Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра оператора Шредингера трех частиц на решетке, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 299–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 11:44:28

© 2009 г.

М. Э. Муминов*

О БЕСКОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА ЛАКУНЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается система трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Найдено условие появления лакуны существенного спектра и доказано существование бесконечного числа собственных значений в этой лакуне для гамильтониана соответствующей системы трех частиц.

Ключевые слова: трехчастичная система на решетке, оператор Шредингера, существенный спектр, дискретный спектр, компактный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование бесконечного числа собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра оператора Шредингера (эффект Ефимова [1]), изучалось в работах [2], [3]. Строгое математическое доказательство этого факта с помощью интегральных уравнений Фаддеева было впервые дано в работе [4]. Затем существование бесконечного числа связанных состояний для гамильтониана системы трех частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения установлено в работах [5], [6]. При нулевом значении полного квазиимпульса системы этот результат доказан в работах [7]–[9]. Конечность связанных состояний дискретного оператора Шредингера трех частиц доказана в работах [8], [9] при малых значениях полного квазиимпульса $K \neq 0$. Заметим, что в работах [9], [10] бесконечное число собственных значений появляется ниже существенного спектра, если два из трех двухчастичных подгамильтонианов имеют виртуальные уровни в нуле, а нуль является регулярной точкой для третьего гамильтониана, или все двухчастичные подгамильтонианы имеют виртуальные уровни в нуле.

Отметим, что непрерывный спектр трехчастичного (непрерывного) оператора Шредингера совпадает с полуосью $[-\kappa^2, \infty)$, $\kappa \geq 0$ (см. [11]). В отличие от существенного спектра трехчастичного непрерывного оператора Шредингера, существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ трехчастичного дискретного оператора Шрединге-

*Самаркандский государственный университет им. Алишера Навои, Самарканд, Узбекистан. E-mail: mmuminov@mail.ru

ра $H(K)$ может содержать лакуны, т.е. существует интервал (a, b) , $\inf \sigma_{\text{ess}}(H(K)) \leq a < b \leq \sup \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, такой, что $(a, b) \cap \sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \emptyset$.

В настоящей работе рассматривается система трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Рассмотрен случай, когда два двухчастичных подгамильтониана имеют виртуальные уровни в нуле и нуль является регулярной точкой для третьего подгамильтониана, при этом существенный спектр оператора $H(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, содержит лакуну $(b, 0)$. Для каждого действительного z , лежащего вне существенного спектра $H(K)$, построен самосопряженный компактный оператор $\mathbf{T}(z)$ такой, что точки разрыва функции $n(1, \mathbf{T}(\cdot))$ являются собственными значениями оператора $H(K)$, где $n(1, \mathbf{T}(z))$ – число собственных значений оператора $\mathbf{T}(z)$, лежащих правее единицы. Доказывается, что функция $n(1, \mathbf{T}(\cdot))$ при нулевом значении полного квазиимпульса K имеет в интервале $(b, 0)$ бесконечное число точек разрыва, т.е. доказано существование бесконечного числа собственных значений $H(\mathbf{0})$ на лакуне существенного спектра.

В настоящей работе через C, C', C'' обозначены положительные постоянные, которые могут иметь разные значения, через $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ – операторы, заданные некоторыми операторными матрицами; также $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, $pq = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$, $p, q \in \mathbb{T}^3$.

2. ОПИСАНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка и $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^3$. Свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы трех произвольных квантовых частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$ определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m_1} \Delta_{x_1} + \frac{1}{2m_2} \Delta_{x_2} + \frac{1}{2m_3} \Delta_{x_3},$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_3} = I \otimes I \otimes \Delta$; $m_\alpha > 0$ – масса частицы, $\alpha = 1, 2, 3$; Δ – решетчатый лапласиан, который является разностным оператором, описывающим перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x+s)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3).$$

Трехчастичный гамильтониан $\hat{H}$ системы трех квантовых частиц с парными контактными потенциалами определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{H}_0$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu_1 \hat{V}_1 - \mu_2 \hat{V}_2 - \mu_3 \hat{V}_3,$$

где

$$(\hat{V}_\alpha \psi)(n_1, n_2, n_3) = \delta_{n_\beta n_\gamma} \psi(n_1, n_2, n_3), \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\},$$

$\mu_\alpha > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, δ_{nm} – символ Кронекера.

Пусть $L_2((\mathbb{T}^3)^n)$, $n = 1, 2, 3$, – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^n$, $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$.

С помощью преобразования Фурье и разложения в прямой операторный интеграл [9], [10] изучение спектральных свойств оператора $\hat{H}$ сводится к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - V, \quad V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3,$$

где $H_0(K)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_K(p, q) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(q) + \frac{1}{m_3} \varepsilon(K - p - q), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)}),$$

и

$$\begin{aligned} (V_1 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, s) ds, & (V_2 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, q) ds, \\ (V_3 f)(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s, p + q - s) ds, & f &\in L_2((\mathbb{T}^3)^2). \end{aligned}$$

Введем оператор Шредингера $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, соответствующий двухчастичному гамильтониану на решетке [10], действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h_\alpha(k) = h_0^\alpha(k) - \mu_\alpha v, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где $h_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию $(1/m_\beta)\varepsilon(p) + (1/m_\gamma)\varepsilon(k - p)$ и

$$(v f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds.$$

Легко проверить [10], что число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(k))$ является собственным значением оператора $h_\alpha(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu_\alpha}(k; z) = 0$, где

$$\Delta_{\mu_\alpha}(k; z) = 1 - \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{(1/m_\beta)\varepsilon(q) + (1/m_\gamma)\varepsilon(k - q) - z}.$$

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что оператор $h_\alpha(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{T}^3$, имеет *резонанс* (виртуальный уровень) в нуле, если уравнение

$$\varphi(p) = \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^3} \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(s) ds}{\varepsilon(s)} \quad (2.1)$$

имеет единственное нетривиальное решение $\psi_\alpha \in C(\mathbb{T}^3)$, удовлетворяющее условию $\psi_\alpha(\mathbf{0}) \neq 0$ (см. также [4], [10]).

Простое вычисление показывает, что оператор $h_\alpha(\mathbf{0})$ имеет резонанс в нуле тогда и только тогда, когда $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, где

$$\mu_\alpha^0 = 8\pi^3 \frac{m_\beta + m_\gamma}{m_\beta m_\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(s)} \right)^{-1}.$$

Если уравнение (2.1) не имеет решения, то $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $h_\alpha(\mathbf{0})$. В этом случае нуль называется *регулярной точкой* оператора $h_\alpha(\mathbf{0})$ (см. [12]).

Оператор $H_\alpha(K) = H_0(K) - V_\alpha$ называется *канальным оператором* и представляется в виде прямого интеграла [9], [10]:

$$H_\alpha(K) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \left[\tilde{h}_\alpha(K - p) + \frac{1}{m_\alpha} \varepsilon(p) \right] dp,$$

где оператор $\tilde{h}_\alpha(p)$ унитарно эквивалентен оператору $h_\alpha(p)$.

Отсюда и из теоремы о спектре тензорных произведений операторов имеем

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \left[\sigma(h_\alpha(K - p)) \cup \left\{ \frac{1}{m_\alpha} \varepsilon(p) \right\} \right]. \quad (2.2)$$

Из теоремы Вейля о существенном спектре [13] следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(k))$ оператора $h_\alpha(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mu_\alpha v$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0^\alpha(k)$. При этом $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(k))$ совпадает с областью значения функции $(1/m_\beta)\varepsilon(\cdot) + (1/m_\gamma)\varepsilon(k - \cdot)$, т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(k)) = \sigma(h_0^\alpha(k)) = [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k) = \min_p \left[\frac{1}{m_\beta} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_\gamma} \varepsilon(k - p) \right], \quad \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k) = \max_p \left[\frac{1}{m_\beta} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_\gamma} \varepsilon(k - p) \right].$$

Поэтому в силу (2.2) имеем

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \left(\left[\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K - p) + \frac{1}{m_\alpha} \varepsilon(p), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(K - p) + \frac{1}{m_\alpha} \varepsilon(p) \right] \cup \sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(K - p)) \right),$$

или

$$\sigma(H_\alpha(K)) = [m_K, M_K] \cup \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(K - p)), \quad (2.3)$$

где $m_K = \min_{p,q} \mathcal{E}_K(p, q)$, $M_K = \max_{p,q} \mathcal{E}_K(p, q)$.

