Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Талалаев, Анзац Бете и изомонодромные деформации, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 252–265

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:17:48

© 2009 г.

Д. В. Талалаев*

АНЗАЦ БЕТЕ И ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Изучаются симметрии уравнений Бете системы Годена, возникающие естественным путем под именем преобразований Гекке в рамках геометрического соответствия Ленглендса и под именем преобразований Шлезингера в теории изомонодромных деформаций, в частности в теории трансцендентных функций Пенлеве.

Ключевые слова: система Годена, анзац Бете, изомонодромные преобразования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Годена – один из первых нетривиальных примеров квантовых интегрируемых систем, который демонстрирует глубокую связь проблем математической физики и таких современных фундаментальных математических вопросов, как соответствие Ленглендса. Для $\mathbb{CP}^1$ с отмеченными точками геометрическое соответствие Ленглендса является интерпретацией процедуры квантового разделения переменных для системы Годена. Основная цель этой работы состоит в том, чтобы уточнить соответствие Ленглендса в части построения решения квантовой модели. Мы рассматриваем форму уравнений Бете, которая выражает условие для спектра системы Годена в терминах свойств монодромии некоторого дифференциального оператора с регулярными особенностями (называемого G -опером). Далее мы строим дискретное семейство преобразований, сохраняющих монодромию, известное как семейство преобразований Гекке или Шлезингера. Оказывается, что данные преобразования определяют также действие на рациональных решениях G -опера и, следовательно, на собственных векторах модели Годена. Необходимо отметить, что такие преобразования действуют изменяя старшие веса в представлениях, а также параметры неоднородности модели.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 определяется модель Годена, а также описаны традиционная версия метода анзаца Бете и его формулировка в терминах свойств монодромии определенных дифференциальных уравнений. В разделе 3 вводится матричная форма условия отсутствия монодромии. В разделе 4 исследуются преобразования Шлезингера. Раздел 5 посвящен некоторым связям данной задачи с другими проблемами.

---

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: talalaev@itep.ru

2. АНЗАЦ БЕТЕ В СИСТЕМЕ ГОДЕНА

2.1. Модель Годена. Оператор Лакса данной модели – рациональная функция спектрального параметра с простыми полюсами

$$L(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_i}{z - z_i},$$

вычеты которой $\Phi_i \in \text{Mat}_n \otimes \bigoplus \mathfrak{gl}_n \subset \text{Mat}_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ определяются формулой

$$\Phi_i = \sum_{kl} E_{kl} \otimes e_{kl}^{(i)}, \quad (1)$$

где E_{kl} образуют стандартный базис в Mat_n , а $e_{kl}^{(i)}$ образуют базис в i -й копии алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Эквивалентно можно сказать, что квантовая алгебра в данном случае есть $\mathcal{A} = U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, а коммутационные соотношения на оператор Лакса задаются формулой

$$[L(z) \otimes 1, 1 \otimes L(u)] = [R_{12}(z - u), L(z) \otimes 1 + 1 \otimes L(u)] \in \text{Mat}_n^{\otimes 2} \otimes \mathcal{A}.$$

Определим “квантовый” детерминант матрицы с некоммутативными элементами как полностью симметризованный детерминант

$$\text{“det” } B = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\tau\sigma} B_{\tau(1), \sigma(1)} \cdots B_{\tau(n), \sigma(n)}.$$

Определим квантовую спектральную кривую следующим выражением:

$$\text{“det” } (L(z) - \partial_z) = \sum_{k=0}^n QI_k(z) \partial_z^{n-k}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1 [1]. Коэффициенты $QI_k(z)$ коммутируют,

$$[QI_k(z), QI_m(u)] = 0,$$

и определяют квантование классических гамильтонианов Годена.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичная конструкция использовалась в работе [2] для построения коммутативной подалгебры в $U(\mathfrak{gl}_n)[t]/t^N$, $U(\mathfrak{gl}_n)[t]$ и центра универсальной обертывающей аффинной алгебры на критическом уровне.

2.2. Анзац Бете.

