1})u(y)f(y), \quad (3.15)$$

где

$$u(y) := \sum_{i=1}^m \frac{q^{-1}\mu_i}{(1 - \mu_i y)(1 - q^{-2}\mu_i y)} - \sum_{j=1}^n \frac{q\nu_j}{(1 - \nu_j y)(1 - q^2\nu_j y)}.$$

Простой индукцией по k можно проверить, что

$$u_k(y) := \frac{d^k u(y)}{dy^k} = k! \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{a=0}^k \frac{q^{-1-2(k-a)} \mu_i^{k+1}}{(1 - \mu_i y)^{1+a} (1 - q^{-2}\mu_i y)^{1+k-a}} - \sum_{j=1}^n \sum_{a=0}^k \frac{q^{1+2(k-a)} \nu_j^{k+1}}{(1 - \nu_j y)^{1+a} (1 - q^2\nu_j y)^{1+k-a}} \right\}.$$

Приведенное соотношение немедленно приводит к равенству

$$\begin{aligned} u_k(0) &= k! (k+1)_q \left\{ \sum_{i=1}^m (q^{-1}\mu_i)^{k+1} - \sum_{j=1}^n (q\nu_j)^{k+1} \right\} := \\ &:= k! (k+1)_q \pi_{k+1}(\mu, \nu), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Дифференцируя теперь соотношение (3.15) при $y = 0$, получаем

$$f_k = (q - q^{-1}) \sum_{r=0}^{k-1} \binom{r}{k-1} u_r(0) f_{k-r-1}, \quad k \geq 1,$$

где использовано очевидное условие $f_0 = 1$. С учетом соотношений (3.14) и (3.16) легко доказать утверждение леммы. Действительно,

$$\begin{aligned} kp_k(\mu, \nu) &= \frac{f_k}{(q - q^{-1})(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{r}{k-1} u_r(0) f_{k-r-1} = \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(r+1)_q}{(k-r-1)!} \pi_{r+1}(\mu, \nu) f_{k-r-1} = \sum_{r=1}^k r_q \pi_r(\mu, \nu) \frac{f_{k-r}}{(k-r)!} = \\ &= k_q \pi_k(\mu, \nu) + (q - q^{-1}) \sum_{r=1}^{k-1} r_q \pi_r(\mu, \nu) p_{k-r}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Наконец, эквивалентность (3.10) и (3.11) проверяется прямым вычислением.

Теперь мы готовы к доказательству предложения. Проверим, что соотношения (2.8) и (2.9) превращаются в тождества, если заменить $a_r(M)$, $s_r(M)$ и $p_{k-r}(M)$ на их спектральные параметризации (2.17), (2.18) и (3.7)–(3.9) соответственно и учесть равенства (3.2) и (3.3) вместе с (3.10). Для определенности проверим соотношение (2.8).

Чтобы упростить вычисления, будем работать с производящими функциями $A(q^{-1}\mu, q\nu | t)$ для $\{a_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$, $\Pi(q^{-1}\mu, q\nu | t)$ для $\{\pi_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1}$ и $P(\mu, \nu | t)$ для $\{p_k(\mu, \nu)\}_{k \geq 1}$. Подставляя выражение для $\Pi(\cdot)$ через $A(\cdot)$ (см. (3.6)) в равенство (3.11) и собирая подобные члены, получаем

$$\frac{d}{dt} \ln(P(\mu, \nu | t) A(q^{-1}\mu, q\nu | -qt)) = \frac{d}{dt} \ln(A(q^{-1}\mu, q\nu | -q^{-1}t)).$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$P(\mu, \nu | t) A(q^{-1}\mu, q\nu | -qt) = C A(q^{-1}\mu, q\nu | -q^{-1}t).$$

Очевидное граничное условие $P(\mu, \nu | 0) = A(q^{-1}\mu, q\nu | 0) = 1$ фиксирует постоянную интегрирования: $C = 1$, и мы приходим к первому равенству в (2.12).

Благодарности. Д. И. Гуревич и П. Н. Пятов благодарят Max-Planck-Institut für Mathematik, где эта работа была завершена, за доброе гостеприимство. Работа Д. И. Гуревича частично поддержана грантом ANR-05-BLAN-0029-01. П. Н. Пятов и П. А. Сапонов поддержаны РФФИ (грант № 08-01-00392_a).

Список литературы

- [1] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, *Алгебра и анализ*, **17**:1 (2005), 160–182; [arXiv: math.QA/0412192](#).
- [2] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, *ТМФ*, **147**:1 (2006), 14–46; [arXiv: math.QA/0508506](#).
- [3] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, *Алгебра и анализ*, **20**:2 (2008), 70–133; [arXiv: math.QA/0612815](#).
- [4] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford–New York, 1995.

- [5] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, *J. Phys. A*, **32**:9 (1999), L115–L121; [arXiv:math.QA/9809170](#).
- [6] A. Ram, *Proc. London Math. Soc.*, **75**:1 (1997), 99–133; [arXiv:math.RT/9511223](#).
- [7] O. Ogievetsky, P. Pyatov, “Lecture on Hecke algebras”, *Symmetries and Integrable Systems*, Proc. Int. School (Dubna, Russia, June 8–11, 1999), ed. S. Z. Pakulyak, JINR, Dubna, 2000, 39–88; Preprint MPIM 2001-40, <http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html>.
- [8] P. H. Hai, *Acta Math. Vietnam.*, **24**:2 (1999), 235–246.
- [9] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, *Czech. J. Phys.*, **48**:11 (1998), 1369–1374; [arXiv:math.QA/9809047](#).
- [10] A. Isaev, P. Pyatov, *Spectral extension of the quantum group cotangent bundle*, [arXiv:0812.2225](#).
- [11] T. Umeda, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:11 (1998), 3169–3175.
- [12] O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, *Orthogonal and symplectic quantum matrix algebras and Cayley–Hamilton theorem for them*, [arXiv:math.QA/0511618](#).
- [13] D. Gurevich, P. Saponov, “Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries”, *Quantum Groups*, Proc. Conf. in Memory of J. Donin (Haifa, Israel, July 5–12, 2004), *Contemp. Math.*, **433**, eds. P. Etingof, S. Gelaki, S. Shnider, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 209–250; [arXiv:math/0411579](#).