Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об одном новом распределении, обобщающем распределение Бозе–Эйнштейна, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:59:16

© 2009 г.

В. П. Маслов*

ОБ ОДНОМ НОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ, ОБОБЩАЮЩЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Предъявляется распределение, обобщающее распределение Бозе–Эйнштейна.

Ключевые слова: бозе-конденсат, димеры.

В настоящей работе мы приводим распределение, отвечающее заданной функции $H(p)$, которое порождает фазовый переход в конденсатное состояние как возникновение димеров (см. [1], [2]). Возвращаясь к примеру, приведенному в работе [1], отметим, что если число зрителей превышает в два раза число $N_{\text{сг}}$, то возможны два случая разложений n купюр по $2N_{\text{сг}}$ зрителей:

- 1) $N_{\text{сг}}$ из $2N_{\text{сг}}$ зрителей не получают ничего (окажутся в конденсате);
- 2) зрители объединятся в пары, и n купюр распределятся по $N_{\text{сг}}$ парам (конденсата не будет).

Число вариантов разложения n купюр по $2N_{\text{сг}}$ зрителей в случаях 1 и 2 совпадает. Значит, энтропия случаев 1 и 2 также совпадает, и мы не можем априори предпочесть ни один из этих случаев. Автор показал [2], что в случае взаимодействия вида Леннарда-Джонса в пределе идеального газа возникает случай 2, т.е. образуются пары (димеры), и, в частности, реализуется сценарий, описанный в работе [1].

Ниже мы сформулируем общую теорему, отвечающую заданной гладкой функции $H(p) \geq 0$. Мы предположим, что гладкая функция $H(p)$ при $p \rightarrow 0$ стремится к нулю не быстрее сколь угодно большой степени p .

Пусть E и $N \gg 1$ – заданные числа, $E_1 \ll E$,

$$E_i = \int_{E_1 i}^{E_1(i+1)} H(p) dp, \quad i = 2, 3, \dots$$

Рассмотрим соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} E_i N_i = E, \quad E_0 = 0, \tag{1}$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

где N_i – целые числа, такие что $\sum_0^\infty N_i = N$. Определим величину b , которая имеет смысл обратной температуры, из условия

$$\int_0^\infty \frac{H(p) dp}{e^{bH(p)} - 1} = E. \quad (2)$$

Пусть N_{cr} определяется из условия

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{bH(p)} - 1} - \frac{N_{\text{cr}}}{e^{bH(p)N_{\text{cr}}} - 1} \right\} dp = N_{\text{cr}}. \quad (3)$$

Рассмотрим уравнения для определения констант b и κ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{H(p) dp}{e^{b(H(p)+\kappa)} - 1} &= E, \\ \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{b(H(p)+\kappa)} - 1} - \frac{N}{e^{bN(H(p)+\kappa)} - 1} \right\} dp &= N. \end{aligned} \quad (4)$$

ТЕОРЕМА. 1. Если $N \leq N_{\text{cr}}$, то решение уравнений (4) существует и единственно при $\kappa \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Выражение

$$\frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^\infty N_i \varphi(bi) - \int_0^\infty \varphi(x) \left\{ \frac{1}{e^{b(H(x)+\kappa)} - 1} - \frac{N}{e^{bN(H(x)+\kappa)} - 1} \right\} dx \right], \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ – любая ограниченная кусочно гладкая функция (с конечным числом разрывов), непрерывная в точках bi , стремится по вероятности к нулю при $N \rightarrow \infty$.

3. Пусть $N > N_{\text{cr}}$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что

$$\mathbf{P}\{|N_0 - [N - N_{\text{cr}}]| \geq \delta_1 N_{\text{cr}}\} \leq e^{-|N - N_{\text{cr}}|^\delta}, \quad (6)$$

где δ_1 – сколь угодно малое число, не зависящее от N_{cr} , а $\mathbf{P}$ есть отношение числа вариантов, удовлетворяющих условию в фигурных скобках, к общему числу вариантов при $N = N_{\text{cr}}$.

Элементы последовательности $N_1, N_2, \dots, N_i$, $i \leq A/b$, где A – сколь угодно большое число, не зависящее от b , удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{N_{\text{cr}}} \left[\sum_{i=1}^{[A/b]} N_i \varphi(bi) - \int_0^\infty \varphi(x) \left\{ \frac{1}{e^{bH(x)} - 1} - \frac{N_{\text{cr}}}{e^{bN_{\text{cr}}H(x)} - 1} \right\} dx \right] \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{при} \quad N_{\text{cr}} \rightarrow \infty,$$

где b определяется из соотношения (2).

Теорема имеет приложение в теории фликкер-шумов [3]. При $H(p) = p^\alpha$, где $\alpha < 1$, п. 1, 2 теоремы следуют из работы [4]. В этом случае второй член в формулах (3)–(5) можно опустить, и мы получаем распределение Бозе–Эйнштейна. Оценка вероятности нахождения числа частиц в конденсате приводится впервые. Ее применение в случае фотонов для формулы Планка и закона Стефана–Больцмана

(см. также [5]) показывает с очевидностью, что поскольку фотоны не могут находиться на нулевом уровне энергии, они образуют пары в случае, например, когда $N = 8N_{\text{сг}}$, т.е. $\hbar$ в формуле для $N_{\text{сг}}$ в [6] надо заменить на $2\hbar$. Испускание фотона электроном эквивалентно переходу на ближайший уровень, а испускание двух фотонов – переходу через один уровень. При столь низкой температуре, при которой возникает указанный выше конденсат, электроны и позитроны образуют куперовские пары, и их столкновение приводит к возникновению двух фотонов.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 174–176.
- [2] В. П. Маслов, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 250–272.
- [3] V. P. Maslov, *Math. Notes*, **85**:4 (2009), 467–469.
- [4] А. М. Вершик, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39.
- [5] В. П. Маслов, *ТМФ*, **154**:1 (2008), 207–208.
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Теоретическая физика. Т. V*, Наука, М., 1964.

Поступила в редакцию 9.02.2009