Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ч. Бурдик, П. Я. Грозман, Д. А. Лейтес, А. Н. Сергеев, Построение алгебр и супералгебр Ли с помощью операторов рождения и уничтожения. I, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 2, 227–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:08:21

© 2000 г. Ч. Бурдик*, П. Грозман†, Д. Лейтес†, А. Сергеев‡

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБР И СУПЕРАЛГЕБР ЛИ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ. I

Предлагаются три алгоритма реализации конечномерных нильпотентных комплексных алгебр Ли и супералгебр с помощью операторов рождения и уничтожения. Эти алгоритмы применяются для реализации алгебр Ли с максимальной подалгеброй конечной коразмерности. Для простой конечномерной $\mathfrak{g}$ с максимальной нильпотентной подалгеброй $\mathfrak{n}$ это дает реализацию с помощью дифференциальных операторов первого порядка на большой открытой клетке многообразия флагов, соответствующего отрицательным корням алгебры $\mathfrak{g}$. Для нескольких примеров эти алгоритмы реализованы с помощью пакета SUPERLie на основе программы MATHEMATICA. Эти реализации являются подготовительной ступенью для точного построения и описания нового интересного класса простых (супер)алгебр Ли полиномиального роста – обобщения алгебр Ли матриц комплексного размера.

Памяти Николая Николаевича Боголюбова

1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку модуль Верма над простой конечной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (индуцированный или коиндуцированный и имеющий вакуумный вектор) изоморфен как векторное пространство алгебре многочленов, очевидно, что $\mathfrak{g}$ можно реализовать с помощью неоднородных дифференциальных операторов 1-го порядка, действующих на эти многочлены. Указания на этот факт встречаются во многих статьях, но явные выражения написать трудно. Например, явные выражения для четырех пар генераторов Шевалле алгебры $\mathfrak{f}_4$ занимают четыре страницы. Формулы для $8 + 8$ генераторов алгебры $\mathfrak{e}_8$ со 120 переменными могут оказаться еще сложнее.

Наш интерес к явным построениям алгебр и супералгебр Ли в терминах бозонных и фермионных операторов вызван недавними применениями алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$ и ее обобщений (см., например, [1]).

С физической точки зрения речь идет о реализациях в терминах операторов рождения и уничтожения, восходящих к 20-м годам. Первыми, кто заметил важность таких

*Dept. of Math., Faculty of Nucl. Sciences and Physical Engineering, Czech Technical Univ., Prague, Czech Republic. E-mail: burdik@km1.fjfi.cvut.cz

†Dept. of Math., Univ. of Stockholm, Stockholm, Sweden. E-mail: mleites@matematik.su.se

‡Балаковский институт техники, технологии и управления, Балаково, Россия

реализаций, были П. Иордан, Швингер, Холстейн и Примаков, Дайсон (см. обзор [2], а также [3–5] и цитированную в этих работах литературу; мы могли бы легко удвоить список ссылок, если бы данная работа была обзорной). Некоторые из многочисленных применений описаны в [6], а также в статьях, инициированных исследованиями Турбинера квазиточно решаемых систем (например, [7] и приведенные там ссылки).

Имеется много статей с общими утверждениями о построении классических алгебр Ли с помощью канонических операторов рождения и уничтожения (см. полиномиальные реализации в [8], похожие на наши). Тем не менее еще много предстоит сделать, причем в более удобной для применения форме, нежели это было в предыдущих исследованиях. Так, первые формулы (см. [9–15]) для элементов алгебр Ли классических серий были рекуррентными, в то время как часто требуется только окончательный ответ в виде генераторов Шевалле (см. п. 5.1, где мы приводим замечательные формулы из [16]).

В различных задачах необходимо использовать реализации, соответствующие обобщенным модулям Верма, т.е. модулям, индуцированным с представления не подалгебры Картана, а более широкой алгебры (см. [17–19]).

Даже для конечномерных классических алгебр Ли явные выражения в терминах неоднородных дифференциальных операторов 1-го порядка – глобальных сечений пучка D -модулей на базисном аффинном пространстве – были получены совсем недавно. Понятно, как находить такие выражения, хотя получающиеся формулы довольно сложны и их вывод требует много времени. Поэтому математики не занимались этим, тем более что никаких применений таких формул не предвиделось. Сейчас ситуация изменилась:

1) применения алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$, описанной в [1], являются достаточной мотивацией для дальнейших исследований в данной области;

2) в работе [20] было выяснено, что $\mathfrak{gl}(\lambda)$ есть простейшая алгебра Ли из нового важного класса простых алгебр Ли, причем, чтобы описать определяющие соотношения этих алгебр, требуются вышеупомянутые представления (супер)алгебр Ли вида

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i, \quad \dim \mathfrak{g}_i < \infty \quad (1.1)$$

с помощью операторов рождения и уничтожения;

3) увеличение мощности компьютеров облегчает вычисления.

