Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Сова, Квантовое запутывание в составных системах,
ТМФ, 2009, том 159, номер 2, 283–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:12:14

© 2009 г.

А. Сова*

КВАНТОВОЕ ЗАПУТЫВАНИЕ В СОСТАВНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается некоторый класс моделей мезоскопических квантовых явлений; эти модели возникают из сопоставления гамильтоновой динамики определенного типа и запутанных состояний составных систем. С помощью таких моделей можно получить точное описание феноменологии двумерного электронного газа, в особенности квантового эффекта Холла. Показано, как такие модели (если использовать их для отражения реальных физических принципов, а не только феноменологии) можно проверить в экспериментах типа квантовой телепортации. Так называемые мезоскопические модели предусматривают, что динамика взаимодействующего с внешним полем двумерного газа описывается функционалом типа $\text{Tr}[H\rho] + \beta \text{Tr} f(\rho)$, где ρ – оператор плотности, а H – одночастичный гамильтониан. На основе предлагаемого подхода показано, что с помощью подходящего эксперимента по квантовой телепортации можно получить информацию об аналитической функции f . Это приводит к взгляду на составную систему электронный газ–внешнее поле как на естественный квантовый компьютер.

Ключевые слова: составные системы, нелокальные модели, квантовое запутывание, квантовые эффекты Холла.

1. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Мы будем рассматривать с новой точки зрения определенные теоретические концепции, которые исходно были введены в работах [1], [2] и затем применены в работах [3]–[5]. Наши методы можно использовать для моделирования систем, действующих в режиме квантового эффекта Холла (КЭХ) и его функциональной окрестности. Более того, такой подход, по-видимому, указывает на значимость определенных универсальных принципов при моделировании наносистем и в физике наносистем в целом. Основное новшество в используемом нами подходе состоит в использовании динамической переменной, которую можно рассматривать как квадратный корень из матрицы плотности. В настоящей работе мы подчеркиваем, что эта конструкция допускает интерпретацию в рамках квантовой теории информации, причем определяющую роль играет квантовое запутывание. Данный аспект рассматриваемой конструкции систематически обсуждается в настоящей работе впервые.

*Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada.
E-mail: sowa@math.usask.ca, a.sowa@mesoscopia.com

Мы начнем с рассмотрения элементарного случая невзаимодействующего электронного газа, а затем перейдем к основному предмету исследования – к взаимодействующему газу. Это позволит интерпретировать квантовые системы Холла в рамках *естественных* квантовых вычислений. Наше рассмотрение не сильно ограничено тем предположением, что гильбертовы пространства и операторы конечномерны. Мы будем, вообще говоря, работать в этих рамках, а выходить за них будем только в тех случаях, когда это необходимо. Несколько исключений, когда нам потребуется прибегнуть к дифференциальным операторам и функциональным пространствам, будут оговорены особо.

2. НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ СИСТЕМЫ: ЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА

2.1. Базисное описание ансамбля невзаимодействующих электронов.

Начнем с обзора основ квантовой динамики. Дальнейшее рассмотрение будет основываться на хорошем понимании этих концепций. Наша основная конструкция существенна только для описания ансамбля электронов, которые не взаимодействуют между собой, а также не взаимодействуют с другими системами (с внешними полями). Пусть $\mathbf{H}$ – пространство, снабженное скалярным произведением $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Динамика определяется гамильтонианом $H: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, который является эрмитовым линейным оператором, т.е. $H^* = H$. В частности, гамильтониан H диагонализуем в базисе, состоящем из его собственных значений:

$$H\psi_k = E_k\psi_k. \quad (1)$$

Невзаимодействующую систему можно описывать волновой функцией $\psi(t, \cdot) \in \mathbf{H}$, которая удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\dot{\psi} = H\psi. \quad (2)$$

Среднее значение энергии системы в момент времени t есть

$$\langle H \rangle = \Lambda(\psi) = \langle \psi | H\psi \rangle. \quad (3)$$

Это функционал, который порождает динамику в (2). Действительно, разбивая скалярное произведение на вещественную и мнимую части, получаем евклидово произведение и симплектическую форму:

$$\langle X | Y \rangle = (X, Y) + i\omega(X, Y). \quad (4)$$

Можно вычислить производную равенства (3) следующим образом:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Lambda(\psi + \varepsilon\phi) = 2 \operatorname{Re} \langle \phi | H\psi \rangle = 2 \operatorname{Im} \langle i\phi | H\psi \rangle = 2\omega(\phi, -iH\psi). \quad (5)$$

В силу этих формул уравнение (2) *по определению* представляет собой гамильтонов поток, определяемый функцией Гамильтона (3) (см. монографию [6]). Заметим, что если H не зависит от времени, то и среднее значение $\langle H \rangle$ заморожено во времени, хотя ψ при этом эволюционирует. Действительно,

$$\langle \dot{H} \rangle = \langle \dot{\psi} | H\psi \rangle + \langle H\psi | \dot{\psi} \rangle = \langle -iH\psi | H\psi \rangle + \langle H\psi | -iH\psi \rangle = 0.$$

Альтернативное описание квантовой системы типа свободного электронного газа основано на использовании оператора плотности $\rho: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $\rho^* = \rho$, удовлетворяющего, кроме того, условию $\text{Tr } \rho = 1$. Закон, определяющий эволюцию ρ , – это уравнение движения Гейзенберга

$$i\dot{\rho} = [H, \rho] := H\rho - \rho H. \quad (6)$$

Хорошо известен пример решения этого уравнения, который подчеркивает тот факт, что ρ -описание системы является обобщением ψ -описания. А именно, если выполнено (2), то оператор ρ , определяемый как $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, удовлетворяет уравнению (6). Действительно,

$$i\dot{\rho} = i|\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + i|\psi\rangle\langle\dot{\psi}| = H|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|H = [H, \rho].$$