2.2.1. Случай $\mathfrak{sl}_2$. Рассмотрим модель Годена в случае $\mathfrak{sl}_2$. Оператор Лакса выражается формулой

$$L = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_i}{z - z_i},$$

где

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} h_i/2 & e_i \\ f_i & -h_i/2 \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем также конечномерное представление $V_\lambda = \bigotimes V_{\lambda_i}$, которое является тензорным произведением представлений старшего веса для каждой из компонент $U(\mathfrak{sl}_2)$ квантовой алгебры. Вакуумным вектором назовем вектор $|\text{vac}\rangle = \bigotimes_i |0\rangle_i$, где $|0\rangle_i$ – векторы старшего веса, определяемые соотношениями $e_i|0\rangle_i = 0$ и $h_i|0\rangle = \lambda_i|0\rangle$. Квантовый характеристический полином в данном случае задается выражением

$$\begin{aligned} \text{“det”}(L(z) - \partial_z) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} L^2(z) + \partial_z^2, \\ \text{Tr} L^2(z) &= \sum_i \frac{\text{Tr} \Phi_i^2}{(z - z_i)^2} + 2 \sum_{i < j} \frac{\text{Tr}(\Phi_i \Phi_j)}{(z - z_i)(z - z_j)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты при полюсах второго порядка являются центральными элементами

$$\text{Tr} \Phi_i^2 = \frac{h_i^2}{2} + e_i f_i + f_i e_i = c_i^{(2)}$$

и принимают значения $\lambda_i(\lambda_i + 2)/2$ в представлениях V_λ . Таким образом,

$$\text{“det”}(L(z) - \partial_z) = \partial_z^2 - \frac{1}{2} \sum_i \frac{c_i^{(2)}}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z - z_i},$$

где вычеты H_i являются гамильтонианами Годена

$$H_i = \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j / 2 + e_i f_j + e_j f_i}{z_i - z_j}.$$

2.2.2. Вектор Бете. Метод анзаца Бете предполагает, что общий собственный вектор Ω в представлении V_λ

$$H_i \Omega = \chi_\Omega(H_i) \Omega \quad (3)$$

имеет вид

$$\Omega = \prod_{j=1}^M C(\mu_j) |\text{vac}\rangle$$

для некоторых значений параметров μ_j . Данное условие влечет следующую систему алгебраических уравнений на параметры μ_j (система уравнений Бете):

$$-\frac{1}{2} \sum_i \frac{\lambda_i}{\mu_j - z_i} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{\mu_j - \mu_k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Собственные значения в этом случае принимают вид

$$\chi_\Omega(H_i) = -\lambda_i \left(\sum_j \frac{1}{z_i - \mu_j} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{z_i - z_j} \right).$$

2.3. Условие отсутствия монодромии. Пусть

$$\Psi(z) = \prod (z - z_i)^{-\lambda_i/2} \prod (z - \mu_j) \quad (5)$$

является решением уравнения

$$\text{“det”} (L(z) - \partial_z) \Psi(z) = \left(\partial_z^2 - \frac{1}{2} \sum_i \frac{c_i^{(2)}}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z - z_i} \right) \Psi(z) = 0, \quad (6)$$

где предполагается, что H_i – скаляры. Данное условие эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_i} : \quad & -\lambda_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{-\lambda_i/2}{z_i - z_j} + \sum_j \frac{1}{z_i - \mu_j} \right) = H_i, \\ \frac{1}{z - \mu_j} : \quad & -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\lambda_i}{\mu_j - z_i} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{\mu_j - \mu_k} = 0, \end{aligned}$$

которая в точности совпадает с системой уравнений Бете и условием на собственные значения. Отметим, что второе решение уравнения (6) имеет схожее поведение в $z = z_i$, показатели принадлежат $(1/2)\mathbb{Z}$. Монодромия в этом случае принадлежит $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Имеет место также обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2 [3]. *Уравнение*

$$\left(\partial^2 - \frac{1}{4} \sum_i \frac{\lambda_i(\lambda_i + 2)}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{\nu_i}{z - z_i} \right) \Psi(z) = 0, \quad (7)$$

где $\nu_i \in \mathbb{C}$, имеет монодромию ± 1 тогда и только тогда, когда ν_i равны $\chi_\Omega(H_i)$ для некоторого общего собственного вектора Ω для гамильтонианов Годена в представлении V_λ .

3. МАТРИЧНАЯ ФОРМА

3.1. Скалярный и матричный G -оперы. Рассмотрим связность в тривиальном расслоении ранга 2 на проколоте диске вида

$$A(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{z - z_i} \quad (8)$$

с вычетами, удовлетворяющими условиям

$$\text{Tr } A_i = 0, \quad \det A_i = -d_i^2, \quad \sum_i A_i = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим фуксову систему

$$(\partial_z - A(z)) \Psi(z) = 0, \quad (10)$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{aligned}\psi'_1 &= a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2, \\ \psi'_2 &= a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2.\end{aligned}$$

