Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Йылмаз, Алгебраическое интегрирование полевых уравнений сигма-модели, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 266–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:34:23

© 2009 г.

Н. Т. Йылмаз*

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Доказано, что дуализованная алгебра сигма-модели с симметрическим косет-пространством является алгеброй Ли. Показано, что она порождает подходящее присоединенное представление, которое позволяет локально интегрировать полевые уравнения, в результате чего получаются уравнения первого порядка.

Ключевые слова: сигма-модели, формулировки первого порядка, дуализованная алгебра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Полевой состав сигма-модели с симметрическим косет-пространством дается скалярными полями, которые параметризуют таргет-многообразие, являющееся однородным римановым глобально симметричным пространством. Удваивая состав полей за счет введения дуальных полей высших порядков, можно реализовать теорию с помощью конструкции расширенного косета. Происхождение этого метода связано с дуализацией теорий супергравитации [1], [2], скалярные секторы которой соответствуют упомянутым типам сигма-моделей. Наиболее важным элементом расширенной реализации этой теории является конструкция дуализованной косетной параметризующей алгебры, которая в случае чистой сигма-модели является деформацией исходной косет-алгебры. Хотя геометрическая конструкция этой расширенной формулировки пока еще не очень хорошо известна, дуализованная алгебра для общей косетной сигма-модели с симметрическим таргет-пространством найдена в работах [3], [4]. В этих работах в рамках метода дуализации также получены полевые уравнения первого порядка как условия согласованности вложения. Однако ни одна из цитированных работ не дает прямой алгебраической связи этих уравнений первого порядка с уравнениями второго порядка, которые возникают из принципа наименьшего действия.

В настоящей работе мы дадим строгое доказательство того, что полученная в работах [3], [4] дуализованная косет-алгебра действительно является алгеброй Ли. Наше доказательство главным образом будет заключаться в том, чтобы показать,

*Department of Mathematics and Computer Science, Çankaya University, Ankara, Turkey.
E-mail: ntyilmaz@cankaya.edu.tr

что в наиболее общих терминах (для произвольной сигма-модели) коммутационные соотношения дуализованной алгебры, которая возникает как деформация обычной косет-алгебры, удовлетворяют тождествам Якоби. Следуя этому, мы также обсудим, что дуализованная косет-алгебра, являясь алгеброй Ли, допускает естественное присоединенное представление исходной косет-алгебры, которая является ее подалгеброй Ли. Наконец, мы покажем, что, предполагая это естественное присоединенное представление, порожденное дуализованной алгеброй, можно локально алгебраически связать уравнения первого порядка, полученные в работах [3], [4], с полевыми уравнениями второго порядка. А именно, исходя из анзаца уравнения первого порядка и применяя внешнюю производную, мы покажем, что возникают полевые уравнения второго порядка в специальном представлении, порожденном дуализованной косет-алгеброй.

В разделе 2, который носит достаточно формальный характер, исследуются все возможные условия в дуализованной косет-алгебре общего вида и таким образом дается полное доказательство структуры ее алгебры Ли для произвольной косетной сигма-модели. В разделе 3 обсуждается естественное присоединенное представление исходной косет-алгебры, предложенное в рамках данной схемы. В разделе 4 доказано, что уравнения первого порядка из работ [3], [4] действительно являются истинными локальными уравнениями, которые можно получить из полевых уравнений второго порядка путем локального устранения внешней производной, когда выбрано указанное специальное представление.

2. ДУАЛИЗОВАННАЯ КОСЕТ-АЛГЕБРА

Дуализованная косет-алгебра сигма-модели с общим симметрическим пространством найдена в работах [3], [4]. Она порождена набором генераторов

$$\{H_i, E_\alpha, \tilde{H}_i, \tilde{E}_\alpha\}, \quad (2.1)$$

где первые два набора генераторов соответствуют подмножеству базиса Картана–Вейля группы глобальных симметрий лагранжиана сигма-модели, который порождает разрешимую подалгебру Ли s . Здесь при $i = 1, 2, \dots, r$ генераторы H_i образуют подмножество картановских генераторов алгебры Ли группы глобальных симметрий сигма-модели, а E_α порождают корневое подпространство Δ_{nc}^+ некомпактных положительных корней [3], [4]. Последние два набора генераторов (2.1) дуальны предыдущим. Коммутационные соотношения дуализованной косет-алгебры, порожденной генераторами (2.1), можно записать как

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= [H_i, \tilde{H}_j] = [E_\alpha, \tilde{H}_j] = [\tilde{E}_\alpha, \tilde{H}_j] = [\tilde{H}_i, \tilde{H}_j] = [\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta] = 0, \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha, \quad [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \in \Delta, \\ 0, & \alpha + \beta \notin \Delta, \end{cases} \\ [E_\alpha, \tilde{E}_\alpha] &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \alpha_j \tilde{H}_j, \quad [H_j, \tilde{E}_\alpha] = -\alpha_j \tilde{E}_\alpha, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$[E_\alpha, \tilde{E}_\beta] = \begin{cases} 0, & \alpha - \beta \notin \Delta \text{ или } \alpha - \beta \in \Delta, \text{ но } \beta - \alpha \notin \Delta_{\text{nc}}^+, \\ N_{\alpha, -\beta} \tilde{E}_\gamma, & \alpha - \beta \in \Delta, \quad \beta - \alpha \in \Delta_{\text{nc}}^+ \text{ и } \alpha - \beta = -\gamma, \end{cases}$$

где Δ соответствует корням алгебры Ли группы глобальных симметрий сигма-модели, α_i – компоненты корневого вектора, а вещественные коэффициенты $N_{\alpha\beta}$ являются структурными константами, соответствующими коммутационным соотношениям корневых подпространств генераторов E_α . Следует заметить, что если α и β являются некомпактными положительными корнями и $\alpha + \beta \in \Delta$, то $\alpha + \beta$ – также некомпактный положительный корень. Действительно, если это не так, то

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} \notin s, \quad (2.3)$$

что противоречит замыканию разрешимой подалгебры Ли. Введем обозначения

$$\{T_m\} \equiv \{H_i, E_\alpha\}, \quad \tilde{T}_m \equiv \{\tilde{H}_i, \tilde{E}_\alpha\}, \quad (2.4)$$

