Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Беккариа, В. Форини, КХД-подобные свойства аномальных размерностей в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 353–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:20:36

© 2009 г.

М. Беккариа*, В. Форини†

КХД-ПОДОБНЫЕ СВОЙСТВА АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Получены замкнутые формулы для аномальных размерностей двух классов операторов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса как на основе численных исследований, так и с помощью предположений, вытекающих из анализа КХД. Рассмотрен случай калибровочных операторов твиста 3, для которого проведено полное доказательство свойства инверсивности.

Ключевые слова: интегрируемая квантовая теория поля, анзац Бете.

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперсимметричная теория Янга–Миллса (теория СЯМ) с максимальной суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$ дуальна теории суперструны типа IIB на пространстве $AdS_5 \times S^5$ и играет центральную роль в построении AdS/CFT-соответствия [1]. Последние продвижения в исследовании дуальности между планарным пределом больших N в калибровочной теории и свободной теорией струн основываются на развитии аналитических методов, использующих как свойство интегрируемости в теории струн [2], так и внутреннюю интегрируемость суперконформной теории [3]. В последнем случае масштабная зависимость перенормированных составных операторов описывается (в том числе и для старших петель) локальным интегрируемым гамильтонианом суперсимметричной спиновой цепочки, в котором расстояние взаимодействия растет с ростом порядка петлевого разложения [4], [5]. Это позволяет применять асимптотические уравнения Бете [5] для вычисления аномальных размерностей однопетлевых операторов общего вида

$$\mathcal{O} = \text{Tr} \left(\prod_{i=1}^L D^{n_i} X_i \right) + \text{перестановки}, \quad (1)$$

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento, INFN, 73100, Lecce, Italy.
E-mail: beccaria@le.infn.it

†Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Albert-Einstein-Institut, D-14476 Am Mühlenberg 1, Potsdam, Germany. E-mail: forini@aei.mpg.de

где X_i – элементарные поля в определенных подсекторах полной $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ, D^n – ковариантные производные. Уравнения Бете задают аномальные размерности операторов $\mathcal{O}$ в виде ряда теории возмущений по константе связи g Хофта:

$$\gamma_{\mathcal{O}}(g) = \sum_{n \geq 0} c_n(\mathcal{O}) g^{2n} \quad (2)$$

и дают возможность использовать метод произведения сложных многопетлевых расчетов. Тем не менее асимптотическая природа этих разложений налагает серьезные ограничения на возможные “накрутки”, для которых величины $\gamma_{\mathcal{O}}$ можно вычислить вплоть до членов порядка $\mathcal{O}(g^{2L})$ (где L – длина оператора). В то время как в термодинамическом пределе, когда L или лоренцев спин $N = \sum_i \{n_i\}$ стремятся к бесконечности, проблема “накруток” исчезает, при попытках исследования зависимости свойств операторов от приведенных выше параметров в определенном конечном порядке теории возмущений возникают более серьезные ограничения. В общем случае уравнения Бете не задают коэффициенты разложения c_n в выражении (2) в виде функций от L и $\{n_i\}$, но обеспечивают только лишь последовательности чисел (иногда рациональных) для каждого указанного оператора. Чтобы найти замкнутые формулы для интересующих нас аномальных размерностей и получить тем самым возможность для более глубокого исследования их свойств, приходится или основываться на гипотезах, требующих дальнейших численных подтверждений, или, что имеет место в случае $\gamma(N)$, делать некоторые общие предположения (обычно основанные на практике исследований в КХД).

В работе [6] рассматривались операторы вида $\mathcal{O}_L = \text{Tr } \mathcal{F}^L$, составленные из L компонент тензора напряженности для самодуального поля Янга–Миллса¹⁾. За пределами однопетлевого приближения можно использовать метод, предложенный в работе [9] для достаточно эффективного (хотя и не параметрического) вычисления последовательности $\{c_n(L)\}$ при произвольно заданном L . Оказывается, что коэффициенты $c_n(L)$ нелинейно зависят от L при $n \geq 2$. Поскольку начиная с двухпетлевого приближения появляется вклад от нетривиальных поправок конечного размера, нельзя ожидать, что отношение $\gamma(L)/L$ будет даваться простым выражением при конечных L . Тем не менее возникает некоторая неожиданная структура. Внимательное изучение точных численных выражений для последовательностей $\{c_n(L)\}$ при фиксированных n и изменяющихся L сыграло главную роль при формулировании гипотезы и выводе замкнутых выражений вплоть до приближения пяти петель для $c_n(L)$ в (2). Такая замкнутая формула для многопетлевой зависимости от размера уникальна в существующих на сегодняшний день вычислениях для других операторов в различных подсекторах $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ, например двухпетлевая аномальная размерность принимает простой вид

$$\gamma_L(g) = 2L + 3Lg^2 + \left(-\frac{51}{8} + \frac{9}{8} \frac{1}{(-1)^L 2^{L-1} + 1} \right) Lg^4 + \dots \quad (3)$$

¹⁾Эти операторы представляют собой точные собственные состояния однопетлевого оператора дилатации, и их можно отобразить на ферромагнитные состояния интегрируемой цепочки спина 1 [7], [8]. На уровне двух петель и выше эти состояния смешиваются с другими полями типа $psu(2, 2 | 4)$.

