Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. О. Поздеева, Новое двухпараметрическое семейство точно решаемых дираковских гамильтонианов, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 243–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:58:52

© 2009 г.

Е. О. Поздеева*

НОВОЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ТОЧНО РЕШАЕМЫХ ДИРАКОВСКИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Методом преобразований Дарбу построено двухпараметрическое семейство точно решаемых дираковских гамильтонианов. Получены соотношения сплетения между различными членами этого семейства. Исследованы спектральные свойства полученных гамильтонианов, приведены явные выражения для их собственных функций.

Ключевые слова: преобразования Дарбу, уравнение Дирака, суперсимметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод преобразований Дарбу [1]–[7] является одним из основных методов построения точно решаемых моделей математической физики [8]–[14]. Идея метода была предложена в 1882 г. французским математиком Дарбу для линейной задачи Штурма–Лиувилля (специального случая одномерного уравнения Шредингера) [1]. Дальнейшее развитие метод получил в работе Крума [3], итеративно применившего к уравнению Шредингера преобразование Дарбу.

Современная концепция преобразований Дарбу принадлежит Матвееву, обобщившему и переформулировавшему в 1979 г. результаты Дарбу–Крума применительно к бесконечным иерархиям линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и некоторым их обобщениям (дифференциально-разностным, матричным и др.), включая нестационарные и нелинейные уравнения Шредингера, уравнения Кортевега–де Фриза, Кадомцева–Петвиашвили и многие другие [4], [5]. Многочисленные конкретные реализации этого метода суммированы в монографии [7].

Отметим, что в неявном виде результаты математических работ [4], [6], [7] содержат случаи стационарного и нестационарного двухкомпонентного уравнения Дирака. В явном виде систематическая разработка метода преобразований Дарбу–Крума для одномерного двухкомпонентного уравнения Дирака представлена в работе [15] (см. обзор литературы в [7], [15]).

*Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, Москва, Россия.
E-mail: pozdeeva@chph.ras.ru

Согласно работе [7] форма преобразований Дарбу для четырехкомпонентного стационарного уравнения Дирака может быть аналогична форме преобразования для двухкомпонентного стационарного уравнения Дирака, рассмотренной в работе [15]. В настоящей работе мы применяем метод преобразований Дарбу–Крума к четырехкомпонентному уравнению Дирака.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 методом преобразования Дарбу из свободного гамильтониана получены четыре односолитонных гамильтониана и изучены соотношения сплетения между ними. В разделе 3 с помощью последовательных преобразований Дарбу–Крума построено двухпараметрическое семейство точно решаемых многосолитонных гамильтонианов. В разделе 4 исследованы спектры полученных гамильтонианов и приведены явные выражения для их собственных функций.

2. ОДНОСОЛИТОННЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

Рассмотрим одномерное четырехкомпонентное стационарное уравнение Дирака

$$H_0\psi(x) = E\psi(x), \quad H_0 = -i\alpha_1\partial_x + V_0, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица Паули, V_0 – произвольная эрмитова (4×4) -матрица, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ – четырехкомпонентный спинор.

Пусть $u(x)$ – решение матричного уравнения Дирака

$$H_0u(x) = u(x)\Lambda, \quad (2)$$

где Λ – произвольная невырожденная (4×4) -матрица, не зависящая от x . Определим оператор преобразования Дарбу соотношением

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{du(x)}{dx} u^{-1} \quad (3)$$

и рассмотрим соотношение сплетения

$$LH_0 = H_1L. \quad (4)$$

Тогда имеем

$$H_1 = -i\alpha_1\partial_x + V_1,$$

где

$$V_1 = V_0 + \left[-i\alpha_1, \frac{du(x)}{dx} u^{-1} \right].$$

Преобразованные спинорные функции $\tilde{\psi} = L\psi$ удовлетворяют уравнению Дирака

$$H_1\tilde{\psi}(x) = E\tilde{\psi}(x). \quad (5)$$

Полученные соотношения аналогичны соотношениям преобразований Дарбу двухкомпонентного уравнения Дирака, детально исследованным в работе [15].