Следующая лемма доказана в работе [10].

ЛЕММА 1. Для любого $K \in \mathbb{T}^3$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров операторов каналов $H_\alpha(K)$, т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K)) \cup \sigma(H_3(K)).$$

Теперь сформулируем основные результаты настоящей работы.

Пусть $W_\alpha(z)$ – оператор умножения на функцию $[\Delta_{\mu_\alpha}(K - p_\alpha; z - (1/m_i)\varepsilon(p_\alpha))]^{-1}$, $\alpha = 1, 2, 3$, где $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = K - p$, $p, q \in \mathbb{T}^3$. Из монотонности функции $\Delta_{\mu_\alpha}(k; z)$ по z и неравенства $\Delta_{\mu_\alpha}(k; z) > 0$ при $z < \inf \sigma(h_\alpha(k))$ следует неравенство $\Delta_{\mu_\alpha}(p; z - (1/m_\alpha)\varepsilon(p)) > 0$ для всех $z < \inf \sigma(h_\alpha(p))$ и $p \in \mathbb{T}^3$. Отсюда и из равенства (2.3) следует, что $W_\alpha(z)$ является положительным оператором при всех $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H_\alpha(K))$.

Определим оператор $\mathbf{T}(z)$, $z < \inf \{\sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K))\}$, $z \notin \sigma(H_3(K))$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$, заданный матрицей

$$\mathbf{T}(z) = \begin{pmatrix} 0 & W_1^{1/2}(z)K_{12}(z)W_2^{1/2}(z) \\ W_2^{1/2}(z)K_{21}(z)W_1^{1/2}(z) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где $T_{ij}(z) = W_i^{1/2}(z)K_{i3}(z)W_3(z)K_{3j}(z)W_j^{1/2}(z)$, $K_{ij}(z)$ – интегральный оператор, порожденный ядром $K_{ij}(z; p, p')$, такой, что $K_{ij}(z) = [K_{ji}(z)]^*$,

$$K_{12}(z; p, p') = \frac{(2\pi)^{-3} \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mathcal{E}_K(p, p') - z}, \quad K_{13}(z; p, p') = \frac{(2\pi)^{-3} \sqrt{\mu_1 \mu_3}}{\mathcal{E}_K(p, p' - p) - z},$$

$$K_{23}(z; p, p') = \frac{(2\pi)^{-3} \sqrt{\mu_2 \mu_3}}{\mathcal{E}_K(p' - p, p) - z}.$$

Пусть $n(\lambda, A)$ – число собственных значений (с учетом кратности) самосопряженного оператора A , лежащих правее λ , $\lambda > \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$.

ЛЕММА 2. Число $z_0 < \inf \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K))$ при $z_0 \notin \sigma(H_3(K))$ является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда функция $n(1, \mathbf{T}(z))$ имеет разрыв в точке $z = z_0$.

Пусть m – положительное число. Положим

$$\mu_3^* = (2\pi)^3 \left[\min_k \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{(1/m_1)\varepsilon(q) + (1/m_2)\varepsilon(k - q) + m} \right]^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$, $\mu_3 > \mu_3^*$. Тогда существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0}))$ содержит лакуны, точнее $\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0})) = [a_3, b_3] \cup [0, M_0]$, $a_3 < b_3 < -m$.

2. Пусть $\mu_1 = \mu_1^0$, $\mu_2 = \mu_2^0$, $\mu_3 > \mu_3^*$. Тогда оператор $H(\mathbf{0})$ в лакуне существенного спектра $(b_3, 0)$ имеет бесконечное число собственных значений.

Приведем схему доказательства этой теоремы. Для доказательства утверждения 1 теоремы 1 используется лемма 1. В разделах 3 и 4 доказывается лемма 2, которая играет важную роль при доказательстве утверждения 2 теоремы 1. В разделе 5 с помощью лемм 9–13 показано, что функция $n(1, \mathbf{T}(\cdot))$ имеет бесконечное число точек разрыва в $(b_3/2, 0)$, при этом из леммы 2 следует доказательство утверждения 2 теоремы 1.

3. УРАВНЕНИЕ ФАДДЕЕВА ДЛЯ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

При каждом $z \notin \sigma(H_{\text{ess}}(K))$ определим операторы $\mathbf{B}(z)$ и $\mathbf{A}(z)$ соответственно в гильбертовых пространствах $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$ и $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)$, заданные матрицами

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z) &= \begin{pmatrix} 0 & W_1(z)K_{12}(z) \\ W_2(z)K_{21}(z) & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} W_1(z)K_{13}(z)W_3(z)K_{31}(z) & W_1(z)K_{13}(z)W_3(z)K_{32}(z) \\ W_2(z)K_{23}(z)W_3(z)K_{31}(z) & W_2(z)K_{23}(z)W_3(z)K_{32}(z) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(z) &= \begin{pmatrix} 0 & W_1(z)K_{12}(z) & W_1(z)K_{13}(z) \\ W_2(z)K_{21}(z) & 0 & W_2(z)K_{23}(z) \\ W_3(z)K_{31}(z) & W_3(z)K_{32}(z) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда компактный оператор $\mathbf{B}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, причем кратности чисел z и 1 совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ – собственное значение оператора $H(K)$, f – соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение $H(K)f = zf$ имеет нетривиальное решение f . Поскольку при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператор $R_0(z)$ ограничен в $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$, имеем

$$f = R_0(z)Vf. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что число z является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда единица является собственным значением $R_0(z)V$, причем кратности чисел z и 1 совпадают. Положим

$$\varphi_\alpha = \sqrt{\mu_\alpha} V_\alpha f, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Из равенства (3.1) имеем

$$f(p, q) = \frac{1}{\mathcal{E}_K(p, q) - z} [\sqrt{\mu_1} \varphi_1(p) + \sqrt{\mu_2} \varphi_2(q) + \sqrt{\mu_3} \varphi_3(p + q)]. \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.3) в (3.2), получаем, что функции φ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} (W_\alpha^{-1}(z)\varphi_1)(p) &= \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(2\pi)^3} \int \frac{\varphi_2(p') dp'}{\mathcal{E}_K(p, p') - z} + \frac{\sqrt{\mu_1\mu_3}}{(2\pi)^3} \int \frac{\varphi_3(p + p') dp'}{\mathcal{E}_K(p, p') - z}, \\ (W_\alpha^{-1}(z)\varphi_2)(q) &= \frac{\sqrt{\mu_2\mu_1}}{(2\pi)^3} \int \frac{\varphi_1(p') dp'}{\mathcal{E}_K(p', q) - z} + \frac{\sqrt{\mu_2\mu_3}}{(2\pi)^3} \int \frac{\varphi_3(p' + q) dp'}{\mathcal{E}_K(p', q) - z}, \\ (W_\alpha^{-1}(z)\varphi_3)(p + q) &= \frac{\sqrt{\mu_3\mu_1}}{(2\pi)^3} \int \frac{\varphi_1(p') dp'}{\mathcal{E}_K(p', p + q - p') - z} + \\ &+ \frac{\sqrt{\mu_3\mu_2}}{(2\pi)^3} \int \frac{\varphi_2(p + q - p') dp'}{\mathcal{E}_K(p', p + q - p') - z}. \end{aligned}$$

Пользуясь периодичностью подынтегральных функций в этой системе уравнений, производя замену переменных $p + p' = s$, $p' + q = s$ и $p + q - p' = s'$ во вторых подынтегральных выражениях и учитывая, что $\Delta_{\mu\alpha}(z; p) \neq 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, $p \in \mathbb{T}^3$, убеждаемся, что φ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= W_1(z)K_{12}(z)\varphi_2 + W_1(z)K_{13}(z)\varphi_3, \\ \varphi_2 &= W_2(z)K_{21}(z)\varphi_1 + W_2(z)K_{23}(z)\varphi_3, \\ \varphi_3 &= W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2,\end{aligned}\tag{3.4}$$

или

$$\Phi = \mathbf{A}(z)\Phi, \quad \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

При этом вектор f , определенный по формуле (3.3), является собственным вектором оператора $R_0(z)V$, соответствующим собственному значению 1, тогда и только тогда, когда $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ является собственным вектором оператора $\mathbf{A}(z)$, соответствующим собственному значению 1. Количества таких линейно независимых собственных векторов f и Φ совпадают. Поэтому кратности собственного значения 1 операторов $\mathbf{A}(z)$ и $R_0(z)V$ совпадают.