с поправками к простейшему линейному скейлингу по L . Отметим, что в пределе больших L это выражение имеет вид

$$\frac{\gamma_L(g)}{L} = f_0(g) + g^4 h(gL) e^{-L \ln 2} + \mathcal{O}(e^{-2L \ln 2}), \quad (4)$$

показывающий, что поправки флуктуаций конечного размера в термодинамическом пределе характеризуются конечной корреляционной длиной $\xi = 1/\ln 2$, не зависящей ни от g , и комбинацией gL , представляющей собой естественную масштабную переменную для предэкспоненциального множителя. Такие поправки порядка $\mathcal{O}(2^{-L})$ не имеют отношения к значительно меньшим эффектам обертывания, имеющим порядок $\mathcal{O}(\lambda^L)$, и было бы интересно понять эти поправки с точки зрения интерпретации оператора дилатации H в терминах спиновой цепочки²⁾.

В дальнейшем мы рассмотрим особенно интересный класс операторов – так называемых операторов “квазипартонного” твиста [10]. Они представляют собой операторы с одним следом типа (1), построенные с привлечением произвольного числа производных (в данном случае проектированных на световой конус), распределенных по (сонаправленным) фундаментальным полям X твиста 1 (скалярам, гаугино или калибровочным полям) таким образом, что длина L оператора совпадает с твистом этого оператора. Квазипартонные операторы твиста интересны вследствие их сходства с операторами твиста в КХД. В самом деле, хотя $\mathcal{N} = 4$ теория СЯМ и КХД во многом различны, сравнительный анализ их свойств сыграл главную роль в более глубоком понимании этих теорий. Само свойство интегрируемости, лежащее в основе эволюции составных операторов, было впервые открыто при исследовании планарного предела в КХД [11]. Само по себе наличие свойства конформной симметрии, которая сохраняется в КХД на однопетлевом уровне, не представляет собой необходимого условия интегрируемости, как обсуждалось в работах [12]–[15], но оно, несомненно, играет важную роль при введении правил отбора и структур мультиплетов. Более того, именно (не вполне явное) следствие конформной симметрии объясняет структуру разложения по большим спинам аномальной размерности оператора твиста. Вероятно, что большую пользу в изучении КХД может дать полное построение решения его суперконформного аналога во всех петлях, так как это поможет получить представление для “доминирующей” части пертурбативной глюонной динамики³⁾ (см., например, работу [16]).

Принцип максимальной трансцендентности представляет собой первый интересный пример взаимосвязи между двумя теориями. На основе структуры двухпетлевой аномальной размерности $\mathcal{N} = 4$ операторов твиста 2 в секторе $sl(2)$ в работе [18] было сделано предположение, что результат в трехпетлевом приближении может быть получен путем объединения “наиболее трансцендентных членов” из решения для трехпетлевой несинглетной аномальной размерности в КХД, полученного в работе [19]. Предложенный трехпетлевой результат был независимо подтвержден

²⁾В частности, естественное объяснение экспоненциальных поправок должно принимать в расчет процессы с изменением длины, как предложено в работе [9], и явные вычисления H на двухпетлевом уровне могли бы сыграть важную роль в прояснении этих вопросов.

³⁾Обзор других важных особенностей, сходных для $\mathcal{N} = 4$ теорий СЯМ и КХД, таких как их инфракрасное поведение, приведен в [17].

в рамках уравнений анзаца Бете [20] и в рамках пространственно-временного подхода [21]. Принцип, в соответствии с которым $\gamma^{(n)}(N)$ в n -петлевом приближении задается линейной комбинацией гармонических сумм Эйлера–Цагира трансцендентности $\tau = 2n - 1$, оказался основополагающим при выводе замкнутых многопетлевых выражений, зависящих от N , для аномальных размерностей специальных операторов твистов [20], [22]–[26]. Систематическое вычисление функций $\gamma(N)$ за рамками однопетлевого приближения было выполнено с помощью подхода Бакстера⁴). Последние аналитические вычисления обсуждались в работах [27], [28].