Более того, если $\psi = \sum_k a_k \psi_k$, то $\rho = \sum_{k,l} a_k \bar{a}_l |\psi_k\rangle\langle\psi_l|$ и $H\rho = \sum_{k,l} E_k a_k \bar{a}_l |\psi_k\rangle\langle\psi_l|$. Поэтому

$$\langle H \rangle = \langle \psi | H \psi \rangle = \sum_k |a_k|^2 \langle \psi_k | H \psi_k \rangle = \sum_k |a_k|^2 E_k \langle \psi_k | \psi_k \rangle = \text{Tr} (H\rho).$$

Стандартное скалярное произведение в пространстве конечномерных комплексных операторов имеет вид

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr} (AB^*). \quad (7)$$

Это дает основание определить среднее значение энергии в ρ -описании следующим образом:

$$\langle H \rangle = \langle H | \rho \rangle. \quad (8)$$

Такое скалярное произведение играет важную роль в дальнейшем рассмотрении. Напомним следующие фундаментальные тождества:

$$\langle MA | B \rangle = \langle A | M^* B \rangle, \quad \langle AM | B \rangle = \langle A | BM^* \rangle, \quad \langle [A, M] | B \rangle = \langle A | [B, M^*] \rangle,$$

которые выполнены для произвольных A , B и M . В силу последних тождеств и уравнения (6) из независимости H от времени следует, что $\langle H \rangle$ также не зависит от времени в ρ -описании.

И последнее по порядку, но не по важности: подчеркнем, что скалярное произведение (7) индуцирует евклидово произведение $(\cdot, \cdot)$ и симплектическую форму $\omega(\cdot, \cdot)$ в соответствии с (4) на пространстве конечномерных комплексных операторов.

2.2. “Квадратный корень” из матрицы плотности как динамическая переменная. Согласно уравнению (6) оператор плотности ρ является динамической переменной, но встает вопрос, существует ли вариационный функционал, содержащий ρ , из которого можно было бы получить данное уравнение движения? Было бы естественным спросить, должна ли сама формула (8) определять динамическую переменную ρ ? В конце концов, она описывает среднее значение энергии, как и (3). Однако выражение (8) линейно по ρ , и поэтому его градиент равен $\langle H |$. Таким образом, этого выражения самого по себе не достаточно для определения динамики (6).

Однако картина изменится, если мы представим ρ в виде произведения двух комплексных и, как правило, неэрмитовых операторов, т.е. в виде $\rho = K^* K$. Заметим, что это указывает на возможность введения еще одного гильбертова пространства, дополнительного к $\mathbf{H}$. Будем обозначать его через $\hat{\mathbf{H}}$. Действительно, если

$$K: \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}, \quad (9)$$

то в этом случае по-прежнему

$$\rho = K^* K: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}. \quad (10)$$

В последующих разделах мы рассмотрим роль этого дополнительного элемента конструкции. Подчеркнем, что представление ρ через K не единственно, поскольку при произвольном унитарном U взятие UK вместо K дает то же ρ .

Подставляя (10) в (8), получаем нетривиальный гамильтониан

$$\Lambda(K) = \langle H \rangle = \langle H | K^* K \rangle = \text{Tr}(HK^* K) = \text{Tr}(KHK^*) = \langle KH | K \rangle.$$

Вычисление, аналогичное (5), дает

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Lambda(K + \varepsilon\Phi) = 2 \text{Re} \langle \Phi | KH \rangle = 2 \text{Im} \langle \Phi | -iKH \rangle = 2\omega(\Phi, -iKH), \quad (11)$$

где теперь Φ – комплексный оператор. Применяя правила гамильтоновой механики, но обращая направление течения времени (по причинам, которые скоро прояснятся), получаем уравнение

$$-i\dot{K} = KH, \quad (12)$$

откуда автоматически следует

$$i\dot{K}^* = HK^*. \quad (13)$$

Заметим, что таким образом столбцы оператора K^* удовлетворяют исходному уравнению Шредингера (2). Кроме того, если K удовлетворяет этому уравнению, то $\rho = K^* K$ получается из своей канонической динамики. Действительно,

$$i\dot{\rho} = i\dot{K}^* K + iK^* \dot{K} = HK^* K - K^* KH = [H, \rho]. \quad (14)$$

При этом если оператор KK^* заморожен во времени, то получим

$$i(K\dot{K}^*) = i\dot{K}K^* + iK\dot{K}^* = -KHK^* + KHK^* = 0. \quad (15)$$

Таким образом, уравнение (12), или, что эквивалентно, уравнение (13) воспроизводит квантово-механическую эволюцию оператора плотности ρ . В то же время, вводя оператор K , мы смогли включить функционал (8) в динамическую картину с самого начала. Кроме того, описание динамики электронного газа на основе оператора K позволяет рассматривать кросс-корреляции в смеси чистых состояний. Например, оператор плотности $\rho = \sum_k c_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ может соответствовать оператору $K = \sum_k \sqrt{c_k} e^{i\theta_k} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, в силу чего чистым состояниям $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ явным образом приписаны фазы. Информация о фазах теряется, если вернуться к ρ -описанию ансамбля состояний.