Подставляя выражение для φ_3 в первое и второе равенства в (3.4), получаем

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= W_1(z)K_{12}(z)\varphi_2 + W_1(z)K_{13}(z)(W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2), \\ \varphi_2 &= W_2(z)K_{21}(z)\varphi_1 + W_2(z)K_{23}(z)(W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2),\end{aligned}\tag{3.5}$$

или

$$\mathbf{B}(z)\Psi = \Psi, \quad \Psi = (\varphi_1, \varphi_2),$$

т.е. число 1 является собственным значением оператора $\mathbf{B}(z)$.

И наоборот, если 1 – собственное значение, а $\Psi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – соответствующая собственная функция оператора $\mathbf{B}(z)$, то число 1 является собственным значением оператора $\mathbf{A}(z)$, соответствующим собственному вектору $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, где $\varphi_3 = W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2$. Легко проверить, что количества линейно независимых решений уравнений (3.4) и (3.5) совпадают. Следовательно, кратности собственного значения 1 операторов $\mathbf{A}(z)$ и $\mathbf{B}(z)$ совпадают.

Ядро интегрального оператора $K_{ij}(z)$ при каждом $z \notin \sigma(H_0(K))$ является непрерывной функцией в $(\mathbb{T}^3)^2$, поэтому $K_{ij}(z)$ принадлежит классу операторов со следом. Отсюда и из ограниченности оператора $W_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, вытекает, что каждый элемент матричных операторов $\mathbf{A}(z)$ и $\mathbf{B}(z)$ принадлежит классу операторов со следом. Следовательно, операторы $\mathbf{A}(z)$ и $\mathbf{B}(z)$ принадлежат классу операторов со следом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение $\mathbf{A}(z)\Phi = \Phi$ есть аналог уравнения Фаддеева, которое получено для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера [3].

Оператор-функция $\mathbf{B}(z)$ является аналитической при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ и $\mathbf{B}(z)$ является оператором со следом, поэтому детерминант $D(\lambda, z)$ оператора $\mathbf{E} - \lambda^{-1}\mathbf{B}(z)$ определен и аналитичен при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ и $\lambda \neq 0$, где $\mathbf{E}$ – единичный оператор, действующий в $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$. Из теоремы XIII.105 в монографии [13] вытекает

ЛЕММА 4. Число $\lambda \neq 0$ является собственным значением оператора $\mathbf{B}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, тогда и только тогда, когда $D(\lambda, z) = 0$.

Из лемм 3 и 4 вытекает

ЛЕММА 5. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда $D(1, z) = 0$.

4. ПРИНЦИП БИРМАНА–ШВИНГЕРА

В этом разделе докажем лемму 2, необходимую для доказательства основного результата.

ЛЕММА 6. Каждое ненулевое собственное значение оператора $\mathbf{B}(z)$ при $z < \inf\{\sigma_1(H(K)) \cup \sigma_2(H(K))\}$, $z \notin \sigma_3(H(K))$, является собственным значением оператора $\mathbf{T}(z)$ с той же кратностью. При этом число $z < \inf\{\sigma_1(H(K)) \cup \sigma_2(H(K))\}$, $z \notin \sigma_3(H(K))$, является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathbf{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, причем кратности собственных значений z и 1 совпадают (принцип Бирмана–Швингера).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства $z < \inf\{\sigma_1(H(K)) \cup \sigma_2(H(K))\}$ следует, что $W_\alpha(z) > 0$, $\alpha = 1, 2$. Представим оператор $\mathbf{B}(z)$ в виде

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{W}^{1/2}(z) [\mathbf{B}_0(z) + \mathbf{B}_1(z)],$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{1/2}(z) &= \begin{pmatrix} W_1^{1/2}(z) & 0 \\ 0 & W_2^{1/2}(z) \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_0(z) &= \begin{pmatrix} 0 & W_1^{1/2}(z)K_{12}(z) \\ W_2^{1/2}(z)K_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_1(z) &= \begin{pmatrix} W_1^{1/2}(z)K_{13}(z)W_3(z)K_{31}(z) & W_1^{1/2}(z)K_{13}(z)W_3(z)K_{32}(z) \\ W_2^{1/2}(z)K_{23}(z)W_3(z)K_{31}(z) & W_2^{1/2}(z)K_{23}(z)W_3(z)K_{32}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением BA с той же кратностью (см. [14]), собственное значение оператора $\mathbf{B}(z)$, равное единице, является собственным значением оператора $[\mathbf{B}_0(z) + \mathbf{B}_1(z)]\mathbf{W}^{1/2}(z) = \mathbf{T}(z)$ с той же кратностью.

ТЕОРЕМА 2. Число $z_0 < \inf\{\sigma_1(H(K)) \cup \sigma_2(H(K))\}$, $z_0 \notin \sigma_3(H(K))$, является регулярной точкой оператора $H(K)$, если и только если функция $n(1, \mathbf{T}(z))$ является непрерывной в точке $z = z_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что $z = z_0$ – регулярная точка оператора $H(K)$. Тогда из леммы 6 вытекает, что оператор $\mathbf{E} - \mathbf{T}(z_0)$ обратим. Из непрерывности оператор-функции $\lambda^{-1}\mathbf{T}(z)$ по (λ, z) в $(0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ и компактности $\mathbf{T}(z)$ вытекает, что оператор $\mathbf{E} - \lambda^{-1}\mathbf{T}(z)$ является обратимым при всех (λ, z) , лежащих в некоторой окрестности точки $(1, z_0)$. Поэтому для некоторого $\rho > 0$ получаем $\sigma(\mathbf{T}(z)) \cap (1 - \rho, 1 + \rho) = \emptyset$ при всех $z \in [z_0 - \rho, z_0 + \rho]$. Отсюда по определению функции $n(a, \mathbf{T}(z))$ для всех ξ и $\delta \in [0, z_0 + \rho)$ имеем

$$n(1 \pm \delta, \mathbf{T}(z_0 \pm \xi)) = n(1, \mathbf{T}(z_0 \pm \xi)).$$

Далее, пользуясь неравенством Вейля $n(a+b, A+B) \leq n(a, A) + n(b, B)$ для компактных операторов A, B [15], для некоторого $\eta_0 \in (0, \delta)$ и всех малых $\xi > 0$ получаем

$$n(1 + \eta_0, \mathbf{T}(z_0 \pm \xi)) \leq n(1, \mathbf{T}(z_0)) + n(\eta_0, \mathbf{T}(z_0 \pm \xi) - \mathbf{T}(z_0)) = n(1, \mathbf{T}(z_0)).$$

Рассуждая аналогично, при малых $\xi > 0$ получаем обратное неравенство

$$n(1, \mathbf{T}(z_0)) = n(1 + \eta_0, \mathbf{T}(z_0)) \leq n(1, \mathbf{T}(z_0 \pm \xi)).$$

Поэтому для всех малых $\xi > 0$ имеет место равенство $n(1, \mathbf{T}(z_0 \pm \xi)) = n(1, \mathbf{T}(z_0))$, т.е. функция $n(1, \mathbf{T}(z))$ непрерывна в точке $z = z_0$.