так что область определения индекса m расщепляется на два множества:

$$m = \overbrace{1, \dots, r}^{i, j, k, \dots}, \underbrace{r+1, r+2, \dots, \dim s}_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} T_1 &= H_1, & T_2 &= H_2, & \dots, & T_r &= H_r, \\ \tilde{T}_1 &= \tilde{H}_1, & \tilde{T}_2 &= \tilde{H}_2, & \dots, & \tilde{T}_r &= \tilde{H}_r, \\ T_{r+1} &= E_\alpha, & T_{r+2} &= E_\beta, & \dots, & & \\ \tilde{T}_{r+1} &= \tilde{E}_\alpha, & \tilde{T}_{r+2} &= \tilde{E}_\beta, & \dots, & & \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коммутационные соотношения (2.2) компактнее можно записать в виде

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, & [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha, & [E_\alpha, E_\beta] &= \begin{cases} 0, & \alpha + \beta \notin \Delta, \\ N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \in \Delta, \end{cases} \\ [\tilde{T}_m, \tilde{T}_n] &= 0, & [E_\gamma, \tilde{T}_m] &= \tilde{f}_{\gamma m}^n \tilde{T}_n, & [H_j, \tilde{T}_m] &= \tilde{g}_{jm}^n \tilde{T}_n, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где матрицы структурных констант $\tilde{f}_\gamma$ и $\tilde{g}_j$ в расщепленном виде можно представить как

$$\tilde{f}_\gamma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots & & & \\ \hline & & \gamma_1/4 & & \\ & & \gamma_2/4 & & \\ & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \\ & & \gamma_r/4 & & \\ \hline & \mathbf{0} & & R_\gamma & \end{array} \right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{matrix}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{g}_j = - \left(\begin{array}{c|ccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{matrix}, \quad (2.8)$$

где матрица R_γ в правом нижнем блоке (2.7) определена как

$$(R_\gamma)^\tau_\kappa = \begin{cases} N_{\gamma, -\kappa}, & \kappa - \tau = \gamma, \\ 0, & \kappa - \tau \neq \gamma, \end{cases} \quad \tau, \kappa = \alpha, \beta, \dots \quad (2.9)$$

Заметим, что выражения типа $\kappa - \tau = \gamma$ здесь и далее следует понимать как равенства для корневых векторов.

Сформулируем некоторые свойства матрицы R_γ .

1. Если для фиксированного столбца κ выполнено $\gamma - \kappa \notin \Delta$ или $\gamma - \kappa \in \Delta$, но $\gamma - \kappa \neq -\tau$ для любой строки τ , то κ — нулевой столбец (все его элементы равны нулю).

2. Если для фиксированного столбца κ выполнено $\gamma - \kappa \in \Delta$, то для строк τ и τ' , определяемых из $\gamma - \kappa = -\tau$ и $\gamma - \kappa = -\tau'$, должно быть выполнено $\tau = \tau'$. Другими словами, если столбец κ ненулевой, то в нем имеется только один ненулевой элемент $N_{\gamma, -\kappa}$.

3. Если для фиксированной строки τ не существует такого столбца κ , что $\gamma - \kappa = -\tau$, то строка τ нулевая (все ее элементы равны нулю). Другими словами, если $\gamma + \tau \notin \Delta$, то не существует такого κ , что $\gamma - \kappa = -\tau$, и строка τ является нулевой. Однако если $\gamma + \tau \in \Delta$, то из нашего предыдущего обсуждения следует, что $\gamma + \tau \in \Delta_{\text{nc}}^+$, т.е. существует такой столбец κ , что $\gamma - \kappa = -\tau$, и строка τ имеет ненулевой элемент.

4. Для фиксированной строки τ и для таких столбцов κ и κ' , что $\gamma - \kappa = -\tau$ и $\gamma - \kappa' = -\tau$, должно быть выполнено $\kappa = \kappa'$, другими словами, если строка τ ненулевая, то в ней имеется только один ненулевой элемент $N_{\gamma, -\kappa}$.

5. Следует отметить, что п. 1 и 3 непротиворечивы, т.е. если $\gamma - \kappa \neq -\tau$, то это же верно как для столбцов, так и для строк.

6. Для диагональных элементов $\tau = \kappa$ из условия $\gamma - \kappa = -\tau$ вытекает, что $\gamma = \kappa - \tau = 0 \notin \Delta$. Поскольку $\gamma \in \Delta$, условие $\gamma - \kappa = -\tau$ не может быть выполнено для диагональных элементов, поэтому все диагональные элементы должны равняться нулю.

7. Для n столбцов, когда κ пробегает Δ_{nc}^+ , если $\gamma - \kappa \notin \Delta$ или $\gamma - \kappa \in \Delta$, но $\gamma - \kappa \neq -\tau$ для любого $\tau \in \Delta_{\text{nc}}^+$, то имеются n нулевых столбцов. Поскольку в каждой строке и каждом столбце имеется по крайней мере один ненулевой элемент, должны существовать $\dim \Delta_{\text{nc}}^+ - n$ ненулевых элементов в $\dim \Delta_{\text{nc}}^+ - n$ различных столбцах и строках. Это означает, что имеются также n нулевых строк.

8. Если $\gamma + \tau \notin \Delta$ для n строк, а τ при этом пробегает Δ_{nc}^+ , то имеются n нулевых строк. Рассуждая, как в п. 7, получаем n нулевых столбцов. Поскольку верное для строк верно также для столбцов, п. 7 и 8 также непротиворечивы.

В итоге все диагональные элементы матрицы R_γ равны нулю, каждая строка и каждый столбец содержит не более одного ненулевого элемента, причем число нулевых строк равно числу нулевых столбцов.

Хотя в работах [3] и [4] в результате стандартного метода дуализации выведены структурные константы алгебры (2.2), ни в одной из этих работ не доказано, что определяемая в (2.2) алгебра, которую можно назвать дуализирующей деформацией косет-алгебры¹⁾ рассматриваемой сигма-модели, образует алгебру Ли. Поэтому в этом разделе мы докажем, что алгебра, определенная в (2.2), действительно является алгеброй Ли. В общем случае m -мерная алгебра Ли порождается m генераторами X_a , для которых

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c, \quad C_{ab}^c = -C_{ba}^c, \quad [X_a, X_a] = 0. \quad (2.10)$$

Генераторы должны также удовлетворять тождеству Якоби

$$[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы показать, что генераторы (2.1), структурные константы которых определены в (2.2), удовлетворяют тождеству Якоби (2.11). Во-первых, если выбрать $X_a = T_m$, $X_b = T_n$, $X_c = T_l$, тождество (2.11) выполняется непосредственно, поскольку базис $\{T_m\}$ порождает алгебру Ли, которая является разрешимой подалгеброй Ли в алгебре Ли группы глобальных симметрий лагранжиана сигма-модели [3], [4].