Знание замкнутых выражений для аномальных размерностей операторов твистов необходимо при изучении их физического содержания, которое можно получить на основе известных фактов, справедливых для операторов твиста 2 в КХД, полученных в результате анализа глубоко неупругого рассеяния [29], [30]. В физическом смысле полный спин N дуален в меллиновском пространстве переменной Бьеркена x , и естественным образом возникают два противоположных режима: $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$. Первый режим описывается уравнением Балицкого–Фадиной–Кураева–Липатова (БФКЛ) [31] и может быть исследован с помощью анализа полюсов Редже для аномальной размерности $\gamma(N)$, аналитически продолженной на отрицательные (нефизические) величины спина. На уравнении БФКЛ было основано исследование эффектов обертывания при вычислении аномальных размерностей коротких операторов с помощью уравнений Бете⁵) [22].

В настоящей работе исследуются свойства второго (квазиупругого) режима, который эквивалентен в меллиновском пространстве пределу больших N . Эти свойства можно получить из поведения при больших N известных результатов вычислений в КХД операторов твиста 2 в трехпетлевом приближении (как и из общих результатов, справедливых для старших твистов [33]). Их можно представить в следующем виде.

1. Ведущее поведение аномальных размерностей операторов твистов при больших N имеет логарифмический характер:

$$\gamma(N) = 2\Gamma(\alpha_s) \ln N + \mathcal{O}(N^0), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5)$$

и задается так называемой “аномалией типа каспа” для $\Gamma(\alpha_s)$, которая представляет собой универсальную функцию от константы связи для излучения мягких глюонов [33]–[35] и возникает как аномальная размерность каспа, отвечающая за перенормировку вильсоновской петли на световом конусе. Техника интегрируемости существенно углубила это знание и привела к появлению интегрального уравнения, учитывающего все порядки разложения в режиме слабой связи⁶) для $\Gamma(\alpha_s)$ [40], [41].

2. Относительно членов первой поправки известно, что они удовлетворяют скрытым соотношениям (на уровне трех петель) – связям Муха–Вермасерена–Вогта

⁴) Об этом было сказано в докладе С. Зиеме в Институте Альберта Эйнштейна (Потсдам), основанном на еще не опубликованных результатах, полученных А. В. Котиковым, А. Реем и С. Зиеме.

⁵) Интересная интерпретация магнона спиновой цепочки с помощью уравнения БФКЛ была недавно предложена в работе [32].

⁶) Вычисление было распространено на режим сильной связи в явном примере сектора $sl(2)$ [36] (см. также работу [37]) и допускает дальнейшие обобщения [38], [39].

(МВВ) [19]. В случае твиста 2 в КХД эти соотношения связаны с пространственно-временным преобразованием инверсии глубоко неупругого рассеяния и его скрещенного варианта аннигиляции e^+e^- в адроны. Симметрия инверсии в случае твиста 2 имеет место для эволюционного ядра Докшицера–Маркезини–Салама (ДМС) с учетом одновременно функции распределения и фрагментации ⁷⁾ [42]. В работе [44] соотношения МВВ были продолжены на бесконечный набор соотношений старших порядков $1/N$ -разложения и было отмечено, что они следуют из условия инвариантности относительно подгруппы $sl(2, \mathbb{R})$ ⁸⁾.

Более точно подходящее обобщение анализа работ [42], [44] на случай $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ предполагает, что $\gamma(N)$ во всех порядках удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\gamma(N) = \mathcal{P}\left(N + \frac{1}{2} \gamma(N)\right), \quad (6)$$

в котором функция $\mathcal{P}$ допускает при больших N разложение по целым степеням J^2 вида

$$\mathcal{P}(N) = \sum_n \frac{a_n (\ln J)}{J^{2n}}, \quad (7)$$

где J – оператор Казимира коллинеарной конформной группы $SL(2, \mathbb{R}) \subset SO(4, 2)$, т.е. $J^2 = (N + Ls - 1)(N + Ls)$, $s = 1/2, 1, 3/2$ в скалярном, спинорном и векторном случаях соответственно [10]. Если имеет место разложение (7), то говорится, что $\mathcal{P}$ есть инвертивно инвариантное ядро⁹⁾. В приближениях выше однопетлевого тест на инвертивную инвариантность требует знания многопетлевых аномальных размерностей как замкнутых функций от N . Они в настоящее время известны в случаях твистов 2 и 3. Трехпетлевые тесты на инвертивную инвариантность для КХД и для универсального супермультиплета твиста 2 в $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ обсуждались в работах [42], [44]. Четырехпетлевой тест для аномальных размерностей твиста 3 в секторе $sl(2)$ был проведен в работе [25]. В работе [45] было доказано, что даже четырехпетлевой результат, который чувствителен к эффектам намоток, инвертивно инвариантен для операторов твиста 2 из работы [22] в смысле формулы (7). Поэтому в анзаце Бете существуют определенные важные структуры, которые заслуживают более глубокого изучения. В самом деле, в то время как предположение о связи выражения (6) с подлежащей конформной симметрией было сделано в работе [44], никакого очевидного объяснения свойства (7) так и не было предложено.