Данная система влечет

$$\psi''_1 = \frac{a'_{12}}{a_{12}} \psi'_1 + u\psi_1,$$

где

$$u = a'_{11} + a_{11}^2 - a_{11} \frac{a'_{12}}{a_{12}} + a_{12}a_{21}.$$

В результате замены переменных $\Phi = \psi_1/\chi$, где $\chi = \sqrt{a_{12}}$, получим уравнение

$$\Phi'' + U\Phi = 0,$$

где

$$U = \frac{\chi''}{\chi} - \frac{a'_{12}}{a_{12}} \frac{\chi'}{\chi} - u. \quad (11)$$

Подставляя выражение для χ в U , получим

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{a'_{12}}{a_{12}} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{a'_{12}}{a_{12}} \right)^2 + a_{11} \frac{a'_{12}}{a_{12}} - a'_{11} - a_{11}^2 - a_{12}a_{21}. \quad (12)$$

Предположим, что $a_{12}(z)$ не имеет кратных корней,

$$a_{12}(z) = c \frac{\prod_{j=1}^{k-2} (z - w_j)}{\prod_{i=1}^k (z - z_i)}.$$

Заметим, что количество нулей согласовано с условием нормировки (9). Таким образом, получим

$$\frac{a'_{12}}{a_{12}} = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{z - w_j} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{z - z_i}. \quad (13)$$

Выражение для потенциала U принимает вид

$$U = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{-3/4}{(z - w_j)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1/4 + \det A_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{w_j}}{z - w_j} + \sum_{i=1}^k \frac{H_{z_i}}{z - z_i}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}H_{w_j} &= a_{11}(w_j) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{w_j - w_i} - \sum_i \frac{1}{w_j - z_i} \right), \\ H_{z_i} &= \left(\frac{1}{2} + a_{11}^i \right) \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - w_j} - \sum_{j \neq i} \frac{\text{Tr}(A_i A_j) + a_{11}^i + a_{11}^j + 1/2}{z_i - z_j}.\end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при $(z - z_i)^{-2}$ принимают следующие значения:

$$\frac{1}{4} + \det A_i = \left(\frac{1}{2} - d_i \right) \left(\frac{1}{2} + d_i \right). \quad (15)$$

В дальнейшем мы будем отождествлять эти коэффициенты со значениями элементов Казимира, т.е. $\lambda_i = 2d_i - 1$.

3.2. Двойственный G -опер. Как было показано выше, матричная форма связности приводит к оператору Штурма–Лиувилля с дополнительными полюсами в точках w_j . Аналогичное рассмотрение второй векторной компоненты решения матричного уравнения Ψ_2 приводит к другому скалярному дифференциальному оператору второго порядка с полюсами в точках z_i и дополнительных точках $\tilde{w}_j$, определяемых формулой

$$a_{21}(z) = \tilde{c} \frac{\prod_{j=1}^{k-2} (z - \tilde{w}_j)}{\prod_{i=1}^k (z - z_i)}.$$

Будем называть соответствующий оператор Штурма–Лиувилля $\partial_z^2 - \tilde{U}$ двойственным G -опером. В данном случае потенциал выражается формулой

$$\tilde{U} = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{-3/4}{(z - \tilde{w}_j)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1/4 + \det A_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{\tilde{w}_j}}{z - \tilde{w}_j} + \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{H}_{z_i}}{z - z_i}. \quad (16)$$

3.3. Решение матричной задачи. Построим обратное отображение, а именно по скалярному G -оперу, имеющему тривиальную монодромию в смысле уравнений Бете, построим связность ранга 2 вида (10), горизонтальное сечение которой также имеет монодромию в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Рассмотрим анзац решения матричного линейного уравнения (10) в виде

$$\psi_l = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{-s_i} \phi_l(z), \quad (17)$$

где

$$\phi_1 = \prod_{j=1}^M (z - \gamma_j), \quad \frac{\phi_2}{\phi_1} = \sum_{j=1}^M \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}. \quad (18)$$

Перепишем систему уравнений (10) с учетом новой параметризации (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial_z \psi_1}{\psi_1} &= a_{11} + \frac{a_{12} \phi_2}{\phi_1}, \\ \frac{\partial_z \psi_1}{\psi_1} \frac{\phi_2}{\phi_1} + \partial_z \frac{\phi_2}{\phi_1} &= a_{21} + \frac{a_{22} \phi_2}{\phi_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Представим эти уравнения в более явной форме:

$$-\sum_i \frac{s_i}{z - z_i} + \sum_j \frac{1}{z - \gamma_j} = \sum_i \frac{a_{11}^i}{z - z_i} + \sum_i \frac{a_{12}^i}{z - z_i} \sum_j \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left(-\sum_i \frac{s_i}{z - z_i} + \sum_j \frac{1}{z - \gamma_j} \right) \sum_j \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j} - \sum_j \frac{\alpha_j}{(z - \gamma_j)^2} &= \\ = \sum_i \frac{a_{21}^i}{z - z_i} - \sum_i \frac{a_{11}^i}{z - z_i} \sum_j \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}. \end{aligned} \quad (21)$$

