Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. При-
нари, Построение расширенной резольвенты оператора
теплопроводности с помощью сплетающих преобразова-
ний, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 364–378

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 03:44:53

© 2009 г.

М. Бойти*, Ф. Пемпинелли*,
А. К. Погребков†, Б. Принари*

ПОСТРОЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СПЛЕТАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Введены сплетающие преобразования для оператора теплопроводности. Они позволяют одновременно наложить по Дарбу N солитонов на общий гладкий убывающий на бесконечности потенциал и построить соответствующие решения Йоста. Эти сплетающие операторы также использованы для исследования проблемы существования расширенной резольвенты. Детально рассмотрены существование и единственность расширенной резольвенты в случае N солитонов с N “входящими” лучами и одним “исходящим” лучом.

Ключевые слова: преобразование Дарбу, многомерный солитон, аннигилятор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили в версии, называемой КПП,

$$(u_t - 6uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1})_{x_1} = -3u_{x_2x_2}, \quad (1.1)$$

является $(2 + 1)$ -мерным обобщением знаменитого уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Как следствие уравнение КПП допускает решения, ведущие себя на пространственной бесконечности подобно решениям уравнения КдФ. Например, если $u_1(t, x_1)$ удовлетворяет уравнению КдФ, то $u(t, x_1, x_2) = u_1(t, x_1 + \mu x_2 - 3\mu^2 t)$ является решением уравнения КПП для произвольной константы $\mu \in \mathbb{R}$. Таким образом, важно рассматривать решения уравнения (1.1), которые убывают на бесконечности во всех направлениях за исключением конечного числа одномерных лучей с поведением типа u_1 . Даже несмотря на то что уравнение КПП известно как интегрируемое уравнение более трех десятков лет [1], [2], его общая теория (включающая такие неубывающие решения) далека от завершения. Так, задача Коши для уравнения КПП с быстроубывающими начальными данными была решена в работах [3], [4]

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento and INFN, I-73100 Lecce, Italy.

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: pogreb@mi.ras.ru

с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), основанного на спектральном анализе оператора теплопроводности

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) = -\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_1}^2 - u(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad (1.2)$$

задающего вспомогательную линейную задачу для уравнения КПП. Стандартный подход к спектральной теории оператора (1.2) основан на интегральных уравнениях для решения Йоста $\Phi(x, \mathbf{k})$ или для $\Psi(x, \mathbf{k})$ – решения Йоста дуального оператора $\mathcal{L}^d$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. Однако известно, что в случае потенциалов с одномерным асимптотическим поведением данные интегральные уравнения плохо определены.

Для преодоления этих трудностей в работах [5]–[14] был предложен резольвентный подход. В рамках этого подхода вводится пространство операторов $A(q)$ с ядрами $A(x, x'; q)$, принадлежащими пространству обобщенных функций умеренного роста от переменных $x, x', q \in \mathbb{R}^2$. Обычные дифференциальные операторы $\mathcal{L}(x, \partial_x)$ погружаются в это пространство как операторы с ядрами

$$L(x, x'; q) \equiv \mathcal{L}(x, \partial_x + q)\delta(x - x'). \quad (1.3)$$

В силу дополнительной зависимости от параметра q эти операторы называются расширенными. В этом пространстве было введено обобщение резольвенты дифференциального оператора, называемое расширенной резольвентой, которое позволило рассматривать спектральную теорию операторов с нетривиальным асимптотическим поведением на пространственной бесконечности.

В работах [11]–[14] мы рассмотрели нестационарный оператор Шредингера и оператор теплопроводности с потенциалами, не убывающими только по одному направлению. Первым шагом в решении задачи было погружение чисто одномерной спектральной теории в двумерную посредством построения двумерной расширенной резольвенты для оператора с потенциалом $u(x) \equiv u_1(x_1)$. Второй шаг состоял в одеивании этой резольвенты с помощью произвольного двумерного возмущения потенциала u_1 . В конечном итоге все математические объекты, относящиеся к МОЗР, были выведены из расширенной резольвенты путем редукции, что позволило сформулировать прямую и обратную задачи. Отметим также, что стандартная спектральная теория оператора теплопроводности для случая потенциала, не убывающего в одном пространственном направлении, была развита в работе [15], однако при некоторых специальных и неявных условиях на потенциал.