Основной результат. Мы предлагаем три конкурирующих алгоритма для вывода явных представлений с помощью дифференциальных операторов порядка, не превосходящего 1, с $\text{rk } \mathfrak{g}$ параметрами для любой $\mathbb{Z}$ -градуированной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида (1.1) и более общих супералгебр вида

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+, \quad (1.1')$$

где $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{\pm}] \subset \mathfrak{g}_{\pm}$, $\dim \mathfrak{g}_- < \infty$ и действие $\mathfrak{g}_-$ на $\mathfrak{g}$ нильпотентно. Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ в (1.1') не обязательно коммутативна.

Это завершает решение проблемы явной реализации комплексных алгебр вида (1.1), (1.1') и некоторых их вещественных форм. Для других вещественных форм проблема

остается открытой. По поводу их реализации в нескольких частных случаях можно посмотреть в работах [21–28] и др.

В данной работе мы демонстрируем результаты, полученные при применении алгоритма к некоторым частным случаям (см. также [29]). В других примерах формулы получаются слишком громоздкими. Явное описание тем не менее необходимо для обобщения конструкции на алгебры Ли матриц комплексного размера [20]. Результаты вычислений этих примеров будут помещены в электронный архив math/RT. При вычислениях использовался пакет программ SUPERLie (см. [30]), основанной на программе MATHEMATICA.

Мы не рассматриваем другие важные реализации типа реализации с помощью рациональных функций [31], к которой можно перейти в проективных координатах, или же реализации через дифференциальные операторы второго (либо старших) порядков (см., например, [6]).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данной работе $\mathfrak{g}$ имеет вид (1.1). Чтобы упростить обозначения, формулы в алгоритмах приведены для алгебр Ли; суперизация выполняется с помощью правила знаков. Положим

$$\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i.$$

Интересный частный случай – это тот, в котором $\mathfrak{g}_0$ является картановской подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_-$ порождается отрицательными корневыми векторами и $\mathfrak{g}_+$ – положительными.

Символ $\text{Diff}(n)$ обозначает ассоциативную алгебру полиномиальных дифференциальных операторов с n переменными. Она иногда называется алгеброй Вейля. Символ $\text{diff}(n)$ обозначает алгебру Ли, ассоциированную с $\text{Diff}(n)$.

Действие алгебры $\mathfrak{g}$ удобно описывать на модулях, индуцированных (свободно порождаемых операторами рождения) с некоторого $\mathfrak{g}_0$ -модуля V , аннулируемого $\mathfrak{g}_+$. Чтобы представить действие $\mathfrak{g}$ с помощью дифференциальных операторов 1-го порядка, мы отождествим универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g}_-)$ пространства $\mathfrak{g}_-$ с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{g}_-)$ пространства $\mathfrak{g}_-$ и рассмотрим действие $\mathfrak{g}$ на $S(\mathfrak{g}_-)$. Для отождествления $U(\mathfrak{g}_-)$ с $S(\mathfrak{g}_-)$ мы выбираем некоторый базис $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{g}_-$ и определяем биекцию

$$S(\mathfrak{g}_-) \longrightarrow U(\mathfrak{g}_-), \quad (2.1)$$

отображающую произведения базисных элементов, вычисленные в $S(\mathfrak{g}_-)$, в произведения тех же элементов, вычисленные в $U(\mathfrak{g}_-)$. Используя эту биекцию, мы можем перенести регулярное представление $U(\mathfrak{g}_-)$ на $U(\mathfrak{g}_-)$ в $U(\mathfrak{g}_-)$ -действие на $S(\mathfrak{g}_-^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вышеуказанное преобразование необходимо выполнять с осторожностью. Можно подумать, что если алгебра $\mathfrak{g}_-$ нильпотентна, то $U(\mathfrak{g}_-)$ всегда действует на $S(\mathfrak{g}_-)$ посредством дифференциальных операторов. Такая мысль неверна, что показывает нижеследующий контрпример. В нем вид оператора зависит от базиса в $\mathfrak{g}_-$. Наши алгоритмы показывают, что базис, в котором $\mathfrak{g}_-$ реализуется дифференциальными операторами, всегда существует.

Пусть $\mathfrak{g}_- = \text{Span}(e_1, e_2, e_3)$ с единственным отличным от нуля коммутатором $[e_1, e_2] = e_3$, т.е. $\mathfrak{g}_-$ – алгебра Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2)$. Положим

$$x = e_1 + e_3, \quad y = e_2, \quad z = e_1 + e_2. \quad (2.2)$$

Тогда

$$[x, y] = x + y - z, \quad [x, z] = x + y - z, \quad [y, z] = -(x + y - z). \quad (2.3)$$