⁷⁾Существование эволюционного ядра ДМС было недавно подтверждено в работе [43].

⁸⁾Квазигартонные операторы могут быть классифицированы в соответствии с представлениями коллинеарной $sl(2, \mathbb{R})$ подгруппы группы $SO(2, 4)$ конформных преобразований в соответствии со значениями так называемого *конформного спина* $j = (N + \Delta)/2$ [10], где Δ – масштабная размерность оператора. Отсюда можно заключить, что аномальная размерность $\gamma = \Delta - N - L$ должна зависеть от лоренцева спина N только посредством ее зависимости от конформного спина j . Поскольку $\Delta = N + L + \gamma(N, L)$, это приводит к соотношениям вида (6), в которых функция $\mathcal{P}$ зависит от твиста L .

⁹⁾Термин *инвертивность* возникает из формулировки соответствующего свойства для преобразования Меллина: $\tilde{P}(x) = -x\tilde{P}(1/x)$, где $\mathcal{P}(N) = \int_0^1 dx x^{S-1} \tilde{P}(x)$.

Ниже приводится пример четырехпетлевой аномальной размерности, полученной в замкнутом виде с использованием (обобщенного) принципа максимальной трансцендентности, структура которой успешно проходит тест на инвертивную инвариантность. Пример глюонных операторов твиста 3 интересен по различным причинам. Во-первых, в противоположность квазипартонным операторам, составленным из скаляров и гауино, которые принадлежат замкнутым секторам, а потому масштабируются автономно во всех петлях¹⁰⁾, описание глюонного оператора корректно только на уровне одной петли [47], а эффекты смешивания проявляются в старших порядках (см. обсуждение в работе [26]). Во-вторых, в случае твиста 3 операторы, построенные из скаляров, гауино или калибровочных полей, не связаны преобразованиями суперсимметрии, в отличие от случая твиста 2, в котором все каналы содержатся в одном супермультиплете¹¹⁾. Такая более богатая структура мультиплетов приводит к существованию разнообразных классов универсальности для аномальных размерностей и к появлению обобщенной формы принципа максимальной трансцендентности.

Отметим, что при исследовании существования MBV-подобных соотношений в режиме сильной связи естественно использовать AdS/CFT-соответствие. Поскольку планарная теория возмущений должна быть сходящейся, такая организованная структура первых поправочных членов в разложении старших спинов должна быть наблюдаема также и в энергиях квазиклассических струнных состояний, отвечающих операторам твиста. Этот анализ, начатый в работе [44] для петлевых струн на классическом уровне, был недавно расширен [48] на конфигурации (струну с пиками), которые должны отвечать операторам твиста старших размерностей и в однопетлевом приближении в струнной теории возмущений. Замечательно, что разложение старших спинов для энергии классической струны, как оказалось, имеет в точности ту же самую структуру, что и разложение $\gamma(N)$ в пертурбативной калибровочной теории, и оно на самом деле удовлетворяет соотношениям типа MBV на уровне одной петли. Это дает серьезные основания считать, что эти соотношения справедливы не только в режиме слабой связи (калибровочная теория), но и в пертурбативном разложении в режиме сильной связи (теория струн), и подтверждает необходимость поиска серьезного объяснения их происхождения.

2. АНАЛИЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Замкнутые формулы для аномальных размерностей. На уровне одной петли глюонный сектор задается замкнутой спиновой цепочкой $XX_{-3/2}$, а аномальная размерность имеет вид точного решения уравнения Бакстера. В старших

¹⁰⁾ Операторы, построенные из скаляров, принадлежат подсектору $\mathcal{N} = 4\,sl(2)$, который замкнут во всех порядках. Что касается операторов, построенных из гауино, они появляются в замкнутом $sl(2 \mid 1)$ подсекторе, в котором наблюдается смешивание между скалярами и фермионами, но только не для максимально фермионной компоненты [46], которая как раз и представляет интерес с точки зрения класса квазипартонных операторов.

¹¹⁾ Такой класс универсальности для твиста 2 появляется также и в секторе гауино [24].