2.3. Интерпретация K в терминах запутывания. Введение оператора (9) допускает естественную интерпретацию на основе теории квантовых измерений и квантовой информации [7]. Сначала выразим оператор K в общем виде $K = \sum A_{mn} |\varphi_m\rangle \langle \psi_n|$, где $\{|\varphi_m\rangle\}$ – ортонормированный набор состояний из $\hat{\mathbf{H}}$. Заметим, что, поскольку K^*K представляет собой оператор плотности, мы имеем

$$\sum_{m,n} |A_{mn}|^2 = \|K\|^2 = \text{Tr}(KK^*) = \text{Tr}(K^*K) = 1. \quad (16)$$

Далее, преобразуем представление для K следующим образом:

$$K = \sum_m |\varphi_m\rangle \sum_n A_{mn} \langle \psi_n| = \sum_m |\varphi_m\rangle \langle w_m|, \quad \langle w_m| = \sum_n A_{mn} \langle \psi_n|. \quad (17)$$

Заметим, что введение оператора K эквивалентно введению состояния

$$|\Psi_{\text{comb}}\rangle = \sum_{m,n} A_{mn}^* |\varphi_m\rangle \otimes |\psi_n\rangle = \sum_m |\varphi_m\rangle \otimes |w_m\rangle \in \hat{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{H}, \quad (18)$$

которое является одним из возможных состояний системы, составленной из подсистем $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$. Заметим, что в силу (16) мы автоматически имеем $\|\Psi_{\text{comb}}\| = 1$. Это приводит к следующей интерпретации [7]: после наблюдения состояния $|\varphi_m\rangle$ в системе $\hat{\mathbf{H}}$, система $\mathbf{H}$ с вероятностью единица окажется в коррелированном состоянии $|w_m\rangle$. Заметим, что

$$|w_m\rangle = K^* |\varphi_m\rangle. \quad (19)$$

Конечно, две системы могут поменяться ролями. Действительно, можно представить оператор K в дуальном виде:

$$K = \sum_n \left(\sum_m A_{mn} |\varphi_m\rangle \right) \langle \psi_n| = \sum_n |u_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (20)$$

где последнее равенство определяет $|u_n\rangle$. Теперь после наблюдения состояния ψ_n в системе $\mathbf{H}$ система $\hat{\mathbf{H}}$ окажется в состоянии $|u_n\rangle$, где

$$|u_n\rangle = K |\psi_n\rangle. \quad (21)$$

Соотношения (19) и (21) позволяют интерпретировать K как оператор, который определяет корреляции между измерениями над системами $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$. Мы иногда будем называть K *оператором запутывания*.

Напомним, что состояние $|\Psi_{\text{comb}}\rangle$ называется незапутанным, если его можно записать в виде $|\Psi_{\text{comb}}\rangle = |\Phi\rangle \otimes |\Psi\rangle$. Легко видеть, что $|\Psi_{\text{comb}}\rangle$ незапутанно, если и только если ρ , определяемый в (10), является проектором на одномерное подпространство. В самом деле, последнее условие эквивалентным образом выражается как наличие такого состояния $|\Psi\rangle$, что $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$.

Наконец, заметим, что представление ρ в виде (10) эквивалентно тому, что

$$\rho = \text{Tr}_{\hat{\mathbf{H}}}(|\Psi_{\text{comb}}\rangle \langle \Psi_{\text{comb}}|) = \sum_m |w_m\rangle \langle w_m|, \quad (22)$$

поскольку в силу соотношения (17) и ортонормированности $\{|\varphi_m\rangle\}$ мы имеем $K^*K = \sum_m |w_m\rangle\langle w_m|$. Выражение (22) дает канонический способ вычисления редуцированного оператора плотности подсистемы, а задание ρ в виде (10) является при этом альтернативой, которая имеет свои преимущества. В частности, мы увидим, что явное использование оператора K позволяет применить методы гамильтоновой динамики в нестандартном описании запутанных квантовых систем.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ СИСТЕМЫ. НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА

3.1. Подход к описанию взаимодействующих электронов. До сих пор мы описывали эволюцию ансамбля невзаимодействующих частиц. Теперь попытаемся учесть взаимодействие между частицами путем следующей модификации полной энергии: $\langle H \rangle = \langle H|\rho \rangle + F(\rho)$. Здесь член с дополнительной энергией не должен зависеть от H и от конкретного матричного представления оператора плотности ρ . Мы рассмотрим достаточно общие способы выбора F в разделе 5, но сначала обратимся к специальному случаю

$$F(\rho) = \beta \ln \det \rho, \quad (23)$$

где β – константа. Заметим, что данный случай связан с относительной квантовой энтропией [7]. Напомним, что хорошо известная энтропия фон Неймана определяется для системы как

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (24)$$

с другой стороны, относительная энтропия определяется с помощью двух матриц плотности следующим образом:

$$S(\rho^0, \rho) = \text{Tr}(\rho^0 \ln \rho^0) - \text{Tr}(\rho^0 \ln \rho). \quad (25)$$

Эти соотношения квантового типа, разумеется, аналогичны известным формулам, играющим центральную роль в теории информации Шеннона. Однако их интерпретация установлена не столь хорошо, как для их классических аналогов. Вспомним теперь известную формулу $\det e^A = e^{\text{Tr} A}$. Из нее следует, что функционал (23) имеет смысл относительной энтропии:

$$\ln \det \rho = \text{Tr} \ln \rho = NS_0 - NS(\bar{I}, \rho).$$

Здесь $\bar{I} = N^{-1}I$ – перенормированный единичный оператор, так что $\text{Tr} \bar{I} = 1$, а S_0 – константа, которая не зависит от ρ . Можно отметить, что выбор $\rho^0 = \bar{I}$ выделяет “белый шум” среди других состояний.

Далее мы рассмотрим описание взаимодействующего электронного газа на основе функционала $\text{Tr}(H\rho) + \beta \ln \det \rho$ среднего значения энергии. Нас интересует ситуация, когда определитель не равен нулю, поэтому мы полагаем, что $\rho > 0$. В частности, собственные векторы оператора ρ линейно порождают все пространство $\mathbf{H}$ (это допущение будет изменено при рассмотрении бесконечномерного случая). Чтобы получить осмысленную динамику, мы прибегнем к подходу, введенному в предыдущем разделе, т.е. представим эрмитову матрицу ρ как композицию комплексных

матриц, как в (10), и изучим функционал

$$\Xi(K) = \text{Tr}(KHK^*) + \beta \ln \det(K^*K), \quad (26)$$

который будет находиться в центре нашего внимания в оставшейся части статьи. Его обобщения будут рассмотрены в разделе 5.