Найдем условия того, что вычеты обеих частей равенств (20), (21) в точках $z = z_i$ совпадают:

$$-s_i = a_{11}^i + a_{12}^i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}, \quad (22)$$

$$-\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} s_i = a_{21}^i - a_{11}^i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}. \quad (23)$$

Данные уравнения в совокупности с условием равенства нулю следа $a_{11}^i + a_{22}^i = 0$ влекут, что s_i должно являться одним из собственных значений A_i , в частности может быть принято $s_i = d_i$. Рассмотрим поведение в полюсах $z = \gamma_j$. Заметим, что полюсы второго порядка в этих точках в уравнении (21) сокращаются автоматически. Подсчитаем вычеты правой и левой частей уравнений (20) и (21):

$$1 = \alpha_j \sum_i \frac{a_{12}^i}{\gamma_j - z_i}, \quad (24)$$

$$\alpha_j \left(-\sum_i \frac{s_i}{\gamma_j - z_i} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \right) + \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\gamma_j - \gamma_i} = -\alpha_j \sum_i \frac{a_{11}^i}{\gamma_j - z_i}.$$

Напомним, что одним из условий нормировки связности было условие диагональности вычета в бесконечности

$$\sum_{i=1}^k a_{12}^i = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^k a_{21}^i = 0. \quad (26)$$

Заметим, что выбор полюсов оператора Штурма–Лиувилля фиксирует нули рациональной функции $a_{12}(z)$, которая, таким образом, оказывается определена с точностью до константы:

$$a_{12}(z) = c \frac{\prod_{j=1}^{k-2} (z - w_j)}{\prod_{i=1}^k (z - z_i)}.$$

При этом условие (25) будет выполнено автоматически. Коэффициенты a_{12}^i выражаются формулой

$$a_{12}^i = c \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}. \quad (27)$$

Коэффициенты a_{11}^i в силу (22) имеют вид

$$a_{11}^i = -s_i - c \frac{\prod_{j=1} (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} \sum_l \frac{\alpha_l}{z_i - \gamma_l}. \quad (28)$$

Подставим выражения для a_{12}^i и a_{11}^i в уравнения (24), выразим затем α_j из первого уравнения и подставим во второе. В результате получим

$$\frac{\prod_i(\gamma_j - z_i)}{\prod_i(\gamma_j - w_i)} \left(-\sum_k \frac{2s_k}{\gamma_j - z_k} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_k} + \right. \\ \left. + \sum_{k,m} \frac{\prod_l(z_k - w_l) \prod_{s \neq k}(\gamma_m - z_s)}{\prod_{l \neq k}(z_k - z_l) \prod_s(\gamma_m - w_s)(\gamma_j - z_k)} \right) + \sum_{k \neq j} \frac{\prod_i(\gamma_k - z_i)}{\prod_i(\gamma_k - w_i)(\gamma_j - \gamma_k)} = 0.$$

Перейдем к эквивалентной форме, поделив обе части на $\prod_i(\gamma_j - z_i)/\prod_i(\gamma_j - w_i)$:

$$-\sum_k \frac{2s_k}{\gamma_j - z_k} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_k} + \sum_{k,m} \frac{\prod_l(z_k - w_l) \prod_{s \neq k}(\gamma_m - z_s)}{\prod_{l \neq k}(z_k - z_l) \prod_s(\gamma_m - w_s)(\gamma_j - z_k)} + \\ + \sum_{k \neq j} \frac{\prod_i(\gamma_k - z_i)}{\prod_i(\gamma_k - w_i)(\gamma_j - \gamma_k)} \frac{\prod_m(\gamma_j - w_m)}{\prod_m(\gamma_j - z_m)} = 0.$$

Рассмотрим левую часть равенства как рациональную функцию $F(\gamma_j)$ и вычислим ее разложение по примитивным дробям в полюсах z_k , w_k , γ_k и в бесконечности. Оказывается, что это разложение будет иметь вид

$$F(\gamma_j) = -\sum_k \frac{2s_k - 1}{\gamma_j - z_k} - \sum_k \frac{1}{\gamma_j - w_k} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i}. \quad (29)$$