Отождествим $U(\mathfrak{g}_-)$ с $S(\mathfrak{g}_-)$, приняв, что $\mathfrak{g}_- = \text{Span}(x, y, z)$, и рассмотрим действие y на $S(\mathfrak{g}_-)$. Мы получим (с учетом того, что элементы $S(\mathfrak{g}_-)$ коммутируют, а те же объекты, рассматриваемые как элементы $U(\mathfrak{g}_-)$, удовлетворяют (2.2) или (2.3))

$$\begin{aligned} y(x^k y^l z^m) &= [y, x^k] y^l z^m + x^k y^{l+1} z^m = x^k y^{l+1} z^m - k x^{k-1} (x + y - z) y^l z^m = \\ &= \left(y - (x + y - z) \frac{\partial}{\partial x} \right) (x^k y^l z^m) + k x^{k-1} [z, y^l] z^m = \\ &= \left(y - (x + y - z) \frac{\partial}{\partial x} \right) (x^k y^l z^m) - k l x^{k-1} (x + y - z) y^{l-1} z^m = \\ &= \left(y - (x + y - z) \frac{\partial}{\partial x} - (x + y - z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) (x^k y^l z^m) + \\ &\quad + k l x^{k-1} [z, y^{l-1}] z^m = \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Другими словами, при таком отождествлении y переходит в

$$y - (x + y - z) \frac{\partial}{\partial x} - (x + y - z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - (x + y - z) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \dots, \quad (2.5)$$

где первое слагаемое – это оператор левого умножения на y . Выражение (2.5) не является дифференциальным оператором, т.к. сумма бесконечна.

Поскольку операторы рождения и уничтожения переставимы в diff , мы будем использовать то представление, которое наиболее удобно в данный момент, и свободно переставлять x и $\partial/\partial x$. Это замечание показывает, что даже вышеприведенный пример может быть частично подправлен такими перестановками, и мы получим линейный дифференциальный оператор с формальными коэффициентами. Однако мы будем реализовывать наши алгебры дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами.

3. ЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБР $\mathfrak{g}_-$

3.1. Первый алгоритм. Нижеследующая теорема представляет явный алгоритм для реализации $\mathfrak{g}_-$ посредством дифференциальных операторов с $\dim \mathfrak{g}_-$ переменными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{g}_-$ – нильпотентная алгебра Ли. Отождествление $U(\mathfrak{g}_-)$ с $S(\mathfrak{g}_-)$ порождает некоторое действие $\mathfrak{g}_-$ на $U(\mathfrak{g}_-)$ (регулярное представление).

Существует базис в $\mathfrak{g}_-$, относительно которого действие $U(\mathfrak{g}_-)$ на $S(\mathfrak{g}_-)$, соответствующее регулярному представлению $\mathfrak{g}_-$ в $U(\mathfrak{g}_-)$, задано посредством дифференциальных операторов 1-го порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем по индукции относительно $\dim \mathfrak{g}_-$. Если $\dim \mathfrak{g}_- = 1$, то утверждения теоремы очевидны. Если $\dim \mathfrak{g}_- > 1$, то выберем в $\mathfrak{g}_-$ некоторый идеал $\mathfrak{i}$ коразмерности 1 и пусть $x_1, \dots, x_n$ — базис в $\mathfrak{i}$ с требуемыми свойствами (он существует по индуктивному предположению). Пусть элемент y трансверсален подпространству $\mathfrak{i}$, т.е. $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{i} \oplus \text{Span}(y)$. отождествим $U(\mathfrak{g}_-)$ с $\mathbb{C}[y] \otimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. При таком отождествлении y действует на $U(\mathfrak{g}_-)$ как оператор умножения на y . Пусть $x \in \mathfrak{i}$. Используя лемму 2.2.22 из [32], получаем

$$xy^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} y^{k-i} (\widetilde{\text{ad}} y)^i(x), \quad (3.1)$$

где $\widetilde{\text{ad}} y(x) = [x, y]$. Поскольку алгебра $\mathfrak{g}_-$ нильпотентна, $(\widetilde{\text{ad}} y)^N(x) = 0$ для некоторого N . Поэтому

$$xy^k \cdot f = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} y^{k-i} (\widetilde{\text{ad}} y)^i(x) \cdot f. \quad (3.2)$$

Обозначим символом $D_x^{(n)}$ оператор, соответствующий действию x в $S(\mathfrak{i})$ при каждом $x \in \mathfrak{i}$. Тогда из формулы (3.2) следует, что действие x в $\mathbb{C}[y] \otimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ выполняется оператором

$$D_x^{(n+1)} = D_x^{(n)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial y^i} D_{(\widetilde{\text{ad}} y)^i(x)}. \quad (3.3)$$

Поэтому после замены операторов рождения операторами уничтожения x представляется дифференциальным оператором 1-го порядка.

Допуская некоторую вольность, мы будем часто писать просто D_x вместо $D_x^{(n+1)}$.