Достаточность. Предположим обратное. Пусть функция $n(1, \mathbf{T}(z))$ непрерывна в точке $z_0 < \inf\{\sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K))\}$, $z_0 \notin \sigma_3(H(K))$, z_0 – дискретное собственное значение оператора $H(K)$.

Рассуждая как и выше и используя неравенство Вейля, получаем, что для некоторого $\delta_0 > 0$, $c_0 = c_0(\delta_0) > 0$ и для всех $\varepsilon \in [-c_0, c_0]$ выполняются равенства

$$n(1, \mathbf{T}(z_0)) = n(1 + \delta_0, \mathbf{T}(z_0)) = n(1 + \delta_0/4, \mathbf{T}(z_0 + \varepsilon)). \quad (4.1)$$

В силу леммы 5 $D(1, z_0) = 0$. Пусть Γ_δ – граница комплексной δ -окрестности $U_\delta(z_0)$ точки z_0 . При этом в силу малости δ для всех $z \in \Gamma_\delta$ имеет место $D(1, z) \neq 0$. Положим

$$d = \min_{z \in \Gamma_\delta} |D(1, z)|, \quad \psi_\varepsilon(z) = D(1 + \varepsilon, z) - D(1, z).$$

Поскольку функция $D(\lambda, z)$ является непрерывной, существует число $\rho = \rho(\delta) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$ и $z \in \Gamma_\delta$ выполняется неравенство $|\psi_\varepsilon(z)| < d$. Таким образом, для каждого фиксированного $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$ функции $D(1, z)$ и $\psi_\varepsilon(z)$, определенные на $\bar{U}_\delta(z_0)$, удовлетворяют условиям теоремы Руше. Поэтому количества нулей функций $D(1, z)$ и $D(1 + \varepsilon, z)$, лежащих в $U_\delta(z_0)$, совпадают. Пусть $D(1 + \varepsilon, z_\varepsilon) = 0$, $\varepsilon > 0$. В силу леммы 4 число $1 + \varepsilon$ есть собственное значение оператора $\mathbf{B}(z_\varepsilon)$, поэтому с учетом предложения (см. ниже) z_ε является вещественным. В силу леммы 6 для всех $\varepsilon \in (0, \rho')$ число $1 + \varepsilon$ является собственным значением оператора $\mathbf{T}(z_\varepsilon)$. Отсюда и из равенства (4.1) для всех $\varepsilon \in (0, \rho')$ имеем

$$\begin{aligned} n(1, \mathbf{T}(z_\varepsilon)) - n(1, \mathbf{T}(z_0)) &\geq n\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, \mathbf{T}(z_\varepsilon)\right) - n(1, \mathbf{T}(z_0)) \geq \\ &\geq 1 + n\left(1 + \frac{\delta_0}{4}, \mathbf{T}(z_\varepsilon)\right) - n(1, \mathbf{T}(z_0)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $n(1, \mathbf{T}(z_0)) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n(1, \mathbf{T}(z_\varepsilon))$, т.е. функция $n(1, \mathbf{T}(z))$ не является непрерывной в точке $z = z_0$, что противоречит нашему предположению.

Отметим, что оператор $\mathbf{B}(z)$ определен при каждом $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H(K))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что число $\lambda > 1$ является собственным значением оператора $\mathbf{B}(z)$, $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H(K))$. Тогда $\text{Im } z = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Psi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda > 1$ оператора $\mathbf{B}(z)$, $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H(K))$:

$$\begin{aligned} \lambda \varphi_1 &= W_1(z)K_{12}(z)\varphi_2 + W_1(z)K_{13}(z)(W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2), \\ \lambda \varphi_2 &= W_2(z)K_{21}(z)\varphi_1 + W_2(z)K_{23}(z)(W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2). \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\varphi_3 = W_3(z)K_{31}(z)\varphi_1 + W_3(z)K_{32}(z)\varphi_2$ и учитывая существование оператора $W_i^{-1}(z)$, $i = 1, 2, 3$, при $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, имеем

$$\begin{aligned}\lambda\varphi_1 &= \lambda K_{11}(z)\varphi_1 + K_{12}(z)\varphi_2 + K_{13}(z)\varphi_3, \\ \lambda\varphi_2 &= K_{21}(z)\varphi_2 + \lambda K_{22}(z)\varphi_1 + K_{23}(z)\varphi_3, \\ \varphi_3 &= K_{31}(z)\varphi_1 + K_{32}(z)\varphi_2 + K_{33}(z)\varphi_3,\end{aligned}\tag{4.2}$$

где K_{11} , K_{22} , K_{33} – операторы умножения соответственно на функции

$$\frac{\mu_1}{(2\pi)^3} \int \frac{dq'}{\mathcal{E}_K(p, q') - z}, \quad \frac{\mu_2}{(2\pi)^3} \int \frac{dp'}{\mathcal{E}_K(p', q) - z}, \quad \frac{\mu_3}{(2\pi)^3} \int \frac{dp'}{\mathcal{E}_K(p', p - p') - z}.$$

Равенства (4.2) запишем в операторной форме

$$\mathbf{A}_\lambda \Phi = \mathbf{K}_\lambda(z) \Phi, \quad \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Выделяя вещественные и мнимые части функции $(\mathcal{E}_K(p, q) - z)^{-1}$, оператор $\mathbf{K}_\lambda(z)$ можно представить через самосопряженные операторы $\mathbf{L}_\lambda$ и $\mathbf{M}_\lambda$ в виде

$$\mathbf{K}_\lambda(z) = \mathbf{L}_\lambda + i \operatorname{Im} z \mathbf{M}_\lambda,$$

где элементы M_{ij} операторной матрицы $\mathbf{M}_\lambda$ действуют в пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формулам

$$\begin{aligned}(M_{11}\varphi)(p) &= \lambda\mu_1 \int M(p, s) ds \varphi(p), & (M_{22}\varphi)(q) &= \lambda \int M(s, q) ds \varphi(q), \\ (M_{33}\varphi)(p) &= \mu_3 \int M(s, p - s) ds \varphi(p), & (M_{12}\varphi)(p) &= \sqrt{\mu_1\mu_2} \int M(p, s) \varphi(s) ds, \\ (M_{13}\varphi)(p) &= \sqrt{\mu_1\mu_3} \int M(p, s - p) \varphi(s) ds, & (M_{23}\varphi)(q) &= \sqrt{\mu_2\mu_3} \int M(s - q, q) \varphi(s) ds,\end{aligned}$$

$M_{21} = M_{12}^*$, $M_{31} = M_{13}^*$, $M_{32} = M_{23}^*$, где

$$M(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\mathcal{E}_K(p, q) - \operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Умножая скалярно равенство $\mathbf{A}_\lambda \Phi = \mathbf{L}_\lambda \Phi + i \operatorname{Im} z \mathbf{M}_\lambda \Phi$ на вектор Φ и учитывая самосопряженность операторов $\mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{L}_\lambda$ и $\mathbf{M}_\lambda$, получаем

$$\operatorname{Im} z (\mathbf{M}_\lambda \Phi, \Phi) = 0.\tag{4.3}$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$|(M_{ij}\varphi_i, \varphi_j)|^2 \leq (M_{ii}\varphi_i, \varphi_i)(M_{jj}\varphi_j, \varphi_j).$$

Отсюда и из соотношения $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) \neq (0, 0)$ вытекает, что $(\mathbf{M}_1 \Phi, \Phi) > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_\lambda \Phi, \Phi) &> (\mathbf{M}_\lambda \Phi, \Phi) - (\mathbf{M}_1 \Phi, \Phi) = \\ &= (\lambda - 1) \iint M(p, s) |\varphi_1(p)|^2 ds + (\lambda - 1) \iint M(s, q) ds |\varphi_2(q)|^2 dq \geq 0,\end{aligned}$$

поэтому из равенства (4.3) имеем $\operatorname{Im} z = 0$.