Рассмотрим в качестве гамильтониана H_0 гамильтониан свободного движения частицы, т.е. положим $V_0 = m\beta$, где m – масса частицы, $\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выберем Λ в виде

$$\Lambda(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} [\lambda_1(I + \beta) + \lambda_2(I - \beta)], \quad (6)$$

где $\lambda_1 = \pm\varepsilon_0$, $\lambda_2 = \pm\varepsilon_1$, $\varepsilon_n = \sqrt{m^2 - k^2 n^2}$, k – вещественное число ($k \ll m$). Четырем различным наборам пар параметров λ_1, λ_2 отвечают четыре различные матрицы $\Lambda^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$,

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \Lambda(\varepsilon_0, \varepsilon_1), & \Lambda^{(2)} &= \Lambda(\varepsilon_0, -\varepsilon_1), \\ \Lambda^{(3)} &= \Lambda(-\varepsilon_0, \varepsilon_1), & \Lambda^{(4)} &= \Lambda(-\varepsilon_0, -\varepsilon_1) \end{aligned} \quad (7)$$

и соответственно четыре матричные функции преобразования $u^{(i)}$, являющиеся решениями матричного уравнения Дирака

$$H_0 u^{(i)} = \Lambda^{(i)} u^{(i)}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (8)$$

Все эти решения имеют общую матричную структуру

$$u^{(i)} = a^{(i)} I + b^{(i)} \alpha + c^{(i)} \beta + d^{(i)} \gamma, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \alpha_1, \quad \gamma = \alpha\beta, \quad \alpha^2 = \beta^2 = -\gamma^2 = I.$$

Обратные матрицы, как нетрудно убедиться, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (u^{(i)})^{-1} &= \frac{1}{D} (a^{(i)} I - b^{(i)} \alpha - c^{(i)} \beta - d^{(i)} \gamma), \\ D &= a^{(i)2} - b^{(i)2} - c^{(i)2} + d^{(i)2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Величины $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $d^{(i)}$ представим в виде

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= \frac{1}{2} (\mu_1^{(i)} + \mu_3^{(i)}), & b^{(i)} &= \frac{1}{2} (\mu_2^{(i)} + \mu_4^{(i)}), \\ c^{(i)} &= \frac{1}{2} (\mu_1^{(i)} - \mu_3^{(i)}), & d^{(i)} &= \frac{1}{2} (\mu_4^{(i)} - \mu_2^{(i)}). \end{aligned}$$

Явные представления для величин $\mu_k^{(i)}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= \mu_1^{(2)} = 1 = \mu_4^{(3)} = \mu_4^{(4)}, & \mu_4^{(1)} &= \mu_4^{(2)} = 0 = \mu_1^{(3)} = \mu_1^{(4)}, \\ \mu_3^{(1)} &= \mu_3^{(2)} = \mu_3^{(3)} = \mu_3^{(4)} = \operatorname{ch} kx, & \mu_2^{(1)} &= \frac{ik \operatorname{sh} kx}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}, \\ \mu_2^{(2)} &= \frac{ik \operatorname{sh} kx}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}, & \mu_2^{(3)} &= -\frac{ik \operatorname{sh} kx}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}, & \mu_2^{(4)} &= \frac{ik \operatorname{sh} kx}{-\varepsilon_0 + \varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем с помощью полученных трансформационных матриц оператор преобразования Дарбу

$$L^{(i)} = \frac{d}{dx} - \frac{du^{(i)}}{dx} (u^{(i)})^{-1}. \quad (12)$$

Используя соотношения сплетения

$$L^{(i)} H_0^{(i)} = H_1^{(i)} L^{(i)}, \quad (13)$$

получаем четыре новых гамильтониана

$$H_1^{(i)} = H_0^{(i)} + \left[-i\alpha, \frac{du^{(i)}}{dx} (u^{(i)})^{-1} \right], \quad i = \overline{1, 4}, \quad (14)$$