3.2. Второй алгоритм. Обозначим символом ad естественное расширение присоединенного представления $U(\mathfrak{g}_-)$ в $\mathfrak{g}_-$. Тогда нетрудно проверить, что

$$x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} y = \sum_{0 \leq i_j \leq k_j} \binom{k_1}{i_1} \dots \binom{k_n}{i_n} \text{ad}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})(y) (x_1^{k_1-i_1} \dots x_n^{k_n-i_n}) \quad (3.4)$$

для любых $x_1, \dots, x_n, y \in \mathfrak{g}_-$. Поэтому

$$y x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} y - \sum_{i_1 + \dots + i_n > 0; i_j \leq k_j} \binom{k_1}{i_1} \dots \binom{k_n}{i_n} \text{ad}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})(y) (x_1^{k_1-i_1} \dots x_n^{k_n-i_n}). \quad (3.5)$$

Следовательно, если для каждого $x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_n)$ оператор левого умножения на x в $U(\mathfrak{g}_-)$ представлен дифференциальным оператором D_x в $S(\mathfrak{g}_-)$, то оператор левого умножения на y в $U(\mathfrak{g}_-)$ представлен в $S(\mathfrak{g}_-)$ дифференциальным оператором

$$y - \sum_{i_1 + \dots + i_n > 0; i_j \leq k_j} \frac{1}{i_1!} \dots \frac{1}{i_n!} D_{\text{ad}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{i_n}. \quad (3.6)$$

Итак, выбрав базис в $\mathfrak{g}_-$, состоящий из идеалов

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots \subset (x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{g}_-,$$

мы получаем следующий алгоритм:

- 1) представим x_1 оператором левого умножения на x_1 ;
- 2) если для любого $x \in \text{Span}(x_1, \dots, x_p)$ определен оператор D_x в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_p]$, то x_{p+1} представляется оператором

$$x_{p+1} - \sum_{i_1 + \dots + i_p > 0; i_j \leq k_j} \frac{1}{i_1} \dots \frac{1}{i_p} D_{\text{ad}(x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p})(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \right)^{i_p}, \quad (3.7)$$

где в сумме только конечное число слагаемых отлично от нуля, поскольку алгебра $\mathfrak{g}_-$ нильпотентна.

3.3. Третий алгоритм (каноническая симметризация). Мы можем отождествить $S(\mathfrak{g})$ с $U(\mathfrak{g})$ с помощью канонической симметризации

$$\omega: S(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}), \quad \omega(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}. \quad (3.8)$$

Этот алгоритм имеет преимущества по сравнению с первым, т.к. не зависит от выбора базиса. Недостатком является то, что симметризации требуют значительного компьютерного времени.

Явный вид операторов левого умножения может быть получен с помощью формулы (2.8.12(c)) из [32]:

$$\begin{aligned} x\omega(x_1 \dots x_n) &= \omega(xx_1 \dots x_n) - \frac{b_1}{1!} \sum_h \omega([x, x_h] \dots \hat{x}_h \dots x_n) + \\ &+ \frac{b_2}{2!} \sum_{h \neq l} \omega([[x, x_h], x_l] \dots \hat{x}_h \dots \hat{x}_l \dots x_n) - \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где b_i — числа Бернулли и символы с крышкой опускаются.

Из этой формулы следует, что если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то при вышеуказанном отождествлении $S(\mathfrak{g})$ с $U(\mathfrak{g})$ левое регулярное представление реализуется (конечными) дифференциальными операторами. Действительно, при $x, y_1, \dots, y_k, \dots \in \mathfrak{g}$ положим

$$\begin{aligned} D_x^{(1)}(y) &= [x, y] \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_x^{(2)}(y_1 y_2) &= [[x, y_1], y_2] \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + [[x, y_2], y_1] \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ D_x^{(k)}(y_{i_1} \dots y_{i_k}) &= \sum_{i_1, \dots, i_k} [\dots [[x, y_{i_1}], y_{i_2}], \dots, y_{i_k}] \frac{\partial^k}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_k}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что первый оператор может быть единственным образом расширен до дифференциального оператора 1-го порядка, второй может быть единственным образом расширен до дифференциального оператора 2-го порядка и т.д. В качестве переменных y нужно брать элементы базиса в $\mathfrak{g}$.

Представим (3.9) в форме

$$x \mapsto x - \frac{b_1}{1!} D_x^{(1)} + \frac{b_2}{2!} D_x^{(2)} - \frac{b_3}{3!} D_x^{(3)} + \dots \quad (3.11)$$

Можно легко выразить (3.11) через структурные постоянные. Если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то сумма в (3.11) содержит только конечное число отличных от нуля членов.

4. ДЕЙСТВИЕ $\mathfrak{g}$ В ОБОБЩЕННЫХ МОДУЛЯХ ВЕРМА

4.1. Первый алгоритм. Пусть $\mathfrak{g}$ имеет вид (1.1'). Будем рассматривать $U(\mathfrak{g}_0)$ как $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ -модуль, предполагая, что $\mathfrak{g}_0$ действует по левому регулярному представлению, и примем, что $\mathfrak{g}_+ U(\mathfrak{g}_0) = 0$, т.е. мы не рассматриваем здесь $\mathfrak{g}_+$ и $\mathfrak{g}_0$ как подалгебры $\mathfrak{g}$. Положим $M = \text{Ind}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+}^{\mathfrak{g}} (U(\mathfrak{g}_0))$.

ТЕОРЕМА 2. *Существует базис в $\mathfrak{g}_-$, относительно которого образ $U(\mathfrak{g})$ при действии $U(\mathfrak{g})$ в $S(\mathfrak{g}_-) \otimes U(\mathfrak{g}_0)$ содержится в $\text{diff}(n) \otimes U(\mathfrak{g}_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем базис $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{g}_-$, как в теореме 1. Тогда $U(\mathfrak{g}_-) \subset \text{diff}(n) \otimes 1$.