Доказательство леммы 2 следует из теоремы 2.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем возможность появления лакуны существенного спектра оператора $H(\mathbf{0})$.

ЛЕММА 7. 1. Пусть $\mu_3 > \mu_3^*$. Тогда для всех $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_3(k)$ имеет единственное собственное значение, меньшее $-m$.

2. Пусть $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Тогда для всех $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $h_\alpha(k)$ не имеет собственных значений ниже нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что функция $\Delta_{\mu_3}(k; \cdot)$ имеет единственный нуль, меньший $-m$. Из монотонности функции $\Delta_{\mu_3}(k; z)$ по z и μ_3 для всех $z \in (-m, 0)$ получаем

$$\Delta_{\mu_3}(k; z) \leq \Delta_{\mu_3}(k; -m) \leq \Delta_{\mu_3^*}(k; -m) \leq 0.$$

В силу $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_{\mu_3}(k; z) = 1$ существует $z_1 < -m$ такое, что $\Delta_{\mu_3}(k; z_1) > 0$. Поскольку $\Delta_{\mu_3}(k; z)$ является непрерывной функцией (по z) и на концах сегмента $[z_1, -m]$ принимает значения разных знаков, она обращается в нуль в некоторой точке $z_3(k) \in (z_1, -m)$, которая в силу монотонности единственна. Следовательно, оператор $h_3(k)$ имеет единственное собственное значение, меньшее $-m$.

2. Отметим, что

$$\max_k \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_\alpha(k; q) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_\alpha(\mathbf{0}; q) - z} < \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_\alpha(\mathbf{0}; q)} = \frac{1}{\mu_\alpha^0}, \quad z < 0.$$

Поэтому для всех $k \in \mathbb{T}^3$ и $z < 0$ имеем $\Delta_{\mu_\alpha}(k; z) \geq \Delta_{\mu_\alpha}(\mathbf{0}; z) > 1 - \mu_\alpha/\mu_\alpha^0 \geq 0$ при $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Отсюда следует утверждение 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1 ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mu_\alpha \leq \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Тогда согласно утверждению 2 леммы 7 из равенства (2.3) имеем $\sigma(H_\alpha(\mathbf{0})) = [0, M_0]$ при $\alpha = 1, 2$. Пусть $\mu_3 > \mu_3^*$. Тогда в силу леммы 7 для каждого $k \in \mathbb{T}^3$ существует $z_3(k) < -m$ такое, что $\Delta_{\mu_3}(k; z_3(k)) = 0$. Функция $\Delta_{\mu_3}(\cdot; z)$ является дифференцируемой в $\mathbb{T}^3$, поэтому $z_3(k)$ является непрерывной в $\mathbb{T}^3$. Отсюда имеем $\bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_3(p)) = [a_3, b_3]$, где $a_3 = \inf_p z_3(p)$, $b_3 = \sup_p z_3(p) < -m$. Согласно равенству (2.3) получаем $\sigma(H_3(\mathbf{0})) = [0, M_0] \cup [a_3, b_3]$. В результате из леммы 1 имеем $\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{0})) = [0, M_0] \cup [a_3, b_3]$.

Ниже мы докажем утверждение 2 теоремы 1.

В работе [10] с учетом невырожденности точки минимума для функции $\varepsilon(\cdot)$ и с помощью леммы Морса после некоторых вычислений доказывается

ЛЕММА 8. Пусть $\mu_3 > \mu_3^*$, $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $p_\alpha \in U_\delta(\mathbf{0}) = \{p \in \mathbb{T}^3: |p| < \delta\}$ функция $\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_\alpha(p_\alpha))$ представляется в виде

$$\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_\alpha(p_\alpha)) = \frac{\mu_\alpha}{\sqrt{2\pi}} l_\alpha^{3/2} \sqrt{\frac{1}{2n_\alpha} p_\alpha^2 - z} + O(|p_\alpha|^2) + o(|z|), \quad |z| \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

где $l_\alpha = m_\alpha m_\beta / (m_\beta + m_\gamma)$, $n_\alpha = m_\alpha (m_\beta + m_\gamma) / (m_1 + m_2 + m_3)$.

ЛЕММА 9. Пусть $\mu_3 > \mu_3^*$, $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Тогда операторнозначные функции $T_{\alpha\beta}(z)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, являются непрерывными в смысле операторной топологии в $(b_3, 0)$ и $\lim_{z \rightarrow -0} T_{\alpha\beta}(z) = T_{\alpha\beta}(0)$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mu_3 > \mu_3^*$, согласно лемме 7 $\sigma(H_3(\mathbf{0})) = [a_3, b_3] \cup [0, M_0]$, $b_3 < 0$. Поэтому для каждого $p \in \mathbb{T}^3$ существует $z_0 \in [a_3, b_3]$ такое, что $\Delta_{\mu_3}(\mathbf{0} - p; z_0 - (1/m_3)\varepsilon(p)) = 0$. Из монотонности функции $\Delta_{\mu_3}(\mathbf{0} - p; z - (1/m_3)\varepsilon(p))$ по $z \in (-\infty, 0)$ вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что для всех $p \in \mathbb{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_{\mu_3}(\mathbf{0} - p; 0 - (1/m_3)\varepsilon(p)) \neq 0$, т.е. оператор $W_3(\mathbf{0})$ является ограниченным.

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать квадратичную интегрируемость ядра интегрального оператора $W_\alpha^{1/2}(z)K_{\alpha 3}(z)$ для всех $z \in [b_3/2, 0]$ и $\alpha = 1, 2$. Функция $\mathcal{E}_0(\cdot, \cdot)$ достигает своего минимума только в точке $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$, и эта точка является невырожденной, поэтому для всех $p, p' \in (\mathbb{T}^3)^2$, $z \in [b_3/2, 0]$ имеет место неравенство

$$|K_{\alpha 3}(z; p, p')| \leq \frac{C}{p^2 + p'^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Следовательно, согласно лемме 8 для всех $p, p' \in (\mathbb{T}^3)^2$ и $z \in [b_3/2, 0]$ получаем

$$\left| \frac{1}{\Delta_{\mu_\alpha}(p; 0 - (1/m_3)\varepsilon(p))} K_{\alpha 3}(z; p, p') \right| \leq \frac{C'}{\sqrt{|p|}} \frac{1}{p^2 + p'^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Отсюда получаем квадратичную интегрируемость ядра интегрального оператора $W_\alpha^{1/2}(z)K_{\alpha 3}(z)$ для всех $z \in [b_3/2, 0]$ и $\alpha = 1, 2$.

Из леммы 9 вытекает

ЛЕММА 10. Пусть $\mu_3 > \mu_3^*$, $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$. Для каждого $z < 0$ оператор $\mathbf{T}(z) - \mathbf{T}_0(z)$ является компактным и оператор-функция $\mathbf{T}(z) - \mathbf{T}_0(z)$ непрерывна слева в точке $z = 0$, где

$$\mathbf{T}_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & W_1^{1/2}(z)K_{12}(z)W_2^{1/2}(z) \\ W_2^{1/2}(z)K_{21}(z)W_1^{1/2}(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $W_1^{1/2}(z)K_{12}(z)W_2^{1/2}(z) = [W_2^{1/2}(z)K_{21}(z)W_1^{1/2}(z)]^*$ и ядро интегрального оператора $W_1^{1/2}(z)K_{12}(z)W_2^{1/2}(z)$ имеет вид

$$T_{12}(z; p, q) = \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} (2\pi)^{-3} (\mathcal{E}_0(p, q) - z)^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}(p; z - \varepsilon_1(p))} \sqrt{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))}}.$$

Пусть $\Omega_\rho(z) = \{p \in \mathbb{T}^3 : |z|^{1/2}\rho \leq |p| \leq \rho\}$, $\chi_\rho(p)$ – характеристическая функция шара $\Omega_\rho(z) \subset \mathbb{T}^3$, $\mathbf{T}_\rho(z)$ – оператор, действующий в пространстве $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$ с элементами $t_{11}(z) = t_{22}(z) = 0$, $t_{12}(z) = t_{21}^*(z)$, где $t_{12}(z)$ – интегральный оператор, порожденный ядром

$$t_{12}(z; p, s) = \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\chi_\rho(p) \chi_\rho(s)}{|p|^{1/2} (p^2/l_2 + 2ps/m_3 + s^2/l_1) |s|^{1/2}}.$$