Во-вторых, если выбрать $X_a = \tilde{T}_m$, $X_b = \tilde{T}_n$, $X_c = \tilde{T}_l$, то из (2.6) получаем

$$[\tilde{T}_m, 0] + [\tilde{T}_n, 0] + [\tilde{T}_l, 0] = 0, \quad (2.12)$$

что также выполнено. Если положить $X_a = T_l$, $X_b = \tilde{T}_m$, $X_c = \tilde{T}_n$, то снова из (2.6) имеем

$$[T_l, 0] - U_{ln}^t [\tilde{T}_m, \tilde{T}_t] + U_{lm}^t [\tilde{T}_n, \tilde{T}_t] = 0, \quad (2.13)$$

что выполняется в силу коммутации дуальных генераторов. Согласно последнему равенству имеем

$$[T_l, \tilde{T}_m] = U_{lm}^t \tilde{T}_t, \quad (2.14)$$

где структурные константы U_{lm}^t определяются из (2.6).

Наконец, рассмотрим $X_a = T_l$, $X_b = T_n$, $X_c = \tilde{T}_m$. В этом случае из (2.11) после некоторых преобразований находим

$$Z_{ln}^t U_{tm}^s = (U_l U_n - U_n U_l)^s_m, \quad (2.15)$$

где мы положили

$$[T_l, T_n] = Z_{ln}^t T_t \quad (2.16)$$

и ввели матрицу структурных констант $(U_l)^s_m = U_{lm}^s$.

¹⁾Эта косет-алгебра является разрешимой подалгеброй Ли группы глобальных симметрий сигма-модели.

Теперь докажем, что (2.15) выполнено в трех различных случаях:

- 1) $T_l = H_j$, $T_n = H_k$;
- 2) $T_l = H_j$, $T_n = E_\gamma$;
- 3) $T_l = E_\gamma$, $T_n = E_\lambda$.

В первом случае $[H_j, H_k] = 0$ и, таким образом, левая часть (2.15) обращается в нуль. В силу (2.14) и (2.6) правая часть (2.15) принимает вид

$$(\tilde{g}_j \tilde{g}_k - \tilde{g}_k \tilde{g}_j)^s_m. \quad (2.17)$$

Однако из (2.8) имеем

$$\tilde{g}_j \tilde{g}_k = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1, 2, \dots, r & \alpha, & \beta, & \dots \\ \hline & \mathbf{0} & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & \mathbf{0} & \alpha_j \alpha_k & \dots & \mathbf{0} \\ & & & \beta_j \beta_k & \\ & & \mathbf{0} & & \ddots \end{array} \right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{array}, \quad (2.18)$$

аналогично для $\tilde{g}_k \tilde{g}_j$. Таким образом, подставляя (2.18) в (2.17), видим, что правая часть (2.15) также обращается в нуль. Для второго случая соотношение (2.15) принимает вид

$$Z^t_{j\gamma} U^s_{tm} = (U_j U_\gamma - U_\gamma U_j)^s_m. \quad (2.19)$$

Преобразуем (2.20) с учетом отождествлений

$$\begin{aligned} Z^i_{j\gamma} &= 0, & Z^\beta_{j\gamma} &= 0, & \text{если } \beta &\neq \gamma, \\ Z^\gamma_{j\gamma} &= \gamma_j, & U_j &= \tilde{g}_j, & U_\gamma &= \tilde{f}_\gamma. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Тогда доказываемое матричное равенство принимает вид

$$\gamma_j \tilde{f}_\gamma = \tilde{g}_j \tilde{f}_\gamma - \tilde{f}_\gamma \tilde{g}_j. \quad (2.21)$$

Левая часть данного равенства равна

$$\gamma_j \tilde{f}_\gamma = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots \\ \hline & \mathbf{0} & \gamma_1 \gamma_j / 4 & & \\ & & \gamma_2 \gamma_j / 4 & & \\ & & \vdots & & \\ & & \gamma_r \gamma_j / 4 & & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \gamma_j R_\gamma \end{array} \right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{array}, \quad (2.22)$$

где $\gamma_j R_\gamma$ – произведение скаляра γ_j на матрицу R_γ , заданную в (2.9).

Для вычисления правой части (2.21) из (2.7) и (2.8) сначала находим

$$\tilde{g}_j \tilde{f}_\gamma = - \left(\begin{array}{c|c} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R_{\gamma j} \end{array} \right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{matrix}, \quad (2.23)$$

$$\tilde{f}_\gamma \tilde{g}_j = \left(\begin{array}{c|c} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} -\gamma_1 \gamma_j / 4 \\ -\gamma_2 \gamma_j / 4 \\ \vdots \\ -\gamma_r \gamma_j / 4 \end{matrix} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R'_{\gamma j} \end{array} \right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{matrix}, \quad (2.24)$$

где введены матрицы

$$(R_{\gamma j})^\tau_{\kappa} = \begin{cases} -\tau_j N_{\gamma, -\kappa}, & \kappa - \tau = \gamma, \\ 0, & \kappa - \tau \neq \gamma, \end{cases} \quad \tau, \kappa = \alpha, \beta, \dots, \quad (2.25)$$

$$(R'_{\gamma j})^\tau_{\kappa} = \begin{cases} -\kappa_j N_{\gamma, -\kappa}, & \kappa - \tau = \gamma, \\ 0, & \kappa - \tau \neq \gamma, \end{cases} \quad \tau, \kappa = \alpha, \beta, \dots \quad (2.26)$$

(еще раз напомним, что равенство $\kappa - \tau = \gamma$ следует понимать как равенство корневых векторов; подчеркнем, что τ_j и κ_j являются компонентами этих векторов). Матрица R_γ определена в (2.9). Очевидно, что ненулевые элементы матриц $R_{\gamma j}$ и $R'_{\gamma j}$ находятся в строках и столбцах с теми же номерами, что у ненулевых элементов матрицы $\gamma_j R_\gamma$. Поэтому правая часть (2.21) принимает вид

$$\tilde{g}_j \tilde{f}_\gamma - \tilde{f}_\gamma \tilde{g}_j = \left(\begin{array}{c|c} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} \gamma_1 \gamma_j / 4 \\ \gamma_2 \gamma_j / 4 \\ \vdots \\ \gamma_r \gamma_j / 4 \end{matrix} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R_{\gamma j} - R'_{\gamma j} \end{array} \right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{matrix}. \quad (2.27)$$