Пусть $x \in \mathfrak{g}_0$. Поскольку $\mathfrak{g}_-$ является $\mathfrak{g}_0$ -модулем, $\text{ad}(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})(x) \in \mathfrak{g}_-$, если по крайней мере, один из показателей степени k_i отличен от нуля. Поэтому в силу (3.4) имеем

$$\begin{aligned} x x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} &= x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} x - \\ &- \sum_{i_1 + \dots + i_n > 0} \binom{k_1}{i_1} \dots \binom{k_n}{i_n} \text{ad}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})(x) x_1^{k_1 - i_1} \dots x_n^{k_n - i_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, x представляется оператором

$$1 \otimes x - \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n > 0} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} D_{\text{ad}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{i_n} \right) \otimes 1. \quad (4.1)$$

Поскольку алгебра $\mathfrak{g}_-$ нильпотентна, $i_1 + \dots + i_n < N$. Следовательно, сумма (4.1) содержит лишь конечное число слагаемых и оператор D_x , определяемый формулой (3.3), при $x \in \mathfrak{g}_-$ является дифференциальным оператором, как в теореме 1.

Пусть $x \in \mathfrak{g}_+$. Тогда оператор, соответствующий x , строится по индукции. Именно пусть $r = r(x)$ будет такое максимальное число, что

$$[\dots [x, x_1], x_2], \dots, x_r \in \mathfrak{g}_- \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathfrak{g}_-.$$

Поскольку действие $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_-$ нильпотентно, число r существует. Заметим, что $r(x) = 0$ при $x \in \mathfrak{g}_-$ и $r(x) = 1$ при $x \in \mathfrak{g}_0$. Если $r > 0$, то в силу (4.1) имеем

$$x \mapsto - \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n < r(x)} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} D_{\text{ad}(x^{i_1} \dots x^{i_n})(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{i_n} \right) \otimes 1 - \\ - \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n \geq r(x)} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} D_{\text{ad}(x^{i_1} \dots x^{i_n})(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{i_n} \right) \otimes 1. \quad (4.2)$$

Ясно, что $r(x^{i_1} \dots x^{i_n}) < r(x)$ для любых $i_1, \dots, i_n$ таких, что $i_1 + \dots + i_n < r(x)$, и по индуктивному предположению такие операторы уже определены, в то время как $\text{ad}(x^{i_1} \dots x^{i_n})(x) \in \mathfrak{g}_-$ при $i_1 + \dots + i_n \geq r(x)$.

Эта теорема дает первый алгоритм явной реализации алгебры $\mathfrak{g}$ посредством дифференциальных операторов.

4.2. Второй алгоритм. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $S(\mathfrak{g}_-)$ отождествлено с $U(\mathfrak{g}_-)$ посредством канонической симметризации. Определим действие $x \in \mathfrak{g}_-$ на $S(\mathfrak{g}_-)$ формулами (3.11), а действие $x \in \mathfrak{g}_0$ на $S(\mathfrak{g}_-)$, полагая $D_x(y) = [x, y]$ (поскольку $[x, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_-$).

Пусть $x \in \mathfrak{g}_+$ – аналог простого корневого вектора, т.е. $[x, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$. Пусть $\mathfrak{g}_- = V_- \oplus V_0$, где V_- – прообраз $\mathfrak{g}_-$ и V_0 – прообраз $\mathfrak{g}_0$ относительно $\text{ad}(x)$. Пусть p_- и p_0 – проекции $\mathfrak{g}_-$ на V_- и V_0 .

Определим операторы

$$R_x(x_1) = [x, p_-(x_1)] \in \mathfrak{g}_-, \\ \widehat{D}_x^{(1)}(x_1) = [x, p_0(x_1)] \in \mathfrak{g}_0, \\ \widehat{D}_x^{(2)}(x_1, x_2) = [[x, p_0(x_1)], x_2] + [[x, p_0(x_2)], x_1] \in \mathfrak{g}_-, \quad (4.3) \\ \widehat{D}_x^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [[x, p_0(x_{\sigma(1)})], x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}] \in \mathfrak{g}_-, \\ \dots \dots \dots$$

С помощью правила Лейбница оператор R_x может быть единственным образом расширен до дифференцирования в алгебры $S(\mathfrak{g}_-)$, оператор $\widehat{D}_x^{(1)}$ может быть единственным образом расширен до дифференцирования из $S(\mathfrak{g}_-)$ в $U(\mathfrak{g}_0)$, а оператор $\widehat{D}_x^{(2)}$ – до дифференцирования 2-го порядка из $S(\mathfrak{g}_-)$ в $U(\mathfrak{g}_0)$ и т.д.

4.3. Третий алгоритм. Следующая теорема дает явные формулы вложения $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{diff}(n) \otimes U(\mathfrak{g}_0)$.