Таким образом, рассматриваемое равенство эквивалентно уравнению из системы уравнений Бете. Продемонстрируем, например, вычисление для вычета в точке $\gamma_j = w_i$:

$$\text{Res}|_{\gamma_j=w_i} F(\gamma_j) = \sum_k \frac{\prod_l(z_k - w_l) \prod_{s \neq k}(w_i - z_s)}{\prod_{l \neq k}(z_k - z_l) \prod_{s \neq i}(w_i - w_s)(w_i - z_k)} = \\ = \frac{\prod_s(w_i - z_s)}{\prod_{s \neq i}(w_i - w_s)} \sum_k \frac{\prod_l(z_k - w_l)}{\prod_{l \neq k}(z_k - z_l)(w_i - z_k)^2}. \quad (30)$$

Заметим, что правая часть (30) может быть представлена в виде

$$(\text{Res}|_{z=w_i} \Phi(z))^{-1} \sum_k \text{Res}|_{z=z_k} \Phi(z),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{\prod_l(z - w_l)}{\prod_l(z - z_l)(z - w_i)^2}.$$

Таким образом, выражение (30) равно -1 .

Теперь условие достаточности выражается в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3. Если набор чисел γ_i , $i = 1, 2, \dots, M$, удовлетворяет системе уравнений Бете со следующими параметрами: набор полюсов $z_1, \dots, z_k$ и $w_1, \dots, w_{k-2}$ со значениями старших весов $2s_1 - 1, \dots, 2s_k - 1$ и $1, \dots, 1$ соответственно, то вектор

$$\Psi = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{-s_i} \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где ϕ_1 и ϕ_2/ϕ_1 определены в (18), а коэффициенты α_j задаются выражениями

$$\alpha_j = \frac{\prod_i (\gamma_j - z_i)}{\prod_i (\gamma_j - w_i)}, \quad (32)$$

является решением матричной линейной задачи (10), где коэффициенты связности определяются выражениями

$$a_{12}^i = \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}, \quad (33)$$

а коэффициенты a_{11}^i и a_{21}^i определяются исходя из (22), (23). При этом выполняются условия нормировки (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо только доказать, что условие нормировки (26) не зависит от выбора параметра c , в частности он может быть принят равным единице. Действительно, исходя из (22), (23) получим

$$a_{21}^i = - \left(2s_i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} + \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} \left(\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} \right)^2 \right). \quad (34)$$

Нам необходимо доказать, что

$$\sum_i 2s_i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} + \sum_i \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} \left(\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} \right)^2 = 0. \quad (35)$$

Первое слагаемое в (35) при использовании уравнений Бете может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_i 2s_i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} &= \sum_j \alpha_j \sum_i \frac{2s_i}{z_i - \gamma_j} = \\ &= \sum_j \alpha_j \left(- \sum_i \frac{1}{\gamma_j - z_i} + \sum_i \frac{1}{\gamma_j - w_i} - 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь упростим второе слагаемое в (35), меняя порядок суммирования:

$$\sum_{m \neq l} \alpha_m \alpha_l \sum_i \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)(z_i - \gamma_m)(z_i - \gamma_l)} + \sum_m (\alpha_m)^2 \sum_i \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)(z_i - \gamma_m)^2}. \quad (37)$$

Рассматривая второе слагаемое в (37), заметим, что

$$\sum_i \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)(z_i - \gamma_m)^2} = -\partial_{\gamma_m} \Phi^1(\gamma_m), \quad (38)$$

где

$$\Phi^1(\gamma_m) = \sum_i \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)(z_i - \gamma_m)} = \frac{\prod_j (\gamma_m - w_j)}{\prod_j (\gamma_m - z_j)}. \quad (39)$$

Следовательно, выражение (38) приобретает вид

$$-\frac{\prod_j(\gamma_m - w_j)}{\prod_j(\gamma_m - z_j)} \left(\sum_s \frac{1}{\gamma_m - w_s} - \sum_s \frac{1}{\gamma_m - z_s} \right) \quad (40)$$

и сокращается с соответствующей частью (36). Рассмотрим первое слагаемое в (37), оно тоже может быть упрощено:

$$\sum_i \frac{\prod_j(z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)(z_i - \gamma_m)(z_i - \gamma_l)} = \frac{\prod_j(\gamma_l - w_j)}{\prod_j(\gamma_l - z_j)(\gamma_m - \gamma_l)} - \frac{\prod_j(\gamma_m - w_j)}{\prod_j(\gamma_m - z_j)(\gamma_m - \gamma_l)}. \quad (41)$$

Подстановка этого выражения в (37) завершает доказательство теоремы.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШЛЕЗИНГЕРА

Существует дискретная группа преобразований, которые сохраняют форму связности (10) и, более того, не меняют класс представления монодромии. Тем не менее эти преобразования сдвигают характеристические экспоненты в особых точках на полуцелые значения специфическим образом. Такие преобразования называются преобразованиями Шлезингера, Гекке или Беклунда в разных контекстах и имеют простую геометрическую интерпретацию.