С одной стороны, при сравнении (2.22) и (2.27) видно, что три блока, кроме одного (в нижнем правом углу), равны друг другу. С другой стороны, поскольку ненулевые элементы матриц $\gamma_j R_\gamma$, $R_{\gamma j}$ и $R'_{\gamma j}$ находятся в идентичных местах, нам надо показать, что эти элементы в правом нижнем блоке в левой части и в правой части формулы (2.21) равны. В матрице $R_{\gamma j} - R'_{\gamma j}$ ненулевые элементы в строке τ и столбце κ имеют вид

$$-N_{\gamma, -\kappa} \tau_j + N_{\gamma, -\kappa} \kappa_j = N_{\gamma, -\kappa} (\kappa_j - \tau_j). \quad (2.28)$$

Однако из (2.9) следует, что ненулевой элемент существует тогда и только тогда, когда $\gamma - \kappa = -\tau$. Это корневое условие верно также для компонент корневого вектора, т.е. $\kappa_j - \tau_j = \gamma_j$. Таким образом, в матрице $R_{\gamma j} - R'_{\gamma j}$ ненулевые элементы в строке τ и столбце κ принимают вид $N_{\gamma, -\kappa} \gamma_j$ и совпадают с ненулевыми элементами в правом нижнем блоке матрицы (2.22), стоящей в левой части (2.21).

Наконец, в третьем случае ($T_l = E_\gamma$ и $T_n = E_\lambda$) из (2.15) получаем матричное равенство

$$N_{\gamma\lambda} \tilde{f}_{\gamma+\lambda} = \tilde{f}_\gamma \tilde{f}_\lambda - \tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\gamma. \quad (2.29)$$

Чтобы получить это равенство, мы положили

$$Z^i_{\gamma\lambda} = 0, \quad Z^\beta_{\gamma\lambda} = 0, \quad \text{если } \gamma + \lambda \neq \beta, \quad Z^{\gamma+\lambda}_{\gamma\lambda} = N_{\gamma\lambda}, \quad U_\gamma = \tilde{f}_\gamma. \quad (2.30)$$

Следует отметить, что если $\gamma + \lambda$ не является корнем, то левая часть равенства (2.29) равна нулю. Если эта сумма является корнем, то, как мы видели выше, она должна лежать в Δ_{nc}^+ , и в этом случае левая часть (2.29) принимает вид

$$N_{\gamma\lambda} \tilde{f}_{\gamma+\lambda} = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma + \lambda, \dots \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{matrix} N_{\gamma\lambda}(\gamma_1 + \lambda_1)/4 \\ N_{\gamma\lambda}(\gamma_2 + \lambda_2)/4 \\ \vdots \\ N_{\gamma\lambda}(\gamma_r + \lambda_r)/4 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \mathbf{0} & N_{\gamma\lambda} R_{\gamma+\lambda} \end{pmatrix} & \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

где матрица $R_{\gamma+\lambda}$ (которая в правом нижнем блоке умножена на структурную константу $N_{\gamma\lambda}$) определена как

$$(R_{\gamma+\lambda})^\tau_\kappa = \begin{cases} N_{\gamma+\lambda, -\kappa}, & \kappa - \tau = \gamma + \lambda, \\ 0, & \kappa - \tau \neq \gamma + \lambda, \end{cases} \quad \tau, \kappa = \alpha, \beta, \dots \quad (2.32)$$

Теперь после матричного умножения с учетом (2.7) получаем

$$\tilde{f}_\gamma \tilde{f}_\lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma + \lambda, \dots & & \\ \hline & \gamma_1 N_{\lambda, -\theta}/4 & & \\ & \gamma_2 N_{\lambda, -\theta}/4 & & \\ & \vdots & & \\ & \gamma_r N_{\lambda, -\theta}/4 & & \\ \hline & & R_{\gamma\lambda} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

где $\theta = \gamma + \lambda$. Если $\gamma + \lambda$ не является корнем, то верхний правый блок в (2.33) равен нулю, поскольку в этом случае не будет столбца θ в R_λ , который удовлетворял бы условию $\theta = \gamma + \lambda$, так что строка γ из R_λ будет нулевой. В (2.33) мы имеем матрицу

$$R_{\gamma\lambda} = R_\gamma R_\lambda. \quad (2.34)$$

Используя определение (2.9) и свойства матриц R_γ , можно явно вычислить $R_{\gamma\lambda}$ как

$$(R_{\gamma\lambda})^\tau_\kappa = (R_\gamma R_\lambda)^\tau_\kappa = \sum_{v=\alpha, \beta, \dots} (R_\gamma)^\tau_v (R_\lambda)^v_\kappa. \quad (2.35)$$

Здесь используются свойства матрицы R_γ , перечисленные после (2.9). Матрица $R_{\gamma\lambda}$ обладает теми же свойствами, что и R_γ , за исключением конкретных значений ненулевых элементов и их расположения: все ее диагональные элементы равны нулю, каждая строка и каждый столбец содержит не более одного ненулевого элемента, причем число нулевых строк равно числу нулевых столбцов. Для элемента из $R_{\gamma\lambda}$ номер его строки определяется таким образом: сначала находим v из условия $\kappa - v = \lambda$ на ненулевой элемент матрицы R_λ , а затем находим номер строки τ из условия $v - \tau = \gamma$ для матрицы R_γ . Номер столбца находится аналогично. Разумеется, если равенство $\kappa - v = \lambda$ не выполняется ни при каких v , то мы имеем нулевую строку и столбец в R_λ , а также нулевой столбец κ в $R_{\gamma\lambda}$. Если равенство $v - \tau = \gamma$ не выполняется ни при каких τ , то мы имеем нулевую строку и столбец в R_γ , и столбец κ в $R_{\gamma\lambda}$ также нулевой. В обоих случаях при этом в $R_{\gamma\lambda}$ имеется также нулевая строка.