имеющих следующий явный вид:

$$\begin{aligned} H_1^{(1)} &= -i\alpha_1 \partial_x - \varepsilon_1 \beta + ik \operatorname{th} kx \gamma, \\ H_1^{(2)} &= -i\alpha_1 \partial_x + \varepsilon_1 \beta + ik \operatorname{th} kx \gamma, \\ H_1^{(3)} &= -i\alpha_1 \partial_x - \varepsilon_1 \beta - ik \operatorname{th} kx \gamma, \\ H_1^{(4)} &= -i\alpha_1 \partial_x + \varepsilon_1 \beta - ik \operatorname{th} kx \gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

Гамильтонианы $H_1^{(1)}$, $H_1^{(3)}$ и $H_1^{(2)}$, $H_1^{(4)}$ связаны унитарным преобразованием

$$H_1^{(3)} = U H_1^{(1)} U^{-1}, \quad H_1^{(4)} = U H_1^{(2)} U^{-1}, \quad U = \alpha, \quad (16)$$

и, следовательно, попарно изоспектральны.

Спектры всех четырех приведенных гамильтонианов, в отличие от H_0 , содержат, помимо двух непрерывных ветвей $m \leq E < \infty$ и $-\infty < E \leq -m$, также дискретную часть, состоящую из одного уровня. Энергии связанных состояний гамильтонианов $H_1^{(1)}$ и $H_1^{(3)}$ равны ε_1 . Энергии связанных состояний гамильтонианов $H_1^{(2)}$, $H_1^{(4)}$ имеют значение $-\varepsilon_1$.

Кроме соотношений (16), между парами гамильтонианов $H_1^{(i)}$ существуют также соотношения сплетения

$$\begin{aligned} L_1^{(1,4)} H_1^{(1)} &= H^{(4)} L_1^{(1,4)}, & L_1^{(2,3)} H_1^{(2)} &= H^{(3)} L_1^{(2,3)}, \\ L_1^{(4,1)} H_1^{(4)} &= H_1^{(1)} L_1^{(4,1)}, & L_1^{(3,2)} H_1^{(3)} &= H_1^{(3)} L_1^{(3,2)}, \\ L_1^{(1,2)} H_1^{(1)} &= H_1^{(2)} L_1^{(1,2)}, & L_1^{(2,1)} H_1^{(2)} &= H_1^{(1)} L_1^{(2,1)}, \\ L_1^{(3,4)} H_1^{(3)} &= H^{(4)} L_1^{(3,4)}, & L_1^{(4,3)} H_1^{(4)} &= H^{(3)} L_1^{(4,3)}. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом

$$\begin{aligned} L_1^{(1,4)} &= L_1^{(2,3)} = \bar{L}_1, & L_1^{(4,1)} &= L_1^{(3,2)} = \tilde{L}_1, \\ L_1^{(1,2)} &= \bar{L}_1 U, & L_1^{(2,1)} &= \tilde{L}_1 U, \\ L_1^{(3,4)} &= \bar{L}_1 U, & L_1^{(4,3)} &= \tilde{L}_1 U, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{L}_1 = \frac{d}{dx} - \frac{d\bar{u}}{dx} (\bar{u})^{-1}, \quad \tilde{L}_1 = \frac{d}{dx} - \frac{d\tilde{u}}{dx} (\tilde{u})^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \operatorname{ch} kx (I + \beta) + \frac{1}{\operatorname{ch} kx} (I - \beta), \\ \tilde{u} &= \operatorname{ch} kx (\alpha + \gamma) + \frac{1}{\operatorname{ch} kx} (\alpha - \gamma). \end{aligned}$$

3. МНОГОСОЛИТОННЫЕ ФОРМИНВАРИАНТНЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