4.1. Действие на расслоениях. Сначала будем рассматривать действие на голоморфных расслоениях на $\mathbb{CP}^1$. В силу теоремы Биркгофа–Гротендика любое голоморфное расслоение на $\mathbb{CP}^1$ ранга n изоморфно $\mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_n)$ для некоторого набора $(k_1, \dots, k_n)$, который называется типом расслоения и определен с точностью до действия симметрической группы.

Рассмотрим открытое покрытие $\mathbb{CP}^1$, состоящее из U_∞ – диска вокруг ∞ , не содержащего $z = z_i$, $i = 1, \dots, N$, и области $U_0 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$. Мы будем работать с голоморфными расслоениями ранга 2 и параметризовать их функцией переклейки $G(z)$ – голоморфно обратимой функцией в $U_0 \cap U_\infty$ со значениями в $GL(2)$. Будем говорить, что пара $S_\infty(z) \in \mathcal{O}^{(2)}(U_\infty)$ и $S_0(z) \in \mathcal{O}^{(2)}(U_0)$ определяет глобальное сечение, если $S_0(z) = G(z)S_\infty(z)$.

Будем описывать преобразования в терминах изменения функций переклейки. Рассмотрим преобразование, которое задается с помощью умножения функции переклейки слева на

$$G_s(z) = G_s \begin{pmatrix} z - z_s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_s^{-1} \quad (42)$$

для некоторой постоянной матрицы G_s и некоторой точки $z_s \in U_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Действие на функциях переклейки может быть приведено к действию на классах изоморфизмов расслоений, если сделать выбор постоянных матриц G_s зависящим от тривиализации следующим образом: при изменении тривиализации в U_0 на $T(z)$ необходимо заменить матрицу G_s на $T(z_s)G_s$. Это соображение очевидно ввиду замечания 3 (см. ниже) об инвариантном определении.

Мы будем исследовать композицию таких преобразований в двух точках.

ЛЕММА. Композиция двух преобразований, которая задается выражением $G_i(z)G_j^{-1}(z)$ для общего выбора постоянных матриц G_i, G_j , сохраняет тривиальное расслоение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства требуется осуществить разложение $G(z) = G_i(z)G_j^{-1}(z) = G_{ij}(z)G_\infty(z)$, где $G_{ij}(z), G_\infty(z)$ обратимы соответственно в U_0, U_∞ . Наводящим соображением для доказательства является подсчет размерности пространства когомологий в семействах в общей точке. Действительно, для частного выбора $G_i^{-1}G_j = 1$ получаем тривиальное расслоение, которое полустабильно и, следовательно, минимизирует размерность $H^0(\text{End}(V))$ для V степени 0. В этой связи можно считать, что тривиальное расслоение является общим в семействе расслоений для разных G .

Несмотря на предложенный общий аргумент, здесь приводится явное доказательство в духе леммы о разложении в работе [4]. Введем следующее обозначение:

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ y_i & 1 \end{pmatrix}.$$

Разложим произведение

$$G(z) = G_i \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_i^{-1} G_j \begin{pmatrix} (z-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_j^{-1} \quad (43)$$

в произведение другого типа:

$$G(z) = G_{ij}(z)G_\infty(z),$$

где $G_{ij}(z), G_\infty(z)$ – голоморфно обратимые функции на U_0, U_∞ соответственно. Традиционные вычисления позволяют строить разложение в виде

$$G_\infty(z) = \begin{pmatrix} \frac{z(1-x_j y_i)(1-x_j y_j) - x_j(y_i - 2y_j - x_j y_i y_j)}{(1-2x_j y_i + x_j y_j)(1-x_j y_i)(1-x_j y_j)(z-1)} & -\frac{x_j}{(1-x_j y_i)(1-x_j y_j)(z-1)} \\ \frac{y_i - 2y_j + x_j y_i y_j}{(1-x_j y_i)(1-2x_j y_i + x_j y_j)} & \frac{1}{1-x_j y_i} \end{pmatrix}.$$