3.2. Производная функционала Ξ и соответствующая гамильтонова динамика. Чтобы изучить динамику, индуцируемую функционалом (26), надо вычислить производную определителя. Элементарное (хотя и нетривиальное) вычисление показывает, что

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ln \det(K + \varepsilon\Phi) = \langle \Phi | K^{*-1} \rangle$$

и аналогично

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ln \det(K^* + \varepsilon\Phi^*) = \text{Tr}(K^{*-1}\Phi^*) = \langle K^{*-1} | \Phi \rangle.$$

Эти формулы можно сравнить с результатами вычислений производной функционала такого типа в более общем случае (см. раздел 5). Далее, вычисление, аналогичное (11), дает

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ln \det((K^* + \varepsilon\Phi^*)(K + \varepsilon\Phi)) = 2 \text{Re} \langle \Phi | K^{*-1} \rangle = 2\omega(\Phi, -iK^{*-1}). \quad (27)$$

Таким образом, функционал Ξ , определенный в (26), приводит к гамильтонову эволюционному уравнению

$$-i\dot{K} = KH + \beta K^{*-1}. \quad (28)$$

Мы будем иногда называть это уравнение *мезоскопическим уравнением Шредингера* или просто *мезоскопическим уравнением*. Заметим, что оно представляет собой нелинейное обобщение уравнения (12), а сопряженное уравнение (13) также имеет аналог $i\dot{K}^* = HK^* + \beta K^{-1}$. Обратим внимание на то, что, хотя K удовлетворяет нелинейному уравнению, ρ по-прежнему удовлетворяет уравнению движения Гейзенберга. Действительно, видоизменяя надлежащим образом вычисления, приведенные в (14), получаем

$$i\dot{\rho} = i\dot{K}^*K + iK^*\dot{K} = HK^*K + \beta K^{-1}K - K^*KH - \beta K^*K^{*-1} = [H, \rho]. \quad (29)$$

Этот результат может несколько озадачить, поскольку он означает, что некто, намеревающийся следить только за эволюцией ρ в системе, определенной функционалом (26), может не знать, что функционал энергии был изменен за счет слагаемого с относительной энтропией. Однако не будем забывать, что K кодирует квантовое запутывание электронной подсистемы $\mathbf{H}$ с подсистемой $\hat{\mathbf{H}}$. Эволюция оператора K отчасти управляет поведением всей составной системы, в то время как только ее часть доступна для ρ . Ввиду этого представляется естественным рассматривать более богатую теорию, где система $\hat{\mathbf{H}}$ может влиять на эволюцию оператора ρ посредством гамильтониана H . Мы рассмотрим этот сценарий в разделе 4. Упомянем также, что, вообще говоря, уравнение (29) более не выполнено, если допускать относительную энтропию (25) с произвольным ρ^0 .

3.3. Собственные состояния как следствие нелинейности. Ненадолго вернемся к линейной динамике (12). Ясно, что нельзя использовать это уравнение для определения собственных состояний. В то же время можно определить их как стационарные решения уравнений Гейзенберга (6): стационарные решения – это те, которые коммутируют с H (диагонализуются в собственном базисе оператора H). В то же время уравнение (28) позволяет указать другой вид собственных состояний непосредственно через оператор K . Действительно, подставляя $e^{it\nu} K(x)$ вместо $K(t, x)$, получаем стационарное уравнение

$$KH + \beta K^{*-1} = \nu K. \quad (30)$$

Отсюда следует, что

$$\rho = K^* K = \beta(\nu I - H)^{-1}. \quad (31)$$

Собственные состояния имеют вид

$$K = U \left(\frac{1}{\beta} (\nu I - H) \right)^{-1/2}, \quad (32)$$

где $U: \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$ – произвольный унитарный оператор. Как и раньше, соответствующие собственным состояниям операторы ρ диагонализуются одновременно с H . Заметим, что для существования решения величина ν должна превосходить все собственные значения оператора H . Уравнению (31) можно придать смысл, даже когда H – дифференциальный оператор [2], просто сужая область определения ρ . С учетом (1) получаем

$$\rho = \beta \sum_{E_k < \nu} \frac{1}{\nu - E_k} |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (33)$$

Константу β следует выбрать так, чтобы оператор ρ был правильно нормирован. Собственные состояния являются смесями конечного числа чистых состояний. Более того, ингредиенты присутствуют в определенной пропорции. Это напоминает электронные свойства кристалла, где локализованные состояния находятся ниже уровня энергии Ферми. В частности, свойства ρ зависят от конкретных значений ν и от размера щели между этим уровнем и следующим наивысшим занятым уровнем.

3.4. Стационарные корреляции между наблюдениями над $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$. Перепишем собственное состояние K из (32) в виде, сходном с (33):

$$K = \sum_{E_k < \nu} \left(\frac{\beta}{\nu - E_k} \right)^{1/2} |U\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (34)$$

Согласно интерпретации K в терминах запутывания это означает, что собственное состояние индуцирует корреляцию между наблюдениями над системами $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$. Если первая из этих систем наблюдается в состоянии $|\psi_k\rangle$, то вторая коллапсирует к состоянию $|U\psi_k\rangle$ и наоборот. Поскольку $|\psi_k\rangle$ – собственное состояние гамильтониана, наблюдение этого состояния в системе $\mathbf{H}$ сопровождается измерением энергии или любой другой инвариантной по времени наблюдаемой. С другой стороны, наблюдение состояния $|U\psi_k\rangle$ связано с измерением наблюдаемой $UHU^*: \hat{\mathbf{H}} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$ или

График S_ν из (39) для модели со 100 случайными уровнями энергии в интервале $[1, 100)$ при $\nu \in (100, 110)$.