Рассмотрим гамильтонианы $H_n^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$, вида

$$H_n^{(1)} = -i\alpha_1 \frac{d}{dx} - \varepsilon_n \beta + ink \operatorname{th} kx\gamma, \quad (19)$$

$$H_n^{(2)} = -i\alpha_1 \frac{d}{dx} + \varepsilon_n \beta + ink \operatorname{th} kx\gamma, \quad (20)$$

$$H_n^{(3)} = -i\alpha_1 \frac{d}{dx} + \varepsilon_n \beta - ink \operatorname{th} kx\gamma, \quad (21)$$

$$H_n^{(4)} = -i\alpha_1 \frac{d}{dx} - \varepsilon_n \beta - ink \operatorname{th} kx\gamma, \quad (22)$$

совпадающие с полученными выше гамильтонианами $H_1^{(i)}$ при $n = 1$. Очевидно, что

$$H_n^{(3)} = U H_n^{(1)} U^{-1}, \quad H_n^{(4)} = U H_n^{(2)} U^{-1}, \quad U = \alpha_1. \quad (23)$$

С помощью простых вычислений нетрудно проверить, что они также связаны между собой следующими соотношениями сплетения $L_n^{(i,k)} H_n^{(i)} = H_{n+1}^{(k)} L_n^{(i,k)}$ ($i, k = 1, 2$ или $i, k = 3, 4$):

$$\begin{aligned} \bar{L}_n H_n^{(1)} &= H_n^{(4)} \bar{L}_n, & \tilde{L}_n H_n^{(4)} &= H_n^{(1)} \tilde{L}_n, \\ \bar{L}_n H_n^{(2)} &= H_n^{(3)} \bar{L}_n, & \tilde{L}_n H_n^{(3)} &= H_n^{(2)} \tilde{L}_n. \end{aligned} \quad (24)$$

При этом

$$\bar{L}_n = \frac{d}{dx} - \frac{d\bar{u}_n}{dx} (\bar{u}_n)^{-1}, \quad \tilde{L}_n = \frac{d}{dx} - \frac{d\tilde{u}_n}{dx} (\tilde{u}_n)^{-1}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &= \operatorname{ch}^n kx (I + \beta) + \frac{1}{\operatorname{ch}^n kx} (I - \beta), \\ \tilde{u}_n &= \operatorname{ch}^n kx (\alpha + \gamma) + \frac{1}{\operatorname{ch}^n kx} (\alpha - \gamma), \\ L_n^{(i,k)} &= \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} (u_n^{(i,k)}) (u_n^{(i,k)})^{-1}, \\ u_n^{(i,k)} &= a_n^{(i,k)} I + b_n^{(i,k)} \alpha + c_n^{(i,k)} \beta + d_n^{(i,k)} \gamma, \\ a_n^{(i,k)} &= \frac{1}{2} (\mu_{n,1}^{(i,k)} + \mu_{n,3}^{(i,k)}), & b_n^{(i,k)} &= \frac{1}{2} (\mu_{n,2}^{(i,k)} + \mu_{n,4}^{(i,k)}), \\ c_n^{(i,k)} &= \frac{1}{2} (\mu_{n,1}^{(i,k)} - \mu_{n,3}^{(i,k)}), & d_n^{(i,k)} &= \frac{1}{2} (\mu_{n,4}^{(i,k)} - \mu_{n,2}^{(i,k)}). \end{aligned}$$

Явные выражения для величин $\mu_{n,j}^{(i,k)}$, $j = \overline{1, 4}$, приведены в приложении.

Трансформационные матрицы $u_n^{(i,k)}$ являются решениями матричных уравнений

$$H_n^{(i)} u_n^{(i,k)} = u_n^{(i,k)} \Lambda_n^{(i,k)}, \quad \Lambda_n^{(i,k)} = \frac{1}{2} [(I + \beta) \lambda_{n,1}^{(i,k)} + (I - \beta) \lambda_{n,2}^{(i,k)}]. \quad (26)$$

Значения величин $\lambda_{n,j}^{(i,k)}$, $j = 1, 2$, также приведены в приложении.

Соотношения сплетения (24) схематически представлены на диаграмме

Таким образом, используя технику последовательных преобразований Дарбу (преобразований Дарбу–Крума), мы построили двухпараметрическое семейство точно решаемых гамильтонианов $H_n^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$, являющихся $(2n-1)$ -солитонными, т.е. имеющих $2n-1$ связанное состояние.