порядках необходимо пертурбативно решать уравнения Бете с дальнодействием, которые в компактной форме записи имеют вид

$$\left(\frac{u_j + iV_{k_j}/2}{u_j - iV_{k_j}/2}\right)^L = \prod_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq j}}^K \frac{u_j - u_\ell + iM_{k_j, k_\ell}/2}{u_j - u_\ell - iM_{k_j, k_\ell}/2}, \quad (8)$$

где $M_{k\ell}$ – матрица Картана алгебры, V_k – индексы Дынкина спиновых представлений, отвечающие каждому узлу цепочки¹²⁾. Числа возбуждений K_i корней Бете u_i можно вычислить [4] исходя из квантовых чисел суперконформного состояния, связанного с интересующим нас глюонным оператором твиста 3. Чтобы найти правильное суперконформное примарное состояние, описывающее этот сектор, следует применить суперконформные свойства (максимально симметричного) тензорного произведения трех синглетонов [49]. В работе [26] было найдено, что диаграмма Дынкина, связанная с матрицей Картана из формулы (8), имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{---} & \otimes & \cdots & \circ & \cdots & \otimes & \text{---} \\
& & & & & +1 & \\
& & & & & \text{---} & \\
& & & & & \circ & \\
& & & & & N+3 & \\
& & & & & N+4 & \\
& & & & & N+2 & \\
& & & & & 1 & \\
& & & & & \text{---} &
\end{array} \quad (9)$$

Число над диаграммой указывает спиновое представление, числа под диаграммой — числа корневые числа возбуждений для суперконформного примарного поля. Используя однопетлевое решение в качестве исходных данных¹³⁾, можно разложить уравнения Бете по константе связи g , вычисляя порядок за порядком теории возмущений. Уравнения для квантовых поправок к однопетлевым корням линейны, следовательно они могут быть решены с высокой точностью. Полученное петлевое разложение для аномальной размерности содержит рациональные коэффициенты, которые легко найти согласно методу работ [22], [23]. Чтобы найти подходящую замкнутую аналитическую формулу для первых петель следует предположить, что аномальная размерность удовлетворяет обобщенному принципу максимальной трансцендентности. По аналогии с однопетлевым результатом [49], в котором не все члены имеют одну и ту же степень трансцендентности¹⁴⁾, и принимая в расчет аналогичные вычисления в КХД [50], можно предложить следующий анзац, обобщающий однопетлевой результат:

$$\gamma_n = \sum_{\tau=0}^{2n-1} \gamma_n^{(\tau)}, \quad \gamma_n^{(\tau)} = \sum_{k+\ell=\tau} \frac{\mathcal{H}_{\tau,\ell}(n)}{(n+1)^k}, \quad n = \frac{N}{2} + 1, \quad (10)$$

¹²⁾Вместе с уравнениями (8) необходимо рассмотреть дополнительную связь, возникающую из периодичности спиновой цепочки.

¹³⁾См. работу [26] относительно объяснения необходимости (обратно упорядоченной) дуализации корней Бете.

14) Альтернативная точка зрения состоит в том, чтобы применить принцип максимальной трансцендентности в соответствующем неканоническом базисе гармонических сумм.

где $\mathcal{H}_{\tau,\ell}(n)$ – комбинация гармонических сумм с однородной фиксированной степенью трансцендентности ℓ . Члены с $k = 0$ обладают максимальной трансцендентностью, а все остальные имеют трансцендентность предыдущего порядка. Трехпетлевой результат был найден в работе [26]. В работе [45] мы получили список значений для четырехпетлевой аномальной размерности $\gamma_4(n)$ в виде точно найденных рациональных чисел, полученных из пертурбативного разложения уравнений Бете с дальнодействием и сравнили их с общим анзацем (10). Большое количество членов имеют неопределенные коэффициенты. Для сокращения их числа мы ввели некоторые структурные ограничения, возникающие из анализа трехпетлевого результата. Полное изложение полученного результата можно найти в работе [45]. В настоящей работе рассмотрен только член с максимальной трансцендентностью¹⁵⁾:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{7,7} = & \frac{S_7}{2} + 7S_{1,6} + 15S_{2,5} - 5S_{3,4} - 29S_{4,3} - 21S_{5,2} - 5S_{6,1} - 40S_{1,1,5} - \\ & - 32S_{1,2,4} + 24S_{1,3,3} + 32S_{1,4,2} - 32S_{2,1,4} + 20S_{2,2,3} + 40S_{2,3,2} + 4S_{2,4,1} + \\ & + 24S_{3,1,3} + 44S_{3,2,2} + 24S_{3,3,1} + 36S_{4,1,2} + 36S_{4,2,1} + 24S_{5,1,1} + 80S_{1,1,1,4} - \\ & - 16S_{1,1,3,2} + 32S_{1,1,4,1} - 24S_{1,2,2,2} + 16S_{1,2,3,1} - 24S_{1,3,1,2} - 24S_{1,3,2,1} - \\ & - 24S_{1,4,1,1} - 24S_{2,1,2,2} + 16S_{2,1,3,1} - 24S_{2,2,1,2} - 24S_{2,2,2,1} - 24S_{2,3,1,1} - \\ & - 24S_{3,1,1,2} - 24S_{3,1,2,1} - 24S_{3,2,1,1} - 24S_{4,1,1,1} - 64S_{1,1,1,3,1}, \end{aligned}$$