Теперь можно записать правую часть (2.29) как

$$\tilde{f}_\gamma \tilde{f}_\lambda - \tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\gamma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1, 2, \dots, r & \alpha, \beta, \dots, \gamma + \lambda, \dots & & \\ \hline & (\gamma_1 N_{\lambda, -\theta} - \lambda_1 N_{\gamma, -\theta}/4) & & \\ & (\gamma_2 N_{\lambda, -\theta} - \lambda_2 N_{\gamma, -\theta}/4) & & \\ & \vdots & & \\ & (\gamma_r N_{\lambda, -\theta} - \lambda_r N_{\gamma, -\theta}/4) & & \\ \hline & & R_{\gamma\lambda} - R_{\lambda\gamma} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Прежде чем двигаться дальше, покажем, что ненулевые элементы в матрицах $R_{\gamma\lambda}$ и $R_{\lambda\gamma}$ находятся на одних и тех же местах. В матрице $R_{\gamma\lambda}$ в строке τ и столбце κ имеется ненулевой элемент, если и только если для некоторого ν выполнено

$$\nu - \tau = \gamma, \quad \kappa - \nu = \lambda \quad (2.37)$$

для некоторого ξ . Складывая вновь левые и правые части двух последних равенств, получаем условие на ненулевой элемент в $R_{\gamma\lambda}$ в виде $\kappa - \tau = \gamma + \lambda$ (при этом $\gamma + \lambda + \tau$ несомненно является элементом из Δ_{nc}^+). Если в $R_{\lambda\gamma}$ в строке τ' и столбце κ' имеется ненулевой элемент, то

$$\xi - \tau' = \lambda, \quad \kappa' - \xi = \gamma \quad (2.38)$$

Складывая левые и правые части данных равенств, получаем условие на ненулевой элемент в $R_{\gamma\lambda}$ в виде $\kappa' - \tau' = \gamma + \lambda$. Поскольку, очевидно, $\gamma + \lambda = \lambda + \gamma$, множество пар (τ, κ) , удовлетворяющих условию на ненулевой элемент для $R_{\gamma\lambda}$, совпадает с множеством пар (τ', κ') , удовлетворяющих условию на ненулевой элемент для $R_{\lambda\gamma}$. Другими словами, ненулевые элементы этих двух матриц занимают одни и те же места. Следовательно, матрицы $R_{\gamma\lambda}$ и $R_{\lambda\gamma}$ имеют одно и то же количество нулевых строк и нулевых столбцов, которые к тому же расположены одинаково. Заметим также, что эти свойства указанных двух матриц очевидным образом совпадают со свойствами матрицы $R_{\gamma+\lambda}$.

Напомним, что матрицы $R_{\gamma+\lambda}$ и $R_{\gamma\lambda} - R_{\lambda\gamma}$ — это правые нижние блоки в левой и правой частях равенства (2.29) соответственно. Но сначала мы рассмотрим ненулевые элементы в правом верхнем блоке (2.36) в столбце $\gamma + \lambda$. Эти элементы имеют вид

$$\frac{\gamma_i N_{\lambda, -\theta} - \lambda_i N_{\gamma, -\theta}}{4}. \quad (2.39)$$

Как уже отмечалось, если $\gamma + \lambda$ не является корнем, то верхний правый блок в (2.36) будет нулевым, совпадая при этом с верхним правым блоком в левой части (2.29), который равен нулю, поскольку $N_{\gamma\lambda} = 0$. Однако если $\gamma + \lambda$ является корнем, то, поскольку косет-алгебра замкнута, имеем $\gamma + \lambda \in \Delta_{nc}^+$. Тогда существует такой корень $\theta = \gamma + \lambda \in \Delta_{nc}^+$, что $\lambda - \theta = -\gamma$ и $\gamma - \theta = -\lambda$. Если сумма трех корневых генераторов базиса Картана–Вейля равна нулю, скажем $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}. \quad (2.40)$$

Поскольку для ненулевых элементов (2.39) $\gamma + \lambda - \theta = 0$, имеем $N_{\lambda, -\theta} = N_{\gamma\lambda}$ и $N_{\gamma, -\theta} = -N_{-\theta, \gamma} = -N_{\gamma\lambda}$. Таким образом, ненулевые элементы из (2.39) принимают вид

$$\frac{\gamma_i N_{\lambda, -\theta} - \lambda_i N_{\gamma, -\theta}}{4} = \frac{N_{\gamma\lambda}(\gamma_i + \lambda_i)}{4} \quad (2.41)$$

и равны ненулевым элементам из верхнего правого блока в (2.31) в столбце $\gamma + \lambda$.

Теперь рассмотрим равенство правых нижних блоков в левой и правой частях (2.29). Определим значения ненулевых элементов матрицы $R_{\gamma\lambda} - R_{\lambda\gamma}$. Необходимо рассмотреть два случая: $\gamma + \lambda$ является корнем и $\gamma + \lambda$ не является корнем.

Пусть сначала $\gamma + \lambda$ – не корень. Тогда из (2.11) непосредственно следует, что левая часть (2.29) равна нулю. Рассмотрим правую часть. Для строки τ и столбца κ в $R_{\gamma\lambda} - R_{\lambda\gamma}$, если оба условия (2.37) и (2.38) выполнены и тем самым элемент существует, он должен быть равен $N_{\lambda,-\kappa}N_{\gamma,-\tau} - N_{\gamma,-\kappa}N_{\lambda,-\tau}$. Однако для существования этого элемента из условий (2.37) и (2.38), а также из тождества (2.40) имеем условия

$$N_{\gamma,-\tau} = N_{\tau\gamma}, \quad N_{\lambda,-\kappa} = N_{\tau\lambda}. \quad (2.42)$$

Таким образом, этот элемент принимает вид

$$N_{\lambda,-\kappa}N_{\tau\gamma} - N_{\gamma,-\kappa}N_{\tau\lambda}. \quad (2.43)$$

В общем случае, если для четырех корней выполняется равенство $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ и сумма ни одной из пар не равна нулю, то структурные константы базиса Картана–Вейля удовлетворяют тождеству

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} + N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} = 0. \quad (2.44)$$

Поскольку, как уже было показано, $\kappa - \tau = \gamma + \lambda$, имеем $\gamma + \lambda + \tau - \kappa = 0$. С учетом (2.44) получаем

$$N_{\gamma\lambda}N_{\tau,-\kappa} + N_{\lambda\tau}N_{\gamma,-\kappa} + N_{\tau\gamma}N_{\lambda,-\kappa} = 0. \quad (2.45)$$

Однако, в силу того что $\gamma + \lambda$ не является корнем, $N_{\gamma\lambda} = 0$, и мы получаем

$$-N_{\tau\lambda}N_{\gamma,-\kappa} + N_{\tau\gamma}N_{\lambda,-\kappa} = 0, \quad (2.46)$$

где левая часть в точности равна (2.43). Это доказывает равенство правых нижних блоков в левой и правой частях (2.29) в случае, если $\gamma + \lambda$ не является корнем. Заметим, ранее уже было доказано, что либо оба условия (2.37) и (2.38) выполняются, либо оба этих условия не выполняются, т.е. ненулевые элементы матриц $R_{\gamma\lambda}$ и $R_{\lambda\gamma}$ расположены на одних и тех же местах.