4. СТРУКТУРА СПЕКТРОВ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГАМИЛЬТониАнов $H_n^{(i)}$

Исследуем решения уравнений

$$H_n^{(i)}\psi^{(i)} = E\psi^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

учитывая, что

$$\psi^{(3)} = \alpha\psi^{(1)}, \quad \psi^{(4)} = \alpha\psi^{(2)}. \quad (28)$$

Из (19), (20), (27) получаем, что компоненты спиноров

$$\psi^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}, \psi_3^{(i)}, \psi_4^{(i)})^T$$

при $i = 1, 2$ удовлетворяют уравнениям второго порядка

$$(\psi_j^{(i)})'' + \frac{n(n-1)k^2}{\text{ch}^2 kx} \psi_j^{(i)} + (E^2 - m^2)\psi_j^{(i)} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

$$(\psi_j^{(i)})'' + \frac{n(n+1)k^2}{\text{ch}^2 kx} \psi_j^{(i)} + (E^2 - m^2)\psi_j^{(i)} = 0, \quad j = 3, 4, \quad (30)$$

которые подстановкой $t = \text{th } kx$ приводятся к уравнениям для обобщенных функций Лежандра (см., например, [16]).

Отметим, что уравнение Шредингера с аналогичными потенциалами рассматривалось Дарбу [1], а впоследствии также Пешлем и Теллером [17] (ДПТ-потенциал [18]).

Спектр энергий в области $|E| \geq m$ непрерывен, а при $|E| < m$ дискретен. Значения дискретных уровней энергии даются соотношениями

$$E_s = \text{sign}(s)\varepsilon_s = \text{sign}(s)\sqrt{m^2 - k^2 s^2}, \quad (31)$$

причем

$$s = \begin{cases} -n+1, -n+2, \dots, -1, 1, \dots, n-1, n & \text{при } i=1, \\ -n, -n+1, \dots, -1, 1, \dots, n-2, n-1 & \text{при } i=2. \end{cases}$$

Решения уравнений

$$H_n^{(1)}\psi_s = E_s\psi_s^{(1)} \quad (32)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_s^{(1)} &= (\psi_{s1}^{(1)}, \psi_{s2}^{(1)}, \psi_{s3}^{(1)}, \psi_{s4}^{(1)})^T, \\ \psi_{s1}^{(1)} &= A_s^{(1)} P_{n-1}^s(t), \quad \psi_{s2}^{(1)} = B_s^{(1)} P_{n-1}^s(t), \\ \psi_{s3}^{(1)} &= C_s^{(1)} P_n^s(t), \quad \psi_{s4}^{(1)} = D_s^{(1)} P_n^s(t), \quad t = \text{th } kx, \\ A_s^{(1)} &= \frac{ik(n+s)}{E_s + \varepsilon_n} D_s^{(1)}, \quad B_s^{(1)} = \frac{ik(n+s)}{E_s + \varepsilon_n} C_s^{(1)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Решения же уравнений

$$H_n^{(2)}\psi_s = E_s\psi_s^{(2)}$$

следующие:

$$\begin{aligned} \psi_s^{(2)} &= (\psi_{s1}^{(2)}, \psi_{s2}^{(2)}, \psi_{s3}^{(2)}, \psi_{s4}^{(2)})^T, \\ \psi_{s1}^{(2)} &= A_s^{(2)} P_{n-1}^s(t), \quad \psi_{s2}^{(2)} = B_s^{(2)} P_{n-1}^s(t), \\ \psi_{s3}^{(2)} &= C_s^{(2)} P_n^s(t), \quad \psi_{s4}^{(2)} = D_s^{(2)} P_n^s(t), \quad t = \text{th } kx, \\ A_s^{(2)} &= \frac{ik(n-s)}{E_s - \varepsilon_n} D_s^{(2)}, \quad B_s^{(2)} = \frac{ik(n-s)}{E_s - \varepsilon_n} C_s^{(2)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $P_{n-1}^s(t)$ и $P_n^s(t)$ – присоединенные функции Лежандра [19]. Непрерывный спектр двукратно вырожден, т.е. при каждом значении E , $|E| \geq m$, уравнения (27) имеют два линейно независимых решения, которые могут быть получены из волновых функций дискретного спектра подстановкой