В настоящей работе мы рассматриваем заметно более сложную проблему: случай потенциала u , не убывающего по нескольким непараллельным лучам. В этом случае нет аналогии с одномерной задачей, и вся теория должна быть построена непосредственно, без погружения одномерных величин в два измерения. Следовательно, мы должны рассматривать действительно двумерные потенциалы напрямую, как это уже было сделано в работах [16], [17] для нестационарного оператора Шредингера. Фактически мы используем процедуру, которая была успешно применена и в том случае. А именно, для построения потенциала, отвечающего N солитонам, наложенным на общий гладкий убывающий потенциал, а также для построения соответствующих решений Йоста, мы вместо рекурсивного применения

(бинарных) преобразований Дарбу строим эти величины напрямую, используя сплетающие преобразования. Таким способом мы приходим к потенциалам и решениям Ёоста, полученным ранее в статье [11] с помощью рекурсивной процедуры, а также к альтернативным представлениям чисто солитонных потенциалов, полученным в работах [18]–[22] с применением τ -функции. Здесь уместно отметить, что оператор теплопроводности не является самодуальным, а потому сингулярное поведение левого и правого сплетающих операторов не обязано быть согласованным. Это объясняет, почему структура N -солитонного решения для уравнения КПП намного более богата, чем для уравнения КП. В частности, N -солитонное решение может иметь различное число “входящих” и “исходящих” (в смысле $x_2 \rightarrow -\infty$ или $x_2 \rightarrow +\infty$) лучей.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы кратко излагаем некоторые аспекты и основные идеи метода расширенной резольвенты, основываясь на примере оператора (1.2) с гладким, быстроубывающим потенциалом $u(x)$. За дальнейшими деталями мы отсылаем заинтересованного читателя к работам [5]–[9]. В разделе 3 мы вводим сплетающие операторы, т.е. операторы, которые “сплетают” оператор L – расширение в смысле (1.3) оператора $\mathcal{L}$ из (1.2) – и оператор L' того же типа с потенциалом u' , описывающим N солитонов, наложенных по Дарбу на фоновый потенциал u . В разделе 4, применяя эти сплетающие операторы, мы выводим при условии существования резольвенты $M'(q)$ явное выражение для ее ядра $M'(x, x'; q)$. Таким образом, проблема существования резольвенты $M'(q)$ сводится к проблеме нахождения области на q -плоскости, где ядро является распределением умеренного роста. Эта задача оказалась более тяжелой, чем в случае нестационарного оператора Шредингера, а потому в разделе 5 мы сначала рассматриваем чисто N -солитонные потенциалы, а затем в разделе 6 – специальный простой подкласс N -солитонных потенциалов с N “входящими” лучами и только одним “исходящим” лучом. Мы доказываем, что для $N > 1$ резольвента $M'(q)$ существует только в области q -плоскости, внешней к некоторому многоугольнику с $N + 1$ сторонами. Более конкретно, мы доказываем, что существует такое значение $\mathbf{k}_0$ спектрального параметра $\mathbf{k}$, для которого дуальное решение Ёоста $\Psi'(x, \mathbf{k})$ удовлетворяет условию, что $\Psi'(x, \mathbf{k}_0)e^{q_1 x_1 + q_2 x_2}$ убывает на x -плоскости экспоненциально для любого значения q , принадлежащего этому многоугольнику. Отсюда мы заключаем, что внутри этого многоугольника твистованный оператор $L'(q)$ обладает левым аннигилятором и не может иметь правого обратного. Однако функция Грина оператора $\mathcal{L}'$ существует и может быть однозначно получена с помощью редукции $M'(q)$. В последующей публикации мы планируем рассмотреть общий случай произвольного числа входящих и исходящих лучей и прояснить роль этих аннигиляторов в спектральной теории таких потенциалов.

2. ФОНОВАЯ ТЕОРИЯ

Введем пространство *расширенных* операторов $A(q)$, т.е. операторов с ядром $A(x, x'; q)$, принадлежащим пространству $\mathcal{S}'$ обобщенных функций умеренного роста от шести вещественных переменных $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x'_1, x'_2)$ и $q = (q_1, q_2)$. Для двух расширенных операторов $A(q)$ и $B(q)$ с ядрами $A(x, x'; q)$ и $B(x, x'; q)$ мы вводим

закон композиции

$$(AB)(x, x'; q) = \int dx'' A(x, x''; q) B(x'', x'; q), \quad (2.1)$$

предполагая, что интеграл существует в смысле распределений. Оператор A может иметь обратный A^{-1} в смысле этой композиции: $AA^{-1} = I$ и $A^{-1}A = I$, где I – единичный оператор, т.е. оператор с ядром $I(x, x'; q) = \delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2)$. Специальный подкласс расширенных операторов дается расширениями $L(q)$ дифференциальных операторов, определенными в (1.3), где $\mathcal{L}(x, \partial_x)$ означает дифференциальный оператор, коэффициенты которого суть гладкие функции от x . Поставим в соответствие каждому оператору $A(q)$ с ядром $A(x, x'; q)$ его “хет”-ядро

$$\hat{A}(x, x'; q) = e^{q(x-x')} A(x, x'; q), \quad (2.2)$$

где $qx = q_1x_1 + q_2x_2$