ТЕОРЕМА 3. *Отождествляя M с $S(\mathfrak{g}_-) \otimes U(\mathfrak{g}_0)$, получаем*

$$x \mapsto x + \sum_{i \geq 1} (-1)^i \frac{b_i}{i!} D_x^{(i)}, \quad \text{если} \quad x \in \mathfrak{g}_-, \\ x \mapsto 1 \otimes x + D_x \otimes 1, \quad \text{если} \quad x \in \mathfrak{g}_0, \quad (4.4) \\ x \mapsto R_x \otimes 1 + \widehat{D}_x^{(1)} + \sum_{i \geq 1} (-1)^i \frac{b_i}{i!} \widehat{D}_x^{(i+1)}, \quad \text{если} \quad x \in \mathfrak{g}_+ \quad \text{и} \quad [x, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x \in \mathfrak{g}_-$ теорема следует из (3.11). Если $x \in \mathfrak{g}_0$, то

$$\begin{aligned} x\omega(x_1 \dots x_k) &= \omega(x_1 \dots x_k)x + [x, \omega(x_1 \dots x_k)] = \\ &= \omega(x_1 \dots x_k)x + \sum_i \omega([x, x_i], x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_k), \end{aligned}$$

чем и исчерпывается доказательство в данном случае.

Если же $x \in \mathfrak{g}_+$ соответствует простому корню, то, применяя главный антиавтоморфизм обертывающей алгебры [32] к формуле (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \omega(x_1 \dots x_n)x &= \omega(xx_1 \dots x_n) + \frac{b_1}{1!} \sum_h \omega([x, x_h], x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n) - \\ &- \frac{b_2}{2!} \sum_h \omega([x, x_h], x_l], x_1 \dots \hat{x}_h \dots \hat{x}_l \dots x_n) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Далее с помощью проекций p_- и p_0 и формулы (4.3) имеем

$$\begin{aligned} x\omega(x_1 \dots x_n) &= \omega(x_1 \dots x_n)x + [x, \omega(x_1 \dots x_n)] = \sum_h \omega([x, x_h], x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n) = \\ &= \sum_h \omega([x, p_-(x_h) + p_0(x_h)], x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n) = \\ &= \sum_h \omega([x, p_-(x_h)], x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n) + \omega([x, p_0(x_h)], x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n) = \\ &= \sum_h \omega([x, p_-(x_h)], x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n) + \omega(x_1 \dots \hat{x}_h \dots x_n)[x, p_0(x_h)] - \\ &- \frac{b_1}{1!} \sum_{h,l} \omega([x, p_0(x_h)], x_l], x_1 \dots \hat{x}_h \dots \hat{x}_l \dots x_n) + \dots \end{aligned}$$

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Представление $\mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{vect}(1)$. Генераторы Шевалле алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ имеют вид

$$X^- = \frac{d}{dx}, \quad X^+ = x^2 \frac{d}{dx} + \lambda x. \quad (5.1)$$

Для $\mathfrak{vect}(1) = \mathfrak{der} \mathbb{C}[x]$ генераторы имеют вид

$$L(-1) = \frac{d}{dx}, \quad L(1) = x^2 \frac{d}{dx} + \lambda x, \quad L(2) = x^3 \frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \lambda x^2. \quad (5.2)$$

(В действительности генератор $L(1) = (1/3)[L(-1), L(2)]$ излишен, но мы включили его для удобства.)

5.2. Представление $\mathfrak{sl}(n)$. Выберем стандартный базис алгебры $\mathfrak{g}$, т.е. матричные единицы e_{ij} , положим $\deg e_{ij} = i - j$ и отождествим $T(V) := \text{coind}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+}^{\mathfrak{g}}(V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+}(U(\mathfrak{g}), V) \subset \mathbb{C}[[z_{ij} : i < j]]$. Перенос действия $\mathfrak{g}$ с $T(V)$ на $\mathbb{C}[[z_{ij} : i < j]]$ приводит нас к следующим формулам для генераторов Шевалле, которые мы заимствовали из [16] (ср. с рекуррентными формулами из [15]):

$$\begin{aligned} X_i^- &\mapsto \frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j \leq i-1} z_{ji} \frac{\partial}{\partial z_{j,i+1}}, \\ X_i^+ &\mapsto z_{i,i+1} \left((\lambda, \alpha_i) + \sum_{j \geq i+1} z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} - \sum_{j \geq i+2} z_{i+1,j} \frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}} \right) + \\ &\quad + \sum_{j \leq i-1} z_{j,i+1} \frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - \sum_{j \geq i+2} z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}}, \end{aligned}$$

где α_i – простые корни, λ – старший вес и $(\cdot, \cdot)$ – инвариантное скалярное произведение.