$$\begin{aligned} E_s &\rightarrow E, \quad s \rightarrow \pm i\mu, \quad P_n^s \rightarrow P_n^{\pm i\mu}(t), \\ P_n^{\pm i\mu}(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 \mp i\mu)} e^{\pm ipx} F\left(-n, n+1; 1 \mp i\mu; \frac{1-t}{2}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Вопрос о прозрачности построенных выше гамильтонианов взаимодействия уравнения Дирака сводится к вопросу о прозрачности потенциалов уравнений Шредингера (29), (30).

Рассмотрим прозрачность потенциалов, соответствующих уравнению Шредингера (29). При $n = 0, 1$ (29) является уравнением Шредингера свободной частицы. При $n = 2$ (29) переходит в уравнение Шредингера с односолитонным потенциалом, прозрачность которого подробно рассмотрена в монографии [7].

Далее, при исследовании прозрачности потенциалов уравнения (29) для $n > 2$ будем следовать подходу, подробно изложенному в работе [7].

При $n > 2$, как и при $n = 2$, потенциалы уравнения Шредингера (29) убывают быстрее, чем $|x|^{-1-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, при $x \rightarrow \pm\infty$.

Одно из решений уравнения (29) при $x \rightarrow \infty$, $\text{th } kx \rightarrow 1$ имеет вид

$$P_n^{i\mu}(t) = \frac{e^{\pm ipx}}{\Gamma(1 \mp i\mu)}. \quad (36)$$

Введем соответствующее решение Йоста:

$$f(x, p) = P_n^{i\mu}(t) \Gamma(1 \mp i\mu). \quad (37)$$

Рассмотрим это решение при $x \rightarrow -\infty$, $\text{th } kx \rightarrow -1$:

$$\begin{aligned} f(x, p) &= F(-n, n+1; 1 \mp i\mu; 1) e^{ipx}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ F(-n, n+1; 1 \mp i\mu; 1) &= \frac{\Gamma(1-i\mu)\Gamma(-i\mu)}{\Gamma(1-i\mu+n)\Gamma(-i\mu-n)} = \\ &= \frac{(-n-i\mu)(-n+1-i\mu)\dots(-1-i\mu)}{(n-i\mu)(n-1-i\mu)\dots(1-i\mu)}, \quad |F| = 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Аналогично доказывается прозрачность потенциалов уравнения (30).

Таким образом, полученные потенциалы уравнения Дирака являются прозрачными.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены цепочки преобразований Дарбу специального вида, генерирующие последовательность форм-инвариантных точно решаемых гамильтонианов одномерного четырехкомпонентного уравнения Дирака. Последние могут быть использованы для исследования свойств движения релятивистских частиц спина $1/2$ в одномерных периодических структурах согласно работам [20]–[22]. В настоящее время проводятся соответствующие исследования, и их результаты вскоре будут опубликованы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем явные выражения для следующих величин:

1) $\lambda_{n,j}^{(i,k)}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1}^{(1,1)} &= \lambda_{n,1}^{(1,2)} = \lambda_{n,1}^{(3,3)} = \lambda_{n,1}^{(3,4)} = -\varepsilon_n, \\ \lambda_{n,1}^{(2,2)} &= \lambda_{n,1}^{(2,1)} = \lambda_{n,1}^{(4,4)} = \lambda_{n,1}^{(4,3)} = \varepsilon_n, \\ \lambda_{n,2}^{(1,1)} &= \lambda_{n,2}^{(2,1)} = \lambda_{n,2}^{(3,3)} = \lambda_{n,2}^{(4,3)} = \varepsilon_{n+1}, \\ \lambda_{n,2}^{(2,2)} &= \lambda_{n,2}^{(1,2)} = \lambda_{n,2}^{(4,4)} = \lambda_{n,2}^{(3,4)} = -\varepsilon_{n+1}; \end{aligned}$$