ЛЕММА 11. Для каждого $z \in (b_3, 0)$ оператор $\mathbf{T}_0(z) - \mathbf{T}_\rho(z)$ является компактным и оператор-функция $\mathbf{T}_0(z) - \mathbf{T}_\rho(z)$ непрерывна слева в точке $z = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что оператор $W_1^{1/2}(z)K_{12}(z)W_2^{1/2}(z) - t_{12}(z)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта, т.е. при каждом $z \in (b_3, 0]$ сходится интеграл

$$I(z) = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |D(p, q; z)|^2 dp dq, \quad D(p, q; z) = T_{12}(z; p, q) - t_{12}(z; p, q).$$

Представим $I(z)$ в виде

$$I(z) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{A_i} \int_{A_j} |D(p, q; z)|^2 dp dq,$$

где $A_1 = \mathbb{T}^3 \setminus \Omega_\rho(z)$, $A_2 = \Omega_\rho(z)$.

Докажем интегрируемость функции $|D(p, q; z)|^2$ на множествах $A_1 \times A_1$ и $A_2 \times A_2$, содержащих особенности функции $|D(p, q; 0)|$ более высокого порядка. Запишем функцию $D(p, q; z)$ в виде суммы трех функций: $D(p, q; z) = D_1(p, q; z) + D_2(p, q; z) + D_3(p, q; z)$, где

$$\begin{aligned} D_1(p, q; z) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\sqrt{\mu_1} (2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}(p; z - \varepsilon_1(p))}} - \sqrt[4]{\frac{n_1}{l_1^3}} \frac{1}{|p|} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{2(\mathcal{E}_0(p, q) - z)} \frac{\sqrt{\mu_2} (2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))}}, \\ D_2(p, q; z) &= \frac{1}{2\pi^2} \sqrt[4]{\frac{n_1}{l_1^3}} \frac{1}{|p|^{1/2}} \left[\frac{1}{2(\mathcal{E}_0(p, q) - z)} - \frac{1}{p^2/l_2 + 2pq/m_3 + q^2/l_1} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\mu_2} (2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))}}, \\ D_3(p, q; z) &= \frac{1}{2\pi^2} \sqrt[4]{\frac{n_1}{l_1^3}} \frac{1}{|p|^{1/2}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{p^2/l_2 + 2pq/m_3 + q^2/l_1} \left[\frac{\sqrt{\mu_2} (2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))}} - \sqrt[4]{\frac{n_2}{l_2^3}} \frac{1}{|q|^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

Согласно лемме 8 из равенства

$$\begin{aligned} J(p_\alpha; z) &= \frac{\sqrt{\mu_\alpha} (2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))}} - \sqrt[4]{\frac{n_\alpha}{l_\alpha^3}} \frac{1}{|p_\alpha|^{1/2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\mu_\alpha} (2\pi)^{-1/2} \sqrt[4]{l_\alpha^3/n_\alpha} |p_\alpha|^{1/2} - \sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))}}{\sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))} \sqrt[4]{l_\alpha^3/n_\alpha} |p_\alpha|^{1/2}} \end{aligned}$$

для всех $p_\alpha \in \Omega_\rho(z)$ при $z \leq 0$ получаем ограниченность $|J(p_\alpha; z)|$:

$$\begin{aligned} |J(p_\alpha; z)| &\leq \frac{C}{\sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))} |p_\alpha|^{1/2}} \frac{O(p_\alpha^2) - z}{\sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))} + |p_\alpha|^{1/2}} \leq \\ &\leq \frac{O(p_\alpha^2) - z}{|p_\alpha|^{3/2}} \frac{C'}{\sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))}/|p_\alpha|} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\mu_\alpha}(p_\alpha; z - \varepsilon_2(p_\alpha))}/|p_\alpha| + 1} \leq C'', \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость интеграла

$$\int_{A_2} \int_{A_2} |D_1(p, q; z)|^2 dp dq, \quad z \leq 0.$$

Сходимость интеграла

$$\int_{A_2} \int_{A_2} |D_2(p, q; z)|^2 dp dq, \quad z \leq 0,$$

доказывается аналогично.

Из невырожденности точки минимума функции $\mathcal{E}_0(\cdot, \cdot)$ вытекает неравенство

$$\left| \frac{h_3(p, s)}{\mathcal{E}_0(p, q) - z} \frac{1}{p^2/l_2 + 2pq/m_3 + q^2/l_1} \right| \leq C,$$

где

$$h_3(p, s) = \mathcal{E}_0(p, q) - \frac{p^2}{l_2} + \frac{2pq}{m_3} + \frac{q^2}{l_1} = \sum_{|l|+|n| \geq 4} C_{ln} p^l q^n,$$

$$p^s = p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3}, \quad |s| = s_1 + s_2 + s_3.$$

Поэтому для квадратичной интегрируемости функции

$$D_2(p, q; z) = \sqrt[4]{\frac{n_1}{l_1^3}} \frac{1}{|p|^{1/2}} \frac{h_3(p, s) + z}{\mathcal{E}_0(p, q) - z} \frac{1}{p^2/l_2 + 2pq/m_3 + q^2/l_1} \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))}}$$

на множестве $A_2 \times A_2$ достаточно сходимости интеграла

$$J(z) = \int_{A_2} \int_{A_2} \frac{1}{|p|} \frac{z^2}{[\mathcal{E}_0(p, q) - z]^2} \frac{dp}{[p^2/l_2 + 2pq/m_3 + q^2/l_1]^2} \frac{dq}{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))}.$$

Используя лемму 8 для всех $p, q \in \mathbb{T}^3$, получаем оценку

$$\frac{1}{[\mathcal{E}_0(p, q) - z]^2} \frac{1}{[p^2/l_2 + 2pq/m_3 + q^2/l_1]^2} \frac{1}{\Delta_{\mu_2}(q; z - \varepsilon_2(q))} \leq$$

$$\leq \frac{1}{[p^2 + q^2 - z]^2} \frac{C}{[p^2 + q^2]^2} \frac{1}{|q|}.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$J(z) \leq \int_{A_2} \int_{A_2} \frac{z^2}{|p|} \frac{dp}{[p^2 + q^2 - z]^2} \frac{dq}{[p^2 + q^2]^2} \frac{1}{|q|} \leq$$

$$\leq \int_{\rho|z|/2}^{\rho} \int_{\rho|z|/2}^{\rho} \frac{C' z^2 dr}{[r^2 + \rho^2 - z]^2} \frac{d\rho}{r^2 + \rho^2} < C''' \int_{\rho|z|/2}^{\sqrt{2}\rho} \frac{z dt}{(t^2 - z)t} < \infty.$$

Точно так же

$$\int_{A_1} \int_{A_1} |D(p, q; z)|^2 dp dq = \int_{A_1} \int_{A_1} |T_{12}(z; p, q)|^2 dp dq =$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 \int_{B_i} \int_{B_j} |T_{12}(z; p, q)|^2 dp dq,$$

где $B_1 = \mathbb{T}^3 \setminus U_\rho(\mathbf{0})$, $B_2 = U_{\rho|z|/2}(\mathbf{0})$, $U_r(\mathbf{0}) = \{p: |p| < r\}$. Элементарное рассуждение показывает, что

$$\begin{aligned} \int_{B_2} \int_{B_2} |T_{12}(z; p, q)|^2 dp dq &\leq C \int_{B_2} \int_{B_2} \frac{1}{|p|} \frac{dp}{[p^2 + q^2 - z]^2} \frac{dq}{|q|} dp dq \leq \\ &\leq C' \int_0^{\rho|z|/2} \int_0^{\rho|z|/2} \frac{r \rho dr d\rho}{[r^2 + \rho^2 - z]^2} < \infty. \end{aligned}$$

Сходимость интегралов

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \int_{B_1} |T_{12}(z; p, q)|^2 dp dq, \quad \int_{B_1} \int_{B_2} |T_{12}(z; p, q)|^2 dp dq, \\ \int_{B_2} \int_{B_1} |T_{12}(z; p, q)|^2 dp dq, \\ \int_{A_1} \int_{A_2} |D(p, q; z)|^2 dp dq, \quad \int_{A_2} \int_{A_1} |D(p, q; z)|^2 dp dq \end{aligned}$$

доказывается аналогично.