Пусть теперь $\gamma + \lambda$ – корень. Как мы уже заметили, ненулевые строки и столбцы в матрице $R_{\gamma+\lambda}$ и матрицах $R_{\gamma\lambda}$ и $R_{\lambda\gamma}$ совпадают, кроме того, ненулевые элементы в $R_{\gamma+\lambda}$, $R_{\gamma\lambda}$ и $R_{\lambda\gamma}$ стоят на одних и тех же местах. Теперь надо показать, что в матричной разности $R_{\gamma\lambda} - R_{\lambda\gamma}$ разности ненулевых элементов не обращаются в нуль и, более того, равны соответствующим ненулевым элементам из $R_{\gamma+\lambda}$. Другими словами, необходимо доказать, что если строка τ и столбец κ содержат ненулевой элемент, то выполнено равенство

$$N_{\gamma\lambda}N_{\gamma+\lambda,-\kappa} = N_{\lambda,-\kappa}N_{\gamma,-\tau} - N_{\gamma,-\kappa}N_{\lambda,-\tau}. \quad (2.47)$$

Снова используя тождество (2.40), из (2.47) получаем

$$N_{\gamma\lambda}N_{\gamma+\lambda,-\kappa} = N_{\lambda,-\kappa}N_{\tau\gamma} - N_{\gamma,-\kappa}N_{\tau\lambda}. \quad (2.48)$$

Теперь, поскольку $\gamma + \lambda - \kappa + \tau = 0$, из (2.40) имеем $N_{\gamma+\lambda,-\kappa} = N_{-\kappa,\tau}$. Поэтому (2.48) можно записать как

$$0 = N_{\gamma\lambda}N_{\tau,-\kappa} + N_{\lambda,-\kappa}N_{\tau\gamma} + N_{\gamma,-\kappa}N_{\lambda\tau}. \quad (2.49)$$

Это равенство выполнено в силу справедливости (2.45), что и является желаемым результатом.

Тем самым мы завершили доказательство равенства (2.29) для всех возможных случаев. Вместе с предыдущими результатами, установленными в данном разделе, это доказывает, что алгебраическая структура, заданная в (2.2) и являющаяся деформацией разрешимой подалгебры Ли группы глобальных симметрий сигма-модели, подчиняется тождеству Якоби (2.11) и тем самым определяет алгебру Ли.

3. ПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Покажем, что дуализованная косет-алгебра (2.2) содержит присоединенное представление подалгебры s , порожденной исходными косет-генераторами $\{T_m\} \equiv \{H_i, E_\alpha\}$. Эта подалгебра является исходной косет-алгеброй сигма-модели, которая представляет собой разрешимую подалгебру алгебры Ли группы глобальной симметрии. Указанное присоединенное представление существует в силу общей схемы $[\{T_m\}, \{\tilde{T}_n\}] \subset \{\tilde{T}_n\}$ структуры дуализованной косет-алгебры (2.2). Чтобы найти это представление, определим линейное отображение

$$f: s \longrightarrow gl(S, \mathbb{R}), \quad (3.1)$$

где S – размерность подалгебры s . По аналогии с общим присоединенным представлением алгебры Ли общего вида предполагаем, что отображение f имеет вид

$$f(T_l) = U_l, \quad (3.2)$$

где U_l – $(S \times S)$ -матрица с элементами U_{lm}^t , которые являются определенными в (2.14) структурными константами. Линейность и свойство (3.2) определяют действие f на всей подалгебре s . Это линейное отображение является гомоморфизмом алгебр, если

$$f([M, N]) = [f(M), f(N)] \quad (3.3)$$

для всех $M, N \in s$. Если подставить $M = M^l T_l$ и $N = N^k T_k$ в (3.3), то видно, что (3.3) выполнено, если $f([T_l, T_n]) = [f(T_l), f(T_n)]$. Это равенство, используя соотношения (2.16) и (3.2), а также предположение о линейности отображения, можно записать в виде

$$Z_{ln}^t U_{tm}^s = (U_l U_n - U_n U_l)^s_m, \quad (3.4)$$

что совпадает с тождеством Якоби (2.15), справедливость которого мы доказали в разделе 2. Таким образом, можно заключить, что отображение f , действие которого на базис $\{T_m\}$ определяется согласно (3.2), есть гомоморфизм алгебр и образует $(S \times S)$ -матричное представление косет-алгебры s , которая является подалгеброй в (2.2). Дуализованная косет-алгебра (2.2), которая является деформацией своей подалгебры s и структура алгебры Ли которой установлена в разделе 2, порождает естественное присоединенное представление исходной косет-алгебры s .

4. СИГМА-МОДЕЛЬНЫЕ ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Теперь покажем, что представление, установленное в разделе 3, позволяет вывести полевые уравнения первого порядка для сигма-модели на симметрическом пространстве. Полевые уравнения первого порядка сигма-модели с таргет-многообразием косета в виде симметрического пространства впервые появились в работах [3], [4] как результат дуализации косет-конструкции этих теорий. Однако в указанных работах они были формально введены как условия согласованности в рамках дуализирующей теории. Здесь мы алгебраически докажем, что они соответствуют уравнениям, которые можно получить локальным интегрированием полевых уравнений второго порядка. Другими словами, мы покажем, что если выбрать представление, указанное в разделе 3, то можно получить полевые уравнения второго порядка в сигма-модели с симметрическим пространством, если взять внешнюю производную от уравнений первого порядка, полученных в работах [3], [4]. Таким образом, мы используем систему уравнений из работ [3], [4]:

$$*\vec{\Psi} = (-1)^D e^\Gamma e^\Lambda \vec{\mathbf{A}}, \quad (4.1)$$

где D – размерность базисного многообразия, S – размер вектор-столбцов $\vec{\Psi}$, $\vec{\mathbf{A}}$, которые имеют компоненты