2) $\mu_{n,j}^{(i,k)}$, $i, k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \mu_{n,1}^{(i,k)} &= \text{ch}^n kx, & \mu_{n,2}^{(i,k)} &= \frac{(2n+1)ik \text{ sh } kx \text{ ch}^n kx}{\lambda_{n,1}^{(i,k)} - \lambda_{n,2}^{(i,k)}}, \\ \mu_{n,3}^{(i,k)} &= \text{ch}^{n+1} kx, & \mu_{n,4}^{(i,k)} &= 0; \end{aligned}$$

3) $\mu_{n,j}^{(i,k)}$, $i, k = 3, 4$,

$$\begin{aligned}\mu_{n,1}^{(i,k)} &= 0, & \mu_{n,2}^{(i,k)} &= \operatorname{ch}^{n+1} kx, \\ \mu_{n,3}^{(i,k)} &= \frac{(2n+1)ik \operatorname{sh} kx \operatorname{ch}^n kx}{\lambda_{n,1}^{(i,k)} - \lambda_{n,2}^{(i,k)}}, & \mu_{n,4}^{(i,k)} &= \operatorname{ch}^n kx.\end{aligned}$$

Благодарности. Автор благодарит А. В. Тарасова за плодотворные обсуждения, В. Г. Багрова за критические замечания, О. О. Воскресенскую и С. Р. Геворкяна за полезные дискуссии. Автор благодарен за гостеприимство Объединенному институту ядерных исследований (г. Дубна, Московская обл.), где была выполнена существенная часть настоящей работы. Работа частично поддержана фондом некоммерческих программ “Династия” и Международным центром фундаментальной физики (Москва).

Список литературы

- [1] G. Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **94** (1882), 1456–1459; [arXiv:physics/9908003](#).
- [2] G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, II, Gauthier-Villars, Paris, 1889.
- [3] M. M. Crum, *Quart. J. Math.*, **6** (1955), 121–127.
- [4] V. B. Matveev, *Lett. Math. Phys.*, **3**:3 (1979), 213–216.
- [5] V. B. Matveev, *Lett. Math. Phys.*, **3**:3 (1979), 217–222.
- [6] М. А. Салль, *ТМФ*, **53**:2 (1982), 227–237.
- [7] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [8] С. Г. Крейн, *ДАН СССР*, **113**:6 (1957), 970–973.
- [9] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep.*, **251**:5–6 (1995), 267–385.
- [10] L. M. Nieto, H. C. Rosu, M. Santander, *Modern Phys. Lett. A*, **14** (1999), 35–41.
- [11] D. Chang, We-Fu Chang, *Chinese J. Phys.*, **33**:5 (1995), 493–504.
- [12] К. Клейн, В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 304–320.
- [13] Е. О. Pozdeeva, *Internat. J. Modern. Phys. A*, **23**:2 (2008), 247–258.
- [14] Е. О. Pozdeeva, *J. Phys. A*, **41**:14 (2008), 145208.
- [15] L. M. Nieto, A. A. Pecheritsin, B. F. Samsonov, *Ann. Physics*, **305**:2 (2003), 151–189.
- [16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [17] G. Pöschl, E. Teller, *Z. Phys.*, **83**:3–4 (1933), 143–151.
- [18] P. Gaillard, V. Matveev, *Wronskian addition formula and its applications*, Preprint, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, MPIM 02-31, 2002.
- [19] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.
- [20] B. F. Samsonov, *European J. Phys.*, **22**:4 (2001), 305–313.
- [21] B. F. Samsonov, A. A. Pecheritsin, E. O. Pozdeeva, M. L. Glasser, *European J. Phys.*, **24**:4 (2003), 435–441.
- [22] V. G. Bagrov, A. A. Pecheritsin, E. O. Pozdeeva, B. F. Samsonov, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **9**:1 (2004), 13–23.