Пространство всех векторов $(\varphi, \psi) \in L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$, носители компонент которых лежат в $\Omega_\rho(z)$, является инвариантным подпространством оператора $\mathbf{T}_\rho(z)$. Пусть $\hat{\mathbf{T}}_\rho(z)$ – сужение оператора $\mathbf{T}_\rho(z)$ на это подпространство.

Введем унитарный оператор

$$\begin{aligned} U: L_2(\Omega_\rho(z)) &\rightarrow L_2((0, R), L_2(\mathbb{S}^2)), \\ (Uf)(x, \xi) &= (|z|^{1/2} \rho)^{3/2} e^{3x/2} f(|z|^{1/2} \rho e^x \xi), \quad x \in (0, R), \quad \xi \in \mathbb{S}^2, \end{aligned}$$

где $R = -(\ln |z|)/2$, $\mathbb{S}^2$ – единичная сфера, при этом

$$U^{-1}: L_2((0, R), L_2(\mathbb{S}^2)) \rightarrow L_2(\Omega_\rho(z)), \quad (U^{-1}f)(p) = |p|^{-3/2} f\left(\ln \frac{|p|}{|z|^{1/2} \rho}, \frac{p}{|p|}\right).$$

Обозначим через $\mathbf{S}_R$ матричнозначный оператор, действующий в пространстве $L_2^{(2)}((0, R), L_2(\mathbb{S}^2))$, с элементами $S_{11}(z) = S_{22}(z) = 0$, $S_{12}(z) = S_{21}^*(z)$, где $S_{12}(z)$ – интегральный оператор, определенный в пространстве $L_2((0, R), L_2(\mathbb{S}^2))$ как

$$\begin{aligned} (S_{12}f)(x; \xi) &= \int_0^R \int_{\mathbb{S}^2} S_{12}(x - y; (\xi, \eta)) f(y, \eta) dy d\eta, \\ S_{12}(x; t) &= \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{2/\sqrt{l_1 l_2} \operatorname{ch}(x + (\ln(l_2/l_1))/2) + 2t/m_3}, \end{aligned}$$

$(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{S}^2$.

Оператор $\hat{\mathbf{T}}_\rho(z)$ унитарно эквивалентен оператору $\mathbf{S}_R$. Эквивалентность осуществляется с помощью унитарного оператора $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, т.е. $\mathbf{S}_R = \mathbf{U} \hat{\mathbf{T}}_\rho(z) \mathbf{U}^{-1}$.

Обозначим через $L^{(l)}(\mathbb{S}^2) \subset L_2(\mathbb{S}^2)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, подпространство функций с угловым моментом l , $\dim L^{(l)}(\mathbb{S}^2) = 2l + 1$ (см. [12]),

$$L_2(\mathbb{S}^2) = \sum_l \oplus L^{(l)}(\mathbb{S}^2).$$

Пусть $\hat{P}_l: L_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L^{(l)}(\mathbb{S}^2)$ — ортогональный проектор на $L^{(l)}(\mathbb{S}^2)$. Ядро оператора $\hat{P}_l$ выражается через многочлен Лежандра P_l :

$$\hat{P}_l((\xi, \eta)) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l((\xi, \eta)).$$

Ядро оператора $\mathbf{S}_R$ на сфере зависит только от скалярного произведения (ξ, η) , поэтому подпространство $\mathbb{C}^2 \otimes L^{(l)}(\mathbb{S}^2)$ является инвариантным относительно оператора $\mathbf{S}_R$ и

$$\mathbf{S}_R = \sum_l \oplus (\mathbf{S}_R^{(l)} \otimes \hat{P}_l), \quad \hat{P}_l = \begin{pmatrix} \hat{P}_l & 0 \\ 0 & \hat{P}_l \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{S}_R^{(l)}$ — матричнозначный оператор, действующий в $L_2^{(2)}(0, R)$, с элементами $S_{11}^{(l)} = S_{22}^{(l)} = 0$, $S_{12}^{(l)} = [S_{21}^{(l)}]^*$, $S_{12}^{(l)}$ — интегральный оператор в $L_2(0, R)$, порожденный ядром

$$S_{12}^{(l)}(x - x') = 2\pi \int_{-1}^1 P_l(t) S_{12}(x - x'; t) dt,$$

при этом

$$\sigma(\mathbf{S}_R) = \bigcup_l \sigma(\mathbf{S}_R^{(l)} \otimes \hat{P}_l) = \bigcup_l \sigma(\mathbf{S}_R^{(l)}).$$

Пусть $\mathbf{L}(z)$ — оператор, действующий в $L_2^{(2)}(0, R)$, заданный матрицей с элементами $L_{11}(z) = L_{22}(z) = 0$, $L_{12}(z) = [L_{21}(z)]^*$, где $L_{12}(z)$ — интегральный оператор в $L_2(0, R)$, порожденный ядром

$$L_{12}^{(l)}(x - x') = \chi_{(0, R]}(x - x') S_{12}^{(0)}(x - x').$$

ЛЕММА 12. Для каждого $z < 0$ оператор $\mathbf{S}_R^{(0)} - \mathbf{L}(z)$ является компактным и $\|\mathbf{S}_R^{(0)} - \mathbf{L}(z)\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь неравенством Шварца и определением характеристической функции, имеем

$$\begin{aligned} & \| [\mathbf{S}_R^{(0)}(z) - \mathbf{L}(z)] f \|^2 = \\ &= \int_0^R \left| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_{-1}^1 \frac{dt [1 - \chi(x - s)] f(s) ds}{(2/\sqrt{l_1 l_2}) \operatorname{ch}(x - s + (\ln(l_2/l_1))/2) + 2t/m_3} \right|^2 dx \leq \\ & \leq \frac{C R^2 \|f\|^2}{[\operatorname{ch}(R + (\ln(l_2/l_1))/2)]^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{S}_R^{(0)}(z) - \mathbf{L}(z)\| \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0.$$

Введем унитарный оператор

$$U_1^{-1}: L_2(-\pi, \pi) \rightarrow L_2(0, R), \quad (U_1^{-1} f)(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{R}} f\left(\frac{2\pi}{R} x - \pi\right).$$

Очевидно, что

$$U_1: L_2(0, R) \rightarrow L_2(-\pi, \pi), \quad (U_1 g)(x) = \sqrt{\frac{R}{2\pi}} g\left(\frac{R}{2\pi}(x + \pi)\right).$$

Пусть $\mathcal{L}(z)$ – матричный оператор в $L_2^{(2)}(-\pi, \pi]$ с элементами $\mathcal{L}_{11}(z) = \mathcal{L}_{22}(z) = 0$, $\mathcal{L}_{12}(z) = [\mathcal{L}_{21}(z)]^*$, где $\mathcal{L}_{12}(z)$ – интегральный оператор в $L_2(-\pi, \pi]$, порожденный ядром

$$\mathcal{L}_{12}(x - x'; t) = \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} \frac{R}{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(2/\sqrt{l_1 l_2}) \operatorname{ch}(R(x - x')/(2\pi) + (\ln(l_2/l_1))/2) + 2t/m_3}.$$

Оператор $\mathcal{L}(z)$ унитарно эквивалентен оператору $\mathbf{L}(z)$, эквивалентность определяется унитарным оператором $\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$, т.е. $\mathcal{L}(z) = \mathbf{U}_1 \mathbf{L}(z) \mathbf{U}_1^{-1}$.