любой наблюдаемой, коммутирующей с ней. Поскольку оператор $U: \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$ произволен, он может отобразить базис $|\psi_k\rangle$ на любой базис в $\hat{\mathbf{H}}$. Таким образом, K не налагает никаких априорных ограничений на систему $\hat{\mathbf{H}}$ в состоянии равновесия, соответствующем собственным состояниям.

Интерпретируя в терминах запутывания энтропию фон Неймана (24), можно сказать, что для $\rho = K^*K$ она является мерой запутывания соответствующего состояния (18). Когда система гомеостатична, так что матрица плотности имеет вид (33), запутывание есть

$$S_\nu = - \sum_{E_k < \nu} \frac{\beta}{\nu - E_k} \ln \left(\frac{\beta}{\nu - E_k} \right). \quad (35)$$

Рисунок иллюстрирует типичную зависимость запутывания S_ν от ν .

3.5. Корреляции в ходе временной эволюции. Следует подчеркнуть, что мезоскопическое уравнение (28) в некотором смысле совместно с квантовой механикой. Это заключение основано на том неожиданном наблюдении, что уравнение (28) можно решить почти явно в том смысле, что его решения можно выразить через решения линейного уравнения Шредингера [2]. На самом деле, это можно сделать, даже когда пространства $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ бесконечномерны. Рассмотрим динамическую переменную K вида

$$K(t) = \sum A_{mn}(t) |\varphi_m(t)\rangle \langle \psi_n(t)|, \quad (36)$$

где сумма по индексам m и n в действительности конечна, скажем $m, n = 1, \dots, N$, но волновые функции $|\psi_n(t)\rangle$ и $|\varphi_m(t)\rangle$ обитают в бесконечномерных функциональных пространствах $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$. Напомним, что для рассмотрения мезоскопического уравнения (28) нам пришлось предположить, что матрица K несингулярна. Если мы рассматриваем данное уравнение в бесконечномерном случае, это условие следует заменить на требование обратимости матрицы $A = [A_{mn}]$. Другими словами, мы предполагаем, что $K(t): F(t) \rightarrow G(t)$ обратимо как отображение, имеющее суженные область определения и область значений

$$F(t) = \text{span}\{|\psi_n(t)\rangle, n = 1, \dots, N\}$$

и

$$G(t) = G(0) = \text{span}\{|\varphi_m(0)\rangle, m = 1, \dots, N\}.$$

Тогда ясно, как интерпретировать уравнение (28). Более того, оказывается, что решения характеризуются следующими тремя условиями:

1) образ остается замороженным во времени, $G(t) = G(0)$, и $|\varphi_m(t)\rangle = |\varphi_m(0)\rangle = |\varphi_m\rangle$;

2) существует набор векторов $\{\psi_n(t)\}_{n=1, \dots, N}$, который является унитарным базисом для изменяющейся со временем области определения $F(t)$ и, более того, все эти векторы удовлетворяют уравнению Шредингера

$$i \dot{\psi}_n = H \psi_n; \quad (37)$$

3) изменяя ортонормированное семейство $\{|\varphi_m\rangle\}_{m=1, \dots, N}$, можно получить сопряженную матрицу $A(0) = A(0)^*$, при этом $A(t)$ определяется из начального условия по формуле

$$A(t) = A(0) \exp\left(i \int_0^t \beta(\tau) A(0)^{-2} d\tau\right). \quad (38)$$

Кроме того, решения мезоскопического уравнения обладают тем свойством, что энергия $\Xi(K(t))$ инвариантна по времени, коль скоро H и β не зависят от времени [2], т.е. систему можно снабжать энергией только через составные элементы уравнения (28).

Таким образом, интерпретация K в терминах запутывания означает, что если система $\mathbf{H}$ обнаружена в состоянии $|\Psi\rangle$, то система $\hat{\mathbf{H}}$ с вероятностью единица коллапсирует к состоянию

$$|\Phi\rangle = K|\Psi\rangle = \sum A_{mn}(t) \langle\psi_n(t)|\Psi\rangle |\varphi_m\rangle. \quad (39)$$

Поэтому состояние, к которому коллапсирует подсистема $\hat{\mathbf{H}}$, зависит не только от исхода эксперимента в системе $\mathbf{H}$, но и от момента времени. Более того, оно определяется шредингеровской эволюцией в $\mathbf{H}$, равно как и эволюцией (38) неабелева фазового множителя $A(t)$.

4. КЭХ И КВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ

4.1. Замыкание петли взаимодействия в составных системах. Рассмотрим $K: \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$, как и выше, в контексте двумерного электронного газа, взаимодействующего с магнитным полем. Тем самым мы интерпретируем $\mathbf{H}$ как квантовый дескриптор электронного газа, а $\hat{\mathbf{H}}$ – как квантовый дескриптор внешнего магнитного поля. Мы полагаем, что системы электронного газа и магнитного поля запутаны. В соответствии с интерпретацией в терминах запутывания, если подсистема $\mathbf{H}$ обнаружена в состоянии $|\Psi\rangle$, то подсистема $\hat{\mathbf{H}}$ автоматически коллапсирует к состоянию $K|\Psi\rangle$. Это можно воспринимать как влияние электронной подсистемы на внешнее поле. Параллельно с этим рассмотрим описание электромагнитного поля с помощью классических уравнений поля. Это нужно для того, чтобы учесть влияние, которое электромагнитное поле оказывает на динамику электронного газа.

А именно, классический дескриптор поля, т.е. векторный потенциал A , входит в гамильтониан $H = H_A = \nabla_A^* \nabla_A$, определяющий динамику K посредством (26) (естественно, при этом надо рассматривать гамильтониан как дифференциальный оператор), и этим замыкается петля взаимодействия между электронным газом и электромагнитным полем. Заметим, что наш подход асимметричен по отношению к $\mathbf{H}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ – таковым он и был в начальный момент. Сначала обсудим, как этот тип петли обратной связи помогает описывать динамику сложных квантовых систем, а затем предложим тест для проверки этих принципов.