$$\begin{aligned} \Psi^i &= \frac{1}{2} d\phi^i, & i &= 1, 2, \dots, r, \\ \Psi^{\alpha+r} &= e^{\alpha_i \phi^i / 2} \Omega^\alpha_\gamma d\chi^\gamma, & \alpha &= 1, 2, \dots, S-r, \\ \mathbf{A}^i &= \frac{1}{2} d\tilde{\phi}^i, & i &= 1, 2, \dots, r, \\ \mathbf{A}^{\alpha+r} &= d\tilde{\chi}^\alpha, & \alpha &= 1, 2, \dots, S-r. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь ϕ^i и χ^γ – скалярные поля, относительно которых надо найти решение и которые параметризуют косет-пространство таргет-многообразия сигма-модели. Отметим, что α обозначает и некомпактные положительные корни, и их соответствующую нумерацию. Кроме того, $\tilde{\phi}^i$ и $\tilde{\chi}^\alpha$ являются произвольными $(D-2)$ -формами, которые возникают из дуализации косет-отображения в рамках дуализованной косет-реализации теории. В (4.1) $\Gamma(\phi^i)$ и $\Lambda(\chi^\beta)$ суть $(S \times S)$ -матричные функционалы с компонентами

$$\Gamma_n^k = \frac{1}{2} \phi^i \tilde{g}_{in}^k, \quad \Lambda_n^k = \chi^\alpha \tilde{f}_{\alpha n}^k, \quad (4.3)$$

где матрицы $\tilde{f}_\alpha$ и $\tilde{g}_i$ определены соответственно в (2.7) и (2.8). Рассматривая определения (2.6) и (2.14) под действием присоединенного представления (3.1) алгебры s , существование которого доказано в разделе 3, получаем отождествление

$$e^\Gamma e^\Lambda = e^{\phi^i \tilde{g}_i / 2} e^{\chi^\alpha \tilde{f}_\alpha} \equiv e^{\phi^i H_i / 2} e^{\chi^\alpha E_\alpha} = \nu, \quad (4.4)$$

где ν – косет-представитель сигма-модели [3], [4]. Таким образом, с учетом представления, определенного в (3.1), под действием которого

$$H_i \longrightarrow \tilde{g}_i, \quad E_\alpha \longrightarrow \tilde{f}_\alpha, \quad (4.5)$$

систему уравнений первого порядка (4.1) можно записать в виде

$$* \vec{\Psi} = (-1)^D \nu \vec{\mathbf{A}}. \quad (4.6)$$

Возьмем теперь внешнюю производную обеих частей:

$$d(*\vec{\Psi}) = (-1)^D d\nu \vec{\mathbf{A}}, \quad (4.7)$$

где использовалось, что $d\mathbf{A}^m = 0$. Поскольку (4.6) является векторным уравнением, его можно записать как²⁾ $\vec{\mathbf{A}} = (-1)^D \nu^{-1} * \vec{\Psi}$. Подставляя это равенство в (4.7), получаем

$$d(*\vec{\Psi}) = d\nu \nu^{-1} * \vec{\Psi}. \quad (4.8)$$

Из этого уравнения сразу видно, что $\mathcal{G} = d\nu \nu^{-1}$ является формой Картана, индуцированной косет-отображением ν . Она была вычислена в явном виде в работе [4] и может быть записана как

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} d\phi^i H_i + e^{\beta_i \phi^i / 2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha E_\beta, \quad (4.9)$$

где

$$\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m+1)!} = (e^\omega - I)\omega^{-1}. \quad (4.10)$$

Здесь $(S-r) \times (S-r)$ -матрица ω имеет компоненты $\omega_\beta^\gamma = \chi^\alpha K_{\alpha\beta}^\gamma$, причем $K_{\alpha\beta}^\gamma$ определяются как $[E_\alpha, E_\beta] = K_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma$.

Поскольку мы выбрали представление, порожденное отображением (3.2), можно записать (4.9) в виде

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} d\phi^i \tilde{g}_i + e^{\beta_i \phi^i / 2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha \tilde{f}_\beta. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.8), получаем (в покомпонентной записи)

$$d(*\Psi^m) = \left(\frac{1}{2} d\phi^i \tilde{g}_{in}^m + e^{\beta_i \phi^i / 2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha \tilde{f}_{\beta n}^m \right) \wedge * \Psi^n. \quad (4.12)$$

При $1 \leq m \leq r$ это равенство дает

$$\frac{1}{2} d(*d\phi^i) = \frac{1}{2} d\phi^j \wedge \tilde{g}_{jn}^i * \Psi^n + e^{\beta_k \phi^k / 2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha \wedge \tilde{f}_{\beta n}^i * \Psi^n. \quad (4.13)$$

В силу (2.8) первый член в правой части (4.13) обращается в нуль, а если разбить сумму во втором члене по индексу n , то получаем

$$\frac{1}{2} d(*d\phi^i) = e^{\beta_k \phi^k / 2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha \wedge (\tilde{f}_{\beta j}^i * \Psi^j + \tilde{f}_{\beta, \gamma+r}^i * \Psi^{\gamma+r}). \quad (4.14)$$

²⁾Заметим, что ν^{-1} существует по определению.

Теперь в силу (2.7) первый член в правой части (4.14) снова обращается в нуль. Дальнейшее разбиение индекса в сумме по остающимся членам дает

$$\frac{1}{2} d(*d\phi^i) = e^{\beta_k \phi^k/2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha \wedge \left(\tilde{f}_{\beta, \beta+r}^i * \Psi^{\beta+r} + \sum_{\kappa \neq \beta} \tilde{f}_{\beta, \kappa+r}^i * \Psi^{\kappa+r} \right). \quad (4.15)$$

В силу (2.7) вторая сумма в правой части (4.15) также обращается в нуль. Получив³⁾ значение $\tilde{f}_{\beta, \beta+r}^i$ из (2.7), а также используя (4.2), окончательно получаем

$$d(*d\phi^i) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_{nc}^+} \beta_i e^{\beta_k \phi^k/2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha \wedge e^{\beta_j \phi^j/2} \Omega_\gamma^\beta * d\chi^\gamma, \quad (4.16)$$

где i – свободный индекс. Система уравнений (4.16) является в точности уравнениями второго порядка дилатонного поля сигма-модели, которые были получены в работах [3]–[6].