Если $\lambda \neq 0$ – собственное число оператора $\mathcal{L}(z)$, то оно имеет вид $\lambda = \pm |u_n(z)|$ и $\Phi^\pm = \pm(f_n, \frac{\overline{u_n(z)}}{|u_n(z)|} f_n)$ является соответствующим собственным вектором, где $f_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$u_n(z) = \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} \frac{R}{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{ins} dt ds}{(2/\sqrt{l_1 l_2}) \operatorname{ch}(Rs/(2\pi) + (\ln(l_2/l_1))/2) + 2t/m_3}. \quad (5.2)$$

Поэтому получаем

$$\sigma(\mathbf{L}(z)) = \sigma(\mathcal{L}(z)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{|u_n(z)|\} \cup \{-|u_n(z)|\} \cup \{0\}, \quad z < 0.$$

ЛЕММА 13. *Имеет место равенство*

$$|u_n(z)| = F\left(\frac{4\pi n}{|\ln|z||}\right) + O(|z|^{1/4} |\ln(-z)|), \quad z \rightarrow -0,$$

где

$$F(x) = \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} \frac{m_3}{x} \frac{\operatorname{sh}(x \arcsin(\sqrt{l_1 l_2}/m_3))}{\operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу малости $|z|$ справедливо $R/2 + (\ln(l_2/l_1))/2 > 0$. Интеграл (5.2) после замены переменной $y = Rs/(2\pi) + (\ln(l_2/l_1))/2$, принимает вид

$$u_n(z) = e^{-(in/2) \ln(l_2/l_1)} \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} [I_0(n, z) - I_1(n, z)],$$

где

$$I_0(n, z) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt e^{i2\pi y/R} dy}{2 \operatorname{ch} y/\sqrt{l_1 l_2} + 2t/m_3},$$

$$I_1(n, z) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \int_{|y| > R/2 + (\ln(l_2/l_1))/2} \frac{dt e^{i2\pi y/R} dy}{2 \operatorname{ch} y/\sqrt{l_1 l_2} + 2t/m_3}.$$

Простое вычисление показывает, что для некоторого $C > 0$ и для всех натуральных n и $z < 0$ выполняется неравенство

$$|I_1(n, z)| \leq \frac{CR}{\operatorname{ch}(R/2)}, \quad \frac{R}{\operatorname{ch}(R/2)} = \frac{|z|^{1/4} |\ln(-z)|}{|z|^{1/2} + 1}.$$

Используя известное равенство (см., например, [16])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a e^{iwr}}{\operatorname{ch} w + \cos a} dw = \frac{\operatorname{sh} ar}{\operatorname{sh} \pi r}, \quad |a| < \pi,$$

вычисляем интеграл

$$I_0(n, z) = \frac{m_3}{\operatorname{sh} \pi r} \int_{\arccos(\sqrt{l_1 l_2}/m_3)}^{\pi - \arccos(\sqrt{l_1 l_2}/m_3)} \operatorname{sh} r x \, dx, \quad r = \frac{2\pi n}{R}.$$

Учитывая элементарные равенства $\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{sh}((a+b)/2) \operatorname{sh}((a-b)/2)$, $\operatorname{sh} a = 2 \operatorname{sh}(a/2) \operatorname{ch}(a/2)$ и $\pi - \arccos x = \arcsin x$ при $x \in [0, 1]$, получаем

$$I_0(n, z) = \frac{m_3}{r} \frac{\operatorname{sh}[r \arccos(\sqrt{l_1 l_2}/m_3)]}{\operatorname{ch}(\pi r/2)}.$$

Следовательно, $|I_0(n, z)| = F(4\pi n / |\ln |z||)$.

Используя неравенство $\arcsin |x| > |x|$ при $x \in (-1, 1)$, получаем

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1^3 l_2^3}} m_3 \arcsin \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{m_3} > \sqrt[4]{\frac{n_1 n_2}{l_1 l_2}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}{m_3(m_1 + m_2 + m_3)}} > 1.$$

Поэтому в силу монотонности функции F в интервале $(0, \infty)$ существует положительное число δ такое, что уравнение $1 + \delta = F(x)$ имеет единственное положительное решение $x = \lambda_0$. Отсюда

$$|I_0(n, z_n)| = F\left(\frac{4\pi n}{|\ln |z_n||}\right) = 1 + \delta, \quad z_n = -e^{-4\pi n/\lambda_0}.$$

Согласно лемме 13

$$|u_n(z_n)| \geq 1 + \delta - O(|z_n|^{1/4} |\ln(-z_n)|), \quad z \rightarrow -0.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{z \rightarrow -0} n(1 + \delta, \mathbf{L}(z)) = \lim_{z \rightarrow -0} n(1 + \delta, \mathcal{L}(z)) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2 ТЕОРЕМЫ 1. Используя неравенство Вейля, получаем

$$n(1 + \delta, \mathbf{L}(z)) \leq n\left(1 + \frac{2\delta}{3}, \mathbf{S}_R^{(0)}\right) + n\left(1 + \frac{\delta}{3}, \mathbf{L}(z) - \mathbf{S}_R^{(0)}\right), \quad (5.3)$$

$$n\left(1 + \frac{2\delta}{3}, \mathbf{S}_R\right) = n\left(1 + \frac{2\delta}{3}, \mathbf{T}_\rho(z)\right) \leq n\left(1 + \frac{\delta}{3}, \mathbf{T}_0(z)\right) + n\left(\frac{\delta}{3}, \mathbf{T}_\rho(z) - \mathbf{T}_0(z)\right), \quad (5.4)$$

$$n\left(1 + \frac{\delta}{3}, \mathbf{T}_0(z)\right) \leq n(1, \mathbf{T}(z)) + n\left(\frac{\delta}{3}, \mathbf{T}_0(z) - \mathbf{T}(z)\right). \quad (5.5)$$

Согласно леммам 10–12 операторы $\mathbf{L}(z) - \mathbf{S}_R$, $\mathbf{T}_\rho(z) - \mathbf{T}_0(z)$ и $\mathbf{T}_0(z) - \mathbf{T}(z)$ являются компактными при каждом $z \in (b_3, 0]$. Поэтому для всех $z \in [b_3/2, 0]$ выполняются неравенства

$$n\left(1 + \frac{\delta}{3}, \mathbf{L}(z) - \mathbf{S}_R\right) < \infty, \quad n\left(\frac{\delta}{3}, \mathbf{T}_\rho(z) - \mathbf{T}_0(z)\right) < \infty, \quad n\left(\frac{\delta}{3}, \mathbf{T}_0(z) - \mathbf{T}(z)\right) < \infty.$$

Отсюда, учитывая, что $n(1 + 2\delta/3, \mathbf{S}_R^{(0)}) \leq n(1 + 2\delta/3, \mathbf{S}_R)$, из неравенств (5.3), (5.4) имеем $\lim_{z \rightarrow -0} n(1, \mathbf{T}(z)) = \infty$. Согласно лемме 2 оператор $H(\mathbf{0})$ имеет бесконечное число собственных значений в интервале $(b_3, 0)$.

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов, *ЯФ*, **12**:5 (1970), 1080–1091.
- [2] R. D. Amado, J. V. Noble, *Phys. Rev. D*, **5**:8 (1971), 1992–2002.
- [3] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [4] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [5] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal, *Ann. Phys.*, **123**:2 (1979), 274–295.
- [6] Н. Tamura, *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 433–459.
- [7] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [8] С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев, *Матем. заметки*, **71**:5 (2002), 686–696.
- [9] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [10] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [11] Г. М. Жислин, Труды ММО, **9**, 1960, 81–120.
- [12] A. V. Sobolev, *Comm. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [14] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
- [15] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Учеб. пособие, Изд-во ЛГУ, Л., 1980.
- [16] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных и инженерных работников*, Наука, М., 1978.

Поступила в редакцию 14.02.2008,
после доработки 22.08.2008