где $S_a \equiv S_a(n)$, $n = N/2 + 1$, – вложенные гармонические суммы, определяемые формулами

$$S_a(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^a}, \quad S_{a,b}(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^a} S_b(n). \quad (11)$$

2.2. Формулы, инвариантные при инверсии. Доказательство инвариантности при инверсии для глюонных операторов сводится сначала к нахождению функции $\mathcal{P}$ с помощью обращения соотношения (6), которое в терминах пертурбативных разложений $\mathcal{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k g^{2k}$ и $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g^{2k}$ в конечном итоге записывается в виде

$$\mathcal{P}_1 = \gamma_1, \quad \mathcal{P}_2 = \gamma_2 - \frac{1}{8}(\gamma_1^2)', \quad \dots \quad (12)$$

Затем следует проверить справедливость четности функции (7) относительно квадратичного оператора Казимира, который в этом случае имеет вид

$$J^2 = N^2 + 8N + \frac{63}{4} = 4n(n+2) + \frac{15}{4}. \quad (13)$$

Константа в выражении (13) несущественна при доказательстве инвариантности и эффективный оператор Казимира может быть представлен в виде $J_{\text{eff}}^2 = n(n+2)$. Примечательно, что полное доказательство инвариантности при инверсии в четырехпетлевом приближении может быть получено в замкнутом виде. Для этого приведем следующие полезные утверждения (доказательство см. в работе [45]).

¹⁵⁾ Следующий член с трансцендентностью 7 получается из вклада от так называемого одевающего множителя в уравнениях Бете. Он состоит из комбинации гармонических сумм с трансцендентностью 4, умноженных на характеристический вклад ζ_3 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(n)$ инвариантна при инверсии относительно оператора $J^2 = n(n+1)$. Тогда комбинация $\tilde{f}(n) = f(n) + f(n+1)$ инвариантна при инверсии относительно J_{eff}^2 .

Рассмотрим линейное отображение, определенное на линейной комбинации простых S сумм,

$$\Phi_a(S_{b,c}) = S_{a,b,c} - \frac{1}{2} S_{a+b,c},$$

и определим

$$I_a = S_a, \quad I_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \Phi_{a_1}(\Phi_{a_2}(\dots \Phi_{a_{n-1}}(S_{a_n}))).$$

ТЕОРЕМА 2. Комбинации $I_{a_1, \dots, a_n}$ с нечетными $a_1, \dots, a_n$ имеют инвертивно инвариантное разложение при больших N вида

$$I_{a_1, \dots, a_n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{P_{\ell}(\ln J^2)}{J^{2\ell}}, \quad (14)$$

где $J^2 = N(N+1)$, P_{ℓ} – многочлен.

Можно использовать эти результаты, записав функцию $\mathcal{P}$ из формулы (12) в явной инвертивно инвариантной форме. Например, в трехпетлевом случае имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 = & \frac{\tilde{I}_3}{2(n+1)^2} + \frac{3\tilde{I}_5}{2} - 4\tilde{I}_{1,1,3} + \frac{2}{(n+1)^4} - 4\tilde{I}_{1,3} + \frac{\pi^2 \tilde{I}_3}{6} - 2\tilde{I}_3 + 4\tilde{I}_{1,1}\zeta_3 - \\ & - \frac{\zeta_3}{(n+1)^2} - \frac{4}{(n+1)^2} + 4\zeta_3 \tilde{I}_1 + \frac{4\pi^4 \tilde{I}_1}{45} + 4\zeta_3 + \frac{8\pi^4}{45} + \frac{4\pi^2}{3} + 32, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{I}_a \equiv \tilde{I}_a(n) = \tilde{I}_a(n) + \tilde{I}_a(n+1)$. Как подробно объяснено в работе [45], инвариантность при инверсии очевидна, поскольку формула (15) представляет собой комбинацию инвариантов $\tilde{I}_a$ (таких, как в теореме 2)¹⁶⁾ и множителей $(n+1)^{-p}$ с четными p ¹⁷⁾. Тем самым в этом случае выражение автоматически инвертивно инвариантно относительно $n(n+2)$. Аналогичные явно инвертивно инвариантные выражения для $\mathcal{P}$ вплоть до четырех петель получены в работе [45].

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2:2** (1998), 231–252; [arXiv: hep-th/9711200](#); *Internat. J. Theoret. Phys.*, **38:4** (1999), 1113–1133; S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428:1–2** (1998), 105–114; [arXiv: hep-th/9802109](#); E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2:2** (1998), 253–291; [arXiv: hep-th/9802150](#); V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **05** (2004), 024; [arXiv: hep-th/0402207](#).
- [2] I. Bena, J. Polchinski, R. Roiban, *Phys. Rev. D*, **69:4** (2004), 046002; [arXiv: hep-th/0305116](#).
- [3] N. Beisert, C. Kristjansen, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **664:1–2** (2003), 131–184; [arXiv: hep-th/0303060](#); N. Beisert, *Phys. Rep.*, **405:1–3** (2005), 1–202; [arXiv: hep-th/0407277](#).