4.2. Действие преобразований на связностях. Определим действие группы преобразований Шлезингера T_{ij} на пространстве связностей с особенностями в точках $z = z_i$. Как было сказано выше, действие определено с помощью процедуры изменения функций переклейки. Рассмотрим тривиальное расслоение, заданное единичной функцией переклейки. Преобразование Шлезингера меняет структуру расслоения, глобальные сечения определяются парами S_0, S_∞ такими, что $S_0 = GS_\infty$, где $G = G_{ij}G_\infty$. Можно определить действие на связностях следующим образом: пусть $\partial_z - A$ – связность в тривиальном расслоении, определяемая данным выражением над обоими рассматриваемыми открытыми множествами, преобразование связности определяется как пара форм связности:

$$\begin{array}{lll} \partial_z - A & \text{над} & U_\infty, \\ G(\partial_z - A)G^{-1} & \text{над} & U_0. \end{array}$$

После замены базиса в U_∞ вида $\widetilde{S}_\infty = G_\infty S_\infty$ получим выражение для связности

$$\partial_z - A \rightarrow G_\infty(\partial_z - A)G_\infty^{-1}. \quad (44)$$

При замене тривиализации в U_0 типа $\widetilde{S}_0 = G_{ij}^{-1} S_0$ получим

$$G(\partial_z - A)G^{-1} \rightarrow G_{ij}^{-1} G(\partial_z - A)G^{-1} G_{ij} = G_\infty(\partial_z - A)G_\infty^{-1}. \quad (45)$$

Таким образом, связность, полученная после преобразования, может быть представлена в виде глобальной рациональной связности того же типа, как связность до преобразования. Сохранение поведения на бесконечности обеспечивается тем, что функция G_∞ голоморфно обратима в U_∞ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Определение действия перестроек Гекке, данное выше, соответствует инвариантной конструкции: преобразование Гекке на языке пучков состоит в операции перехода к подпучку, задаваемому линейным условием на значение сечения в фиксированной точке. Для того чтобы определить преобразование Гекке на пространстве связностей с особенностями в фиксированных точках, линейное условие должно быть двойственным к одному из собственных направлений вычета связности в данной точке.

Используя результаты предыдущих разделов, определим действие преобразований Шлезингера на связностях. Для сохранения условия нормировки $A(z)$ на бесконечности необходимо рассматривать преобразования вида

$$\begin{aligned} \tilde{G}(z) &= G_\infty^{-1}(\infty) G_\infty(z) = \\ &= \frac{1}{z-1} \left[z - \begin{pmatrix} \frac{x_1(y_0-2y_1+x_1y_0y_1)}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} & \frac{x_1(1-2x_1y_0+x_1y_1)}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} \\ \frac{y_0-2y_1+x_1y_0y_1}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} & \frac{1-2x_1y_0+x_1y_1}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Полное семейство преобразований Шлезингера для случая трех точек, связанного с анализом уравнения Пенлеве VI, было вычислено в работе [5].

4.3. Действие на векторах Бете. Введем обозначения $Z = \{z_i\}$, $W = \{w_j\}$, $\Lambda = \{\lambda_i\}$. Введем также символические обозначения для объектов, возникающих в наших предыдущих рассмотрениях:

1) $OS(Z, W, \Lambda)$ обозначает решение системы уравнений Бете, т.е. набор μ_i , являющийся решением системы (4) для фиксированных отмеченных точек (полюсов оператора Лакса) $z_1, \dots, z_k$ и $w_1, \dots, w_{k-2}$ и соответствующих старших весов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и $1, \dots, 1$;

2) $OL(Z, W, \Lambda)$ обозначает решение вида (5) линейной вспомогательной задачи (6) с заданными значениями параметров;

3) $ML(Z, W, \Lambda)$ обозначает решение типа (17) матричной вспомогательной линейной задачи (10) с заданными значениями параметров, оно имеет две компоненты $ML(Z, W, \Lambda)_{1,2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Выбор старших весов равными единице в подвижных особенностях w_i является не обязательным, но в некотором смысле общим. Можно рассмотреть потенциал вида

$$U = \sum_{j=1}^m \frac{(-1/4)(\eta_j + 2)\eta_j}{(z - w_j)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1/4 + \det A_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{w_j}}{z - w_j} + \sum_{i=1}^k \frac{H_{z_i}}{z - z_i} \quad (47)$$

с более высокими значениями старших весов. Он может быть реализован, если потребовать, чтобы коэффициент $a_{12}(z)$ имел нули w_j с кратностями η_j , удовлетворяющими условию $\sum_{j=1}^m \eta_j = k - 2$.

Результаты предыдущих вычислений могут быть сведены к следующему: для любого решения системы уравнений Бете $OS(Z, W, \Lambda)$ рассмотрим решение $ML(Z, W, \Lambda)$, существующее в силу теоремы 3. Тогда можно определить семейство преобразований.