4.2. Квантовые системы Холла как составные системы. Стандартная модель взаимодействия электронов с внешним электромагнитным полем задается связанной системой уравнений Максвелла и Шредингера. Взаимодействие происходит через заряд и/или ток в соответствии с тем, как эти понятия можно интерпретировать в рамках и электромагнетизма, и квантовой механики. Однако этот подход теряет адекватность при описании таких более сложных явлений, как КЭХ. В то же время основную черту КЭХ – квантование холловского сопротивления – можно вывести из фундаментальных принципов квантовой теории; подходящие аргументы были основаны на релятивистской квантовой теории поля [8]. Здесь же мы кратко опишем другой подход к КЭХ [4], [5], основанный на понятии относительной энтропии и на гамильтоновом подходе к динамике, представленной в предыдущих разделах. Подчеркнем, что получающееся описание является нерелятивистским.

Рассмотрим собственные состояния K (34) при дополнительном допущении $U = I$. Предположим, что наша система в достаточной мере описывается всего одной волновой функцией ψ и гомеостатична, т.е. $\psi = \psi_{n_0}$, где ψ_{n_0} – собственное состояние оператора H . Как предлагалось выше, мы хотим, чтобы обратная связь, идущая от электронной системы $\mathbf{H}$ к системе внешнего магнитного поля $\hat{\mathbf{H}}$, определялась преобразованием запутывания K . Таким образом, состояние внешней системы имеет вид

$$K\psi = K\psi_{n_0} = c\psi_{n_0} = c\psi,$$

где c – константа. В этом описании плотность потока определяется как

$$B \sim |K|\psi\rangle|^2 = |c|^2|\psi|^2 = R_H|\psi|^2.$$

Заметим, что в общем случае пространственное распределение плотности потока неравномерно. Поскольку константа равна отношению полного потока к полному заряду, она обратна так называемой степени заполнения; мы обозначили ее как R_H . Далее, получающееся магнитное поле изменяет гамильтониан $H_A = \nabla_A^* \nabla_A$, где A – векторный потенциал, $*dA = B$.

Петля взаимодействия описывается следующей системой уравнений:

$$*dA = R_H|\psi|^2, \quad \nabla_A^* \nabla_A \psi = E\psi.$$

В работе автора [3] показано, что эта модель предсказывает, что холловское сопротивление равно R_H , и это в действительности наблюдается в КЭХ. Отличительной чертой данной модели является ее конструктивность и возможность компьютерного моделирования. Более того, она позволяет явно изучать последствия возмущения модели различными способами, так, в работе автора [4] с определенной точки зрения проанализированы некоторые эффекты, следующие из расширения модели за

счет решеточного потенциала. Мы предвидим возможность использовать различные возмущения этой модели и ее разнообразные расширения для сбора информации от систем, которые действуют вблизи режима КЭХ. При том что такие системы являются не более чем частным случаем наносистем, многие из положенных в их основу принципов представляются вполне универсальными.

4.3. Эксперимент по квантовой телепортации как проверка принципа.

Интересно спросить, может ли представленная выше модель в действительности дать адекватное описание рассматриваемой квантово-механической системы? Может ли она в действительности отражать не только феноменологию, но и принцип действия? Опишем в общих чертах, как эту гипотезу можно проверить в (идеализированном) эксперименте. Предположим, что составная система $\hat{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{H}$ описывается статическим оператором запутывания K , скажем

$$K = \sum_{m,n=1}^N A_{mn} |\varphi_m\rangle \langle \psi_n|, \quad (40)$$

где $|\psi_n\rangle \in \mathbf{H}$ и $|\varphi_m\rangle \in \hat{\mathbf{H}}$ – взаимно ортогональные векторы с единичной нормой, а A – несингулярная матрица. Мы хотим экспериментально проверить, удовлетворяет ли K равенству (34). Для этого мы ставим эксперимент типа квантовой телепортации. Пусть $\mathbf{A}$ представляет внешний аппарат, предназначенный для измерения некоторой наблюдаемой с базисом из собственных векторов $|\alpha_k\rangle$, $k = 1, \dots, N$. Более того, переименуем $|\varphi_m\rangle$ и будем называть их $|\alpha_m\rangle$, что представляет собой просто формальную трансляцию квантовых алфавитов.

Пусть имеются два наблюдателя, Алиса и Боб. В некоторый момент времени Алиса производит наблюдение над $\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$, а вскоре после этого Боб производит наблюдение над $\hat{\mathbf{H}}$. До эксперимента система $\hat{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$ находилась, скажем, в состоянии

$$|\Psi_{\text{before}}\rangle = \sum_{m,n} \bar{A}_{mn} |\alpha_m\rangle |\psi_n\rangle |\alpha\rangle, \quad (41)$$

где

$$|\alpha\rangle = \sum_k a_k |\alpha_k\rangle.$$

Теперь Алиса будет проводить измерение над системой $\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$, имеющее в данном ортонормированном базисе, скажем, вид

$$|\beta_j\rangle = \sum_{r,s} C_{rs}^j |\psi_r\rangle |\alpha_s\rangle. \quad (42)$$

После измерения система $\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$ коллапсирует к одному из указанных выше состояний, скажем к $|\beta_0\rangle$. Таким образом, система $\hat{\mathbf{H}}$ коллапсирует к состоянию

$$|\Psi_{\text{after}}\rangle = \sum_{m,n,k} \bar{A}_{mn} C_{nk}^0 a_k |\alpha_m\rangle = \bar{A} C^0 |\alpha\rangle, \quad (43)$$

где $\bar{A}$ – матрица с элементами $\bar{A}_{mn}$, а C^0 – матрица с элементами C_{nk}^0 . Далее Алиса передает Бобу результат своего наблюдения (который на этот раз есть $|\beta_0\rangle$)

по классическому каналу связи. На основе этого сообщения Боб будет знать, как выбрать C^0 . Если бы A было известно, Боб был бы в состоянии найти исходное квантовое состояние $|\alpha\rangle$. Действительно, все, что ему нужно сделать – это применить обратную матрицу (см. замечание в следующем абзаце) к $|\Psi_{\text{after}}\rangle$, т.е. $|\alpha\rangle = (C^0)^{-1} \bar{A}^{-1} |\Psi_{\text{after}}\rangle$.