¹⁶⁾ Инварианты $\tilde{I}_a$ должны входить с нечетными индексами [45].

¹⁷⁾ Ограничение на p следует из соотношения $n+1 = \sqrt{n(n+2)+1}$.

- [4] N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **670**:3 (2003), 439–463; [arXiv: hep-th/0307042](#).
- [5] N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **727**:1–2 (2005), 1–62; [arXiv: hep-th/0504190](#).
- [6] M. Beccaria, V. Forini, *JHEP*, **11** (2007), 031; [arXiv: 0710.0217](#).
- [7] G. Ferretti, R. Heise, K. Zarembo, *Phys. Rev. D*, **70**:7 (2004), 074024; [arXiv: hep-th/0404187](#).
- [8] N. Beisert, G. Ferretti, R. Heise, K. Zarembo, *Nucl. Phys. B*, **717**:1–2 (2005), 137–189; [arXiv: hep-th/0412029](#).
- [9] A. Rej, M. Staudacher, S. Zieme, *J. Stat. Mech.*, **08** (2007), 08006; [arXiv: hep-th/0702151](#).
- [10] A. V. Belitsky, S. É. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 045021; [arXiv: hep-th/0311104](#); A. V. Belitsky, V. M. Braun, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:28 (2004), 4715–4788; [arXiv: hep-th/0407232](#); A. V. Belitsky, S. É. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **722**:1–2 (2005), 191–221; [arXiv: hep-th/0503137](#).
- [11] Л. Н. Липатов, *Письма в ЖЭТФ*, **59**:9 (1994), 571–574; [arXiv: hep-th/9311037](#); L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *Phys. Lett. B*, **342**:1–4 (1995), 311–322; [arXiv: hep-th/9404173](#); G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **443**:1–4 (1995), 255–301; [arXiv: hep-ph/9501232](#); V. M. Braun, S. É. Derkachov, A. N. Manashov, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:10 (1998), 2020–2023; [arXiv: hep-ph/9805225](#).
- [12] A. V. Belitsky, S. É. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **708**:1–3 (2005), 115–193; [arXiv: hep-th/0409120](#).
- [13] A. V. Belitsky, G. P. Korchemsky, D. Müller, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:15 (2005), 151603; [arXiv: hep-th/0412054](#).
- [14] A. V. Belitsky, G. P. Korchemsky, D. Müller, *Nucl. Phys. B*, **735**:1–3 (2006), 17–83; [arXiv: hep-th/0509121](#).
- [15] P. Di Vecchia, A. Tanzini, *J. Geom. Phys.*, **54**:1 (2005), 116–130; [arXiv: hep-th/0405262](#).
- [16] Yu. L. Dokshitzer, *ЯФ*, **71**:4, 660–674.
- [17] L. J. Dixon, *Gluon scattering in $N = 4$ super-Yang-Mills theory from weak to strong coupling*, [arXiv: hep-th/0803.2475](#).
- [18] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 521–529; **632**:5–6 (2006), 754–756; [arXiv: hep-th/0404092](#); A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *DGLAP and BFKL evolution equations in the $N = 4$ supersymmetric gauge theory*, [arXiv: hep-ph/0112346](#); *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 19–61; **685**:1–3 (2004), 405–407; [arXiv: hep-ph/0208220](#).
- [19] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, *Nucl. Phys. B*, **688**:1–2 (2004), 101–134; [arXiv: hep-ph/0403192](#); A. Vogt, S. Moch, J. A. M. Vermaseren, *Nucl. Phys. B*, **691**:1–2 (2004), 129–181; [arXiv: hep-ph/0404111](#).
- [20] M. Staudacher, *JHEP*, **05** (2005), 054; [arXiv: hep-th/0412188](#).
- [21] Z. Bern, L. J. Dixon, V. A. Smirnov, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 085001; [arXiv: hep-th/0505205](#).
- [22] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher, V. N. Velizhanin, *J. Stat. Mech.*, **10** (2007), 10003; [arXiv: 0704.3586](#).
- [23] M. Beccaria, *JHEP*, **06** (2007), 044; [arXiv: 0704.3570](#).
- [24] M. Beccaria, *JHEP*, **06** (2007), 054; [arXiv: 0705.0663](#).
- [25] M. Beccaria, Yu. L. Dokshitzer, G. Marchesini, *Phys. Lett. B*, **652**:4 (2007), 194–202; [arXiv: 0705.2639](#).
- [26] M. Beccaria, *JHEP*, **09** (2007), 023; [arXiv: 0707.1574](#).
- [27] A. V. Belitsky, J. Henn, C. Jarczak, D. Müller, E. Sokatchev, *Phys. Rev. D*, **77**:4 (2008), 045029; [arXiv: 0707.2936](#).
- [28] M. Beccaria, F. Catino, *JHEP*, **01** (2008), 067; [arXiv: 0710.1991](#).
- [29] G. Altarelli, *Phys. Rep.*, **81**:1 (1982), 1–129.
- [30] A. D. Martin, *Acta Phys. Polon. B*, **39**:9 (2008), 2025–2062; [arXiv: 0802.0161](#).