А. Двойственное решение. Символически такое преобразование задается следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} OS(Z, W, \Lambda) & & & & & & OS(Z, \widetilde{W}, \Lambda) \\ \downarrow & & & & & & \uparrow \\ OL(Z, W, \Lambda) & \rightarrow & ML_1(Z, W, \Lambda) & \rightarrow & ML_2(Z, W, \Lambda) & \rightarrow & OL(Z, \widetilde{W}, \Lambda) \end{array}$$

Б. Преобразования Шлезингера. Используя введенные выше обозначения, имеем

$$\begin{array}{ccccccc} OS(Z, W, \Lambda) & & & & & & OS(Z, \widetilde{W}, \tilde{\Lambda}) \\ \downarrow & & & & & & \uparrow \\ OL(Z, W, \Lambda) & \rightarrow & ML(Z, W, \Lambda) & \rightarrow & ML(Z, \widetilde{W}, \tilde{\Lambda}) & \rightarrow & OL(Z, \widetilde{W}, \tilde{\Lambda}) \end{array}$$

В зависимости от выбора подрасслоения при действии повышающих и понижающих операторов Шлезингера значения старших весов преобразуются под действием T_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\mapsto (\dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_j - 1, \dots), \\ (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\mapsto (\dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots), \\ (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\mapsto (\dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j - 1, \dots), \\ (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\mapsto (\dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots). \end{aligned}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

5.1. Уравнения Пенлеве. Использованная в данной работе идея рассмотрения дискретных преобразований, сохраняющих условие “минимальности” монодромии, лежит в основе теории изомонодромных преобразований. Эта группа преобразований действует на пространстве решений уравнения Пенлеве VI, реализованного как изомонодромный поток для фуксовой системы (10) (указания могут быть найдены, например, в работе [6]), где

$$A(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_t}{z-t}.$$

Можно ожидать, что задача описания непрерывных деформаций спектра квантовой системы Годена по отношению к параметрам модели – координатам отмеченных точек – эквивалентна системе уравнений Шлезингера, т.е. для некоторого частного случая модели – в точности уравнению Пенлеве VI. Это не очевидно априори, так как в изомонодромной формулировке уравнений Бете для системы Годена возникает существенно резонансный случай фуксовой системы.

5.2. Соответствие Ленглендса. Квантовая система Годена играет ключевую роль в геометрическом соответствии Ленглендса [7], [2]. А именно, соответствие устанавливает отношение

D -module Годена–Хитчина $\Leftrightarrow$ плоская связность (G -опер).

Более того, в случае числового поля имеется уточнение, состоящее в равенстве соответствующих L -функций. В случае функционального поля над $\mathbb{C}$ отсутствуют естественное понятие автоморфизма Фробениуса и, как следствие, L -функции на стороне соответствия Ленглендса, связанной с представлениями группы Галуа. Можно предположить, что симметрия системы, рассмотренная в этой работе, имеет отношение именно к галуа-стороне соответствия.

Недавно в работах [8] было обнаружено другое проявление арифметических L -функций в квантовых интегрируемых системах, а именно в теории квантовой аффинной цепочки Тоды.

Благодарности. Частично работа была выполнена во время пребывания автора в LPТНЕ, автор благодарен за стимулирующую атмосферу. Доказательство теоремы 3 было получено во время пребывания автора в LAREMA. Работа частично поддержана Федеральным агентством по ядерной энергии РФ, а также РФФИ (грант № 07-02-00645), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2) и фондом Династия. Автор благодарен О. Бабелону, А. Городенцеву, И. Кричеверу, В. Рубцову и Б. Фейгину за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Д. В. Талалаев, *Функц. анализ и его прил.*, **40:1** (2006), 86–91; *Quantization of the Gaudin system*, [arXiv: hep-th/0404153](#).
- [2] A. Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, [arXiv: hep-th/0604128](#).
- [3] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *The B. and M. Shapiro conjecture in real algebraic geometry and the Bethe ansatz*, [arXiv: math.AG/0512299](#).
- [4] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000.
- [5] U. Muğan, A. Sakka, *J. Math. Phys.*, **36:3** (1995), 1284–1298.
- [6] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Aspects Math., **E16**, Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [7] E. Frenkel, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **41:2** (2004), 151–184; [arXiv: math.AG/0303074](#).
- [8] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin, *Comm. Math. Phys.*, **284:3** (2008), 867–896; [arXiv: 0706.3476](#); *On Baxter Q-operators and their arithmetic implications*, [arXiv: 0711.2812](#).