С другой стороны, из равенства (4.12) при $m > r$ получаем

$$d * (e^{\beta_i \phi^i/2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha) = \left(\frac{1}{2} d\phi^i \tilde{g}_{in}^{\beta+r} + e^{\kappa_i \phi^i/2} \Omega_\alpha^\kappa d\chi^\alpha \tilde{f}_{\kappa n}^{\beta+r} \right) \wedge * \Psi^n, \quad (4.17)$$

где β – свободный индекс. Аналогично нашему вычислению, выполненному выше, и в силу (2.7) и (2.8) после исключения обращающихся в нуль членов в правой части, получаем

$$d * (e^{\beta_i \phi^i/2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha) = -\frac{1}{2} \beta_i d\phi^i \wedge * \Psi^{\beta+r} + e^{\kappa_i \phi^i/2} \Omega_\alpha^\kappa d\chi^\alpha \tilde{f}_{\kappa, \gamma+r}^{\beta+r} \wedge * \Psi^{\gamma+r}. \quad (4.18)$$

Более того, используя (4.2) и (2.7), окончательно имеем

$$\begin{aligned} d * (e^{\beta_i \phi^i/2} \Omega_\alpha^\beta d\chi^\alpha) = & -\frac{1}{2} \beta_i d\phi^i \wedge (e^{\beta_j \phi^j/2} \Omega_\alpha^\beta * d\chi^\alpha) + \\ & + \sum_{\kappa - \theta = -\beta} e^{\kappa_i \phi^i/2} \Omega_\alpha^\kappa d\chi^\alpha \wedge (N_{\kappa, -\theta} e^{\theta_j \phi^j/2} \Omega_\sigma^\theta * d\chi^\sigma), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где в правой части во втором члене сумма берется по индексу $\kappa \in \Delta_{nc}^+$ (β – снова свободный индекс) и в силу (2.9) индекс $\theta \in \Delta_{nc}^+$ (если соответствующий корень существует в Δ_{nc}^+ , когда фиксированы β и κ) следует выбрать согласно сформулированному выше корневому условию⁴⁾. Поскольку индекс (корень) β пробегает Δ_{nc}^+ , эти уравнения являются уравнениями второго порядка аксионного поля сигма-модели, которые были выведены в работах [3]–[6].

³⁾Следует обратить внимание, что первый член в скобках в правой части (4.15) является не суммой, а одним слагаемым.

⁴⁾Конечно, если такой корень θ не существует в Δ_{nc}^+ , то в силу (2.9) этот член для конкретного выбора β и κ равен нулю. Укажем также, что в (4.19) нет суммирования по индексу θ , в противном случае θ фиксируется при выборе β и κ .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы дали строгое доказательство того, что дуализованная алгебра косетной сигма-модели с глобально римановым симметричным таргет-пространством действительно является алгеброй Ли. Хотя коммутационные соотношения дуализованной косет-алгебры были получены в работе [4], их Ли-алгебраическая структура там не была установлена. Показав, что структурные константы или коммутаторы действительно удовлетворяют тождеству Якоби, мы обосновали понятие алгебры Ли дуализованной алгебры, которая является расширением исходной косет-алгебры сигма-модели. Мы также отметили, что дуализованная косет-алгебра, которая содержит в себе обыкновенную алгебру и поэтому может рассматриваться как ее деформация, допускает присоединенное представление исходной косет-алгебры. Наконец, мы показали, что под действием этого специального представления полевые уравнения второго порядка можно получить дифференцированием уравнений первого порядка, которые появились в работах [3], [4] как условия согласованности дуализирующей конструкции. Мы доказали, что эти условия согласованности являются истинными алгебраическими уравнениями первого порядка в соответствующей сигма-модели.

Цель настоящей работы – показать, что под действием специального представления, порожденного алгеброй дуальности, уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка можно проинтегрировать и получить полевые уравнения первого порядка. Эти уравнения первого порядка уже получены в работах [3], [4]. Однако только в рамках настоящей работы доказано, что они алгебраически правильны, поскольку в работах [3], [4] они возникли как условие согласованности, соответствующее дуализации теории. С другой стороны, в настоящей работе мы доказали, что если применить внешнюю производную к этим уравнениям первого порядка, то получатся правильные полевые уравнения второго порядка, которые являются уравнениями Эйлера–Лагранжа. Учитывая приведенный в настоящей работе анализ, легко утверждать, что дуализация теории помимо своей расширенной геометрической конструкции является эффективным способом поиска правильного представления косет-алгебры так, что это представление приводит к интегрированию полевых уравнений. Другими словами, в рамках дуализованной теории исходная косет-алгебра реализована как ее ли-алгебраическая деформация (дуализованная косет-алгебра) таким образом, что порождаемое присоединенное представление принимает вид подходящего представления, допускающего интегрирование полевых уравнений. Мы показали, что представление, позволяющее построить полевые уравнения первого порядка, зависит от ли-алгебраической структуры дуализованной косет-алгебры, которая является специальным и нетривиальным расширением исходной. В работах [3], [4] эта алгебра и полевые уравнения первого порядка были получены исходя из геометрической точки зрения. Здесь же, продемонстрировав наследование ли-алгебраической структуры и соответственно присоединенного представления, мы алгебраически дополнили результаты работ [3], [4]. Таким образом, наше точное доказательство дополнительно обосновывает правильность полевых уравнений первого порядка в сигма-модели с симметрическим простран-

ством. Это представляет собой важный результат, поскольку позволяет понижать порядок дифференциальных сигма-модельных полевых уравнений второго порядка в частных производных, которые являются важным элементом в супергравитации и теории струн, а также в квантовой теории поля.

С точки зрения анализа другой существенный результат настоящей работы можно рассматривать как порождение расширенной ли-алгебраической структуры исходя из разрешимой подалгебры Ли в алгебре Ли. Рассуждения из раздела 2 легко обобщить, и на основе полного и формального доказательства из раздела 2 можно утверждать, что каждая подалгебра борелевской подалгебры алгебры Ли находится внутри другой алгебры Ли с удвоенной размерностью.

Список литературы

- [1] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü, C.N. Pope, *Nucl. Phys. B*, **523**:1–2 (1998), 73–144; [arXiv: hep-th/9710119](#).
- [2] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü, C.N. Pope, *Nucl. Phys. B*, **535**:1–2 (1998), 242–292; [arXiv: hep-th/9806106](#).
- [3] N. T. Yılmaz, *Nucl. Phys. B*, **664**:1–2 (2003), 357–370; [arXiv: hep-th/0301236](#).
- [4] N. T. Yılmaz, *Nucl. Phys. B*, **675**:1–2 (2003), 122–138; [arXiv: hep-th/0407006](#).
- [5] A. Keurentjes, *Nucl. Phys. B*, **658**:3 (2003), 303–347; [arXiv: hep-th/0210178](#).
- [6] A. Keurentjes, *Nucl. Phys. B*, **658**:3 (2003), 348–372; [arXiv: hep-th/0212024](#).