Напомним, что оператор A зависит от теории, которую мы здесь представили, и соотношение (43) можно использовать для ее проверки. Действительно, заметим, что $C^0|\alpha\rangle$ можно естественным образом отождествить с вектором из $\mathbf{H}$. Предполагая матрицу C^0 несингулярной (а в следующем разделе показано, что это допустимое предположение), получаем, что $C^0|\alpha_k\rangle$, $k = 1, 2, \dots, N$, образуют базис в этом пространстве. Поэтому повторения эксперимента, когда выбраны $|\alpha\rangle = |\alpha_k\rangle$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$, приведут к полному заданию A , если только всякий раз имеется полный доступ к $|\Psi_{\text{after}}\rangle$. Естественно, это идеализированный сценарий – для определения $|\Psi_{\text{after}}\rangle$ с достаточной точностью требуются существенные дополнительные усилия и повторяющиеся акты эксперимента. В частности, следует также обеспечить взаимодействие системы $\hat{\mathbf{H}}$ с внешним аппаратом. Дело в том, что оператор K определяет характеристику телепортационного канала, и таким образом его можно определить экспериментально. Результат можно сравнить с теоретическим предсказанием из (34) или с более общей моделью (см. раздел 5).

В итоге телепортационный эксперимент с холловской системой $\hat{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$ дает прямой доступ к динамической переменной рассматриваемой теории. Изучение свойств получающегося телепортационного канала должно, по крайней мере в принципе, позволить охарактеризовать матрицу A , а вслед за тем и оператор K . Более того, K определяет $\rho = K^*K$. В частности, эксперимент определяет собственные значения оператора ρ , и результаты эксперимента можно сравнить с теоретическими предсказаниями. Если эксперимент подтверждает данную картину, и коль скоро матрица A задана, то систему можно использовать в квантовом вычислительном устройстве.

4.4. Технические предположения о производимом Алисой измерении.

Чтобы использовать телепортационный канал для проверки матрицы A из (40), мы полагаем, что имеется ортонормированный базис в $\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$, заданный в виде (42), где, кроме того, C^j несингулярны. Напомним наше допущение, что размерности пространств $\mathbf{H}$ и $\mathbf{A}$ совпадают и равны N , и мы отождествляем эти два пространства, т.е. $\mathbf{A} \cong \mathbf{H}$. Это устанавливает отождествление пространства $\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}$ с пространством $(N \times N)$ -матриц. Подходящие семейства обратимых матриц C^j были построены в работе [9], где было показано, что существуют ортонормированные базисы в пространстве матриц, состоящие из (нормированных) унитарных матриц.

Сохраняя те же обозначения, что и выше, опишем конструкцию следующим образом. Пусть V – унитарный оператор циклического сдвига: $\langle \alpha_k | V = \langle \alpha_{k+1} |$, $k = 1, \dots, N$, причем $\langle \alpha_{N+1} | = \langle \alpha_1 |$. Известно, что собственные значения оператора V являются корнями из единицы, $u_k = e^{2\pi i k / N}$, а соответствующие собственные векторы $\langle u_k |$, $k = 1, \dots, N$, образуют ортонормированный базис (в $\mathbf{H}$). С небольшой модификацией конструкция повторяется следующим образом: строится такой унитарный оператор циклического сдвига U , что $\langle u_k | U^{-1} = \langle u_{k+1} |$, $k = 1, \dots, N$. Тогда можно видеть, что набор $C^{mn} = N^{-1/2} U^m V^n$, $m, n = 0, \dots, N-1$, является

ортонормированным базисом в пространстве $(N \times N)$ -матриц. Он состоит из унитарных матриц (подвергнутых должному изменению масштаба). Заметим, что мы заменили индекс j на более естественный двойной индекс (m, n) .

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАНТОВОЙ ТЕЛЕПОРТАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Анализ, представленный в предыдущем разделе, служит как минимум двум различным целям. Во-первых, он подсказывает, что квантовая холловская система представляет собой некий тип канала квантовой телепортации. Этот факт можно проверить только в эксперименте. Во-вторых, и это сейчас будет главным предметом нашего внимания, представленный выше формализм актуален для систем более общего типа. В частности, общий подход может быть актуален в применении к квантовой холловской системе, действующей в ином режиме, нежели режим КЭХ, например когда изменение температуры или других параметров заставляет систему выпасть из фазы КЭХ. Приведем некоторые рассуждения о том, как можно экспериментально оценить конкретный тип взаимодействия электронного газа в заданном режиме. Для этого взглянем еще раз на функционал Ξ из (26). Как мы уже отмечали, его можно записать в виде

$$\Xi(K) = \text{Tr}(KHK^*) + \beta \text{Tr} \ln(K^*K). \quad (44)$$

Рассмотрим обобщение этого функционала, а именно,

$$\Xi_{f,\rho^0}(K) = \text{Tr}(KHK^*) + \beta \text{Tr}(\rho^0 f(K^*K)), \quad (45)$$

где f – аналитическая функция. В наших обозначениях

$$\Xi_{f,\rho^0}(K) = \text{Tr}(H\rho) + \beta \text{Tr}(\rho^0 f(\rho)). \quad (46)$$

Пусть соответствующие собственные значения оператора ρ равны $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$. Как и раньше, мы предполагаем, что ρ имеет обратный оператор и что $\text{Tr} \rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_N = 1$. Поэтому собственные значения лежат внутри единичного круга и на положительной полуоси x . Мы предполагаем, что $f(z)$ аналитична в единичном круге и принимает вещественные значения при вещественных $z = x$. Функцию $f(\rho)$ можно задать интегралом Коши

$$f(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta I - \rho)^{-1} d\zeta, \quad (47)$$