5.3. Представление $\mathfrak{vect}(n)$ при $n > 1$. Согласно [33] алгебра $\mathfrak{vect}(n) = \det \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ имеет те же образующие, что и алгебра $\mathfrak{sl}(n+1)$, плюс еще генератор

$$Y = x_n^2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Решая определяющие соотношения, приведенные в [33], получаем представление генератора Y (мы благодарны Братусу, который сделал это для нас)

$$Y = (-1)^n \left(2z_{n,n+1} \frac{\partial}{\partial z_{1,n}} + z_{n,n+1}^2 \frac{\partial}{\partial z_{1,n+1}} \right).$$

5.4. Представления $\mathfrak{osp}_{\alpha}(4|2)$. Рассмотрим матрицы Картана, соответствующие трем неэквивалентным системам простых корней в алгебре $\mathfrak{osp}_{\alpha}(4|2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & -1-\alpha \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-\alpha \\ -1 & 0 & -\alpha \\ -1-\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы предполагаем, что $[p_i, q_j] = \delta_{ij}$ и $\{b_l^+, b_k\} = \delta_{lk}$, где p_i и q_j – четные и b_l^+ и b_k – нечетные операторы рождения и уничтожения. Выражения для генераторов Шевалле имеют вид для первой системы корней:

$$\begin{aligned} X_1^+ &= p_1 - b_2 b_4^+ + b_5 b_6^+, \\ X_2^+ &= b_2^+, \\ X_3^+ &= p_3 - b_4 b_6^+ + b_2 b_5^+ - b_2 b_4 p_7, \\ X_1^- &= q_1 (\lambda_1 - q_1 p_1) - b_4 b_2^+ + b_6 b_5^+, \\ X_2^- &= b_2 \left[-\alpha b_4 b_4^+ + (1 + \alpha) b_5 b_5^+ + b_6 b_6^+ + q_7 p_7 + \lambda_2 + \frac{\alpha}{2} p_1 q_1 (\lambda_1 - q_1 p_1) - \right. \\ &\quad \left. - q_1 (\lambda_1 - q_1 p_1) p_1 - \frac{1 + \alpha}{2} p_3 q_3 (\lambda_3 - q_3 p_3) - q_3 (\lambda_3 - q_3 p_3) p_3 \right] - \\ &\quad - \alpha b_4 b_5 b_6^+ - b_6^+ q_7 - \alpha b_4 p_1 - (1 + \alpha) b_5 p_3, \\ X_3^- &= q_3 (\lambda_3 - q_3 p_3) + b_5 b_2^+ - b_6 b_4^+ + b_5 b_6 p_7. \end{aligned}$$

Генераторы для второй системы корней те же, за исключением

$$\begin{aligned} X_2^- = b_2 & \left[b_4 b_4^+ + \alpha b_5 b_5^+ + (1 + \alpha) b_6 b_6^+ + (1 + \alpha) q_7 p_7 + \lambda_2 - \right. \\ & - \frac{1}{2} (p_1 q_1 (\lambda_1 - q_1 p_1) - q_1 (\lambda_1 - q_1 p_1) p_1) - \\ & \left. - \frac{\alpha}{2} (p_3 q_3 (\lambda_3 - q_3 p_3) - q_3 (\lambda_3 - q_3 p_3) p_3) \right]. \end{aligned}$$

Генераторы для третьей системы простых корней следующие:

$$\begin{aligned} X_1^+ &= b_1^+ + b_2 p_4 + b_3 p_5 - \alpha b_7^+ q_6, \\ X_2^+ &= b_2^+ + b_3 p_6 + (1 + \alpha) b_7^+ q_5, \\ X_3^+ &= b_3^+, \\ X_1^- &= \lambda_1 b_1 - b_2^+ q_4 + (1 + \alpha) b_3^+ q_5 - b_7 p_6, \\ X_2^- &= b_2 (\lambda_2 + b_1 b_1^+ + q_4 p_4) + b_1^+ q_4 + \alpha b_3^+ q_6 + b_7 p_5, \\ X_3^- &= b_3 [(1 + \alpha) q_5 p_5 - \alpha q_6 p_6 + b_7 b_7^+ + \alpha (\lambda_1 - b_2 b_2^+ - q_4 p_4) + \\ & + (1 + \alpha) (\lambda_2 + b_1 b_1^+ + q_4 p_4) + \lambda_3] - \alpha (1 + \alpha) b_7^+ q_5 q_6 + \\ & + (1 + \alpha) q_5 (b_1^+ + b_2 p_4) - \alpha q_6 b_2^+ - b_7 p_4. \end{aligned}$$

Благодарности. Авторы благодарят за частичную финансовую поддержку NFR (ДЛ) и Шведский институт (ПГ).