- [31] Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **23** (1976), 642–656.
- [32] C. Gómez, J. Gunnesson, R. Hernández, *JHEP*, **09** (2008), 060; [arXiv: 0807.2339](#).
- [33] A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **667**:1–2 (2003), 3–54; [arXiv: hep-th/0304028](#).
- [34] G. P. Korchemsky, G. Marchesini, *Nucl. Phys. B*, **406**:1–2 (1993), 225–258; [arXiv: hep-ph/9210281](#).
- [35] A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **748**:1–2 (2006), 24–59; [arXiv: hep-th/0601112](#).
- [36] B. Basso, G. P. Korchemsky, J. Kotański, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:9 (2008), 091601; [arXiv: 0708.3933](#).
- [37] M. K. Benna, S. Benvenuti, I. R. Klebanov, A. Scardicchio, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:13 (2007), 131603; [arXiv: hep-th/0611135](#); L. F. Alday, G. Arutyunov, B. Eden, M. K. Benna I. R. Klebanov, *JHEP*, **04** (2007), 082; [arXiv: hep-th/0702028](#); M. Beccaria, G. F. De Angelis, V. Forini, *JHEP*, **04** (2007), 066; [arXiv: hep-th/0703131](#); I. Kostov, D. Serban, D. Volin, *Nucl. Phys. B*, **789**:3 (2008), 413–451; [arXiv: hep-th/0703031](#); P. Y. Casteill, C. Kristjansen, *Nucl. Phys. B*, **785**:1–2 (2007), 1–18; [arXiv: 0705.0890](#); I. Kostov, D. Serban, D. Volin, *JHEP*, **08** (2008), 101; [arXiv: 0801.2542](#).
- [38] L. Freyhult, A. Rej, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **07** (2008), 07015; [arXiv: 0712.2743](#); B. Basso, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **807**:3 (2009), 397–423; [arXiv: 0805.4194](#); D. Fioravanti, P. Grinza, M. Rossi, *The generalised scaling function: a systematic study*, [arXiv: 0808.1886](#).
- [39] M. Kruczenski, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **77**:12 (2008), 126005; [arXiv: 0802.2039](#).
- [40] B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **11** (2006), 11014; [arXiv: hep-th/0603157](#).
- [41] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), 01021; [arXiv: hep-th/0610251](#).
- [42] Yu. L. Dokshitzer, Talk at the Workshop “Future Physics at HERA” (DESY, Hamburg, 1995–1996), unpublished; Y. L. Dokshitzer, V. A. Khoze, S. I. Troyan, *Phys. Rev. D*, **53**:1 (1996), 89–119; [arXiv: hep-ph/9506425](#); Yu. L. Dokshitzer, G. Marchesini, G. P. Salam, *Phys. Lett. B*, **634**:5–6 (2006), 504–507; [arXiv: hep-ph/0511302](#).
- [43] E. Laenen, L. Magnea, G. Stavenga, *Phys. Lett. B*, **669**:2 (2008), 173–179; [arXiv: 0807.4412](#).
- [44] B. Basso, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **775**:1–2 (2007), 1–30; [arXiv: hep-th/0612247](#).
- [45] M. Beccaria, V. Forini, *JHEP*, **06** (2008), 077; [arXiv: 0803.3768](#).
- [46] A. V. Belitsky, *Phys. Lett. B*, **650**:1 (2007), 72–80; [arXiv: hep-th/0703058](#).
- [47] A. V. Belitsky, *Nucl. Phys. B*, **803**:1–2 (2008), 171–193; [arXiv: 0803.2035](#).
- [48] M. Beccaria, V. Forini, A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *Structure of large spin expansion of anomalous dimensions at strong coupling*, [arXiv: 0809.5234](#).
- [49] N. Beisert, M. Bianchi, J. F. Morales, H. Samtleben, *JHEP*, **07** (2004), 058; [arXiv: hep-th/0405057](#).
- [50] R. Mertig, W. L. van Neerven, *Z. Phys. C*, **70**:4 (1996), 637–653; [arXiv: hep-ph/9506451](#).