где кривая Γ ограничивает некоторую область в единичном круге, содержащую все собственные значения оператора ρ . Поскольку оператор ρ не фиксирован, нам надо убедиться, что Γ годится для всех возможных распределений собственных значений, хорошим выбором для Γ является единичная окружность. В этом случае следует предполагать, что f представима интегралом Коши от граничных значений. В наиболее общих терминах это имеет место, если f принадлежит классу Харди H^1 [10]. Далее, вычисление показывает, что

$$Df(\rho)[\rho^0] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} f(\rho + \varepsilon\rho^0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta I - \rho)^{-1} \rho^0 (\zeta I - \rho)^{-1} d\zeta. \quad (48)$$

Используя эту формулу, получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{Tr}[\rho^0 f((K^* + \varepsilon\Phi^*)(K + \varepsilon\Phi))] &= \langle K^*\Phi + \Phi^*K | Df(\rho)[\rho^0] \rangle = \\ &= \langle \Phi | KDf(\rho)[\rho^0] \rangle + \langle \Phi^* | Df(\rho)[\rho^0] K^* \rangle = 2\omega(\Phi, -iKDf(\rho)[\rho^0]). \end{aligned}$$

Заметим, что эта формула является обобщением формулы (27).

Теперь можно записать аналог уравнения стационарных состояний (30) для случая обобщенного мезоскопического гамильтониана (45). Получаем

$$KH + \beta KDf(\rho)[\rho^0] = \nu K. \quad (49)$$

Поскольку K несингулярен, отсюда следует, что

$$Df(\rho)[\rho^0] = \frac{1}{\beta}(\nu I - H). \quad (50)$$

Таким образом, оператор запутывания K принимает вид $K = U\rho^{1/2}$, где по-прежнему $U: \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$ – произвольный унитарный оператор, а ρ – решение уравнения (50). В действительности априори не гарантировано, что решение существует при любом выборе ρ^0 . Рассмотрим уравнение (50) в локальных координатах. Удобно описывать оператор $D = Df(\rho)[\rho^0]$ в базисе собственных функций для ρ . Формула Коши (48) дает

$$D_{jk} = \begin{cases} \rho_{jk}^0 \frac{f(\rho_j) - f(\rho_k)}{\rho_j - \rho_k}, & \text{если } \rho_j \neq \rho_k, \\ \rho_{jk}^0 f'(\rho_k), & \text{если } \rho_j = \rho_k. \end{cases} \quad (51)$$

Будем считать для простоты, что $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_N$. Тогда уравнение (50) эквивалентно уравнениям

$$\rho_{jk}^0 \frac{f(\rho_j) - f(\rho_k)}{\rho_j - \rho_k} = -\frac{H_{jk}}{\beta}, \quad j \neq k, \quad \rho_{kk}^0 f'(\rho_k) = \frac{\nu - H_{kk}}{\beta}. \quad (52)$$

Заметим, что эта система уравнений для ρ_k может оказаться переопределенной или противоречивой в зависимости от ρ_{jk}^0 и H_{jk} . Действительно, если $f'(\cdot)$ – взаимно однозначная функция (например, $f(\rho) = \ln \rho$), то второе уравнение в (52) уже само по себе определяет все собственные значения ρ_k , а первые, внедиагональные, уравнения можно рассматривать как ограничения на ρ_{jk}^0 . Подчеркнем, однако, что в данном разделе принята иная точка зрения. А именно, будем считать, что ρ_{jk} , ρ_{jk}^0 и H_{jk} известны, например, из эксперимента. В частности, предположим, что ρ_{jk} определяются из телепортационного эксперимента, описанного в разделе 4. Соотношения (52) можно использовать для восстановления модели взаимодействия f . Пусть, например, $\rho^0 = \bar{I}$, так что $\rho_{kk}^0 = 1/N$. Уравнения (52) будут выполнены, только если все внедиагональные энергетические члены обращаются в нуль, т.е. $H_{jk} = 0$. Кроме того, если потребовать, чтобы $f(\cdot)$ была возрастающей функцией, т.е. $f'(\rho) > 0$, то с необходимостью $\beta(\nu - H_{kk}) > 0$ для всех k , что приводит к дальнейшим ограничениям на модель. Однако если все необходимые условия существования решений выполнены, то соотношение $f'(\rho_k) = N(\nu - H_{kk})/\beta$ позволяет

частично определить f . Если ρ_k и H_{kk} , ν и β известны, а описанный в предыдущих разделах телепортационный эксперимент действительно определяет все ρ_k , то приведенное выше уравнение представляет собой задачу экстраполяции, которая ограничивает допустимые способы выбора функции $f(\cdot)$. Напомним, что f идентифицирует систему посредством функционала (45). Таким образом, телепортационный эксперимент дает возможность получать информацию о статистической модели системы $\mathbf{H}$ в том смысле, что он помогает определить f .

Список литературы

- [1] A. Sowa, *J. Phys. Chem. Solids*, **65**:8–9 (2004), 1507–1515.
- [2] A. Sowa, *J. Geom. Phys.*, **55**:1 (2005), 1–18.
- [3] A. Sowa, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:1 (2008), 122–127.
- [4] A. Sowa, *Adv. Stud. Theor. Phys.*, **1**:9–12 (2007), 433–448.
- [5] A. Sowa, *Adv. Math. Phys.*, **2009** (2009), Art. ID 514081.
- [6] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [7] S. Stenholm, K.-A. Suominen, *Quantum Approach to Informatics*, Wiley, Hoboken, NJ, 2005.
- [8] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. D*, **52**:8 (1995), 4718–4735.
- [9] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **46**:4 (1960), 570–579.
- [10] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.

Поступила в редакцию 24.04.2008