Список литературы

- [1] *D. Leites, A. Sergeev.* Orthogonal polynomials of discrete variable and Lie algebras of complex size matrices, the talk at the conference at MPI, Bonn, in the memory of Misha Saveliev. Preprint MPI-1999-44. Bonn: MPI, 1999 (www.mpim-bonn.mpg.de).
- [2] *A. Klein, E. Marshalek.* Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. № 2. P. 375–558.
- [3] *A. Simoni, F. Zaccaria.* Nuovo Cimento A (10). 1969. V. 59. P. 280–292.
- [4] *M. Günaydin, C. SaHlioğlu.* Phys. Lett. B. 1982. V. 108. № 3. P. 180–186; *Commun. Math. Phys.* 1982/83. V. 87. № 2. P. 159–179; *I. Bars, M. Günaydin.* Commun. Math. Phys. 1983. V. 91. № 1. P. 31–51.
- [5] *Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy, M. Havlíček, Č. Burdík, A. A. Sakharuk.* The Dyson-type boson realizations for representations of the semisimple Lie algebras and superalgebras. In: Group Theoretical Methods in Physics. V. 1–3. Eds. M. A. Markov, V. I. Man'ko, A. E. Shabad. Chur: Harwood Academic Publ., 1985. P. 67–76.
- [6] *J. Beckers, Y. Brihaye, N. Debergh.* On realizations of nonlinear Lie algebras by differential operators. hep-th/9803253.
- [7] *M. Shifman, A. Turbiner.* Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 1791; hep-th/9806006.
- [8] *M. Kashiwara.* Asterisque. 1989. V. 173–174. P. 55–110.
- [9] *M. Havlíček, W. Lassner.* Rep. Math. Phys. 1977. V. 12. № 1. P. 1–8.
- [10] *M. Havlíček, W. Lassner.* Int. J. Theor. Phys. 1976. V. 15. № 11. P. 867–876.
- [11] *M. Havlíček, W. Lassner.* Rep. Math. Phys. 1975. V. 8. № 3. P. 391–399; 1976. V. 9. № 2. P. 177–185.
- [12] *Č. Burdík.* J. Phys. A. 1985. V. 18. № 16. P. 3101–3111.
- [13] *Č. Burdík.* Czech. J. Phys. B. 1986. V. 36. № 11. P. 1235–1241.
- [14] *Č. Burdík.* J. Phys. A. 1986. V. 19. № 13. P. 2465–2471.
- [15] *Č. Burdík.* J. Phys. A. 1988. V. 21. № 2. P. 289–295.

- [16] *P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 339–368.
- [17] *P. Cohen, Yu. Manin, D. Zagier.* Automorphic pseudodifferential operators Algebraic aspects of integrable systems. In memory of Irene Dorfman. In: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 26. Eds. A.S. Fokas et al. Boston, MA: Birkhauser Boston, 1997. P. 17–47.
- [18] *P. B. A. Lecomte, V. Yu. Ovsienko.* Projectively equivariant symbol calculus. math.DG/9809061.
- [19] *C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko.* Conformally equivariant quantization: Existence and uniqueness. math.DG/9902032.
- [20] *P. Grozman, D. Leites.* Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems. In: Proc. International Symposium on Complex Analysis and Related Topics (Cuernavaca, Mexico, November 18–22, 1996). Eds. R. De Arellano et al. Basel: Birkhäuser, 1999. P. 73–105.
- [21] *J. Blank, M. Havlíček, M. Bednář, W. Lassner.* Czech. J. Phys. B. 1981. V. 31. № 11. P. 1286–1301.
- [22] *J. Blank, M. Havlíček, P. Exner, W. Lassner.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 3. P. 350–353.
- [23] *J. Blank, M. Havlíček, M. Bednář, W. Lassner.* Czech. J. Phys. B. 1982. V. 32. № 6. P. 615–616.
- [24] *Č. Burdík, P. Exner, M. Havlíček.* Czech. J. Phys. B. 1981. V. 31. № 5. P. 459–469.
- [25] *P. Exner, M. Havlíček, W. Lassner.* Boson representations of classical Lie algebras. In: Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leipzig, 1977). Leipzig: Teubner, 1978. P. 277–278.
- [26] *P. Exner, M. Havlíček, W. Lassner.* Czech. J. Phys. B. 1976. V. 26. № 11. P. 1213–1228.
- [27] *M. Havlíček, P. Exner.* Ann. Inst. H. Poincaré. Sect. A. (N. S.). 1975. V. 23. № 4. P. 335–347; Czech. J. Phys. B. 1978. V. 28. № 9. P. 949–962.
- [28] *M. Havlíček, P. Exner.* Ann. Inst. H. Poincaré. Sect. A. (N. S.). 1975. V. 23. № 4. P. 313–333, 1213–1228.
- [29] *Č. Burdík, O. Navrátil, M. Thoma.* Czech. J. Phys. 1993. V. 43. № 7. P. 697–703.
- [30] *P. Grozman, D. Leites.* Mathematica-aided study of Lie algebras and their cohomology. From supergravity to ballbearings and magnetic hydrodynamics. In: The Second International Mathematica Symposium. Ed. V. Keränen. Southampton–Boston: Computation Mechanics, 1997. P. 185–192.
- [31] *A. Joseph.* Realizations in classical and quantum mechanics. Group theoretical methods in physics. In: Proc. Third Internat. Colloq., Centre Phys. Théor., Marseille, 1974. V. 1. Eds. H. Bacry, A. Grossmann. Marseille: Centre Nat. Recherche Sci., Centre Phys. Théor., 1974. P. 227–236; Commun. Math. Phys. 1974. V. 36. P. 325–338.
- [32] *Ж. Диксмье.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1997.
- [33] *D. Leites, E. Poletaeva.* Math. Scand. 1997. V. 81. № 1. P. 5–19.

Поступила в редакцию 9.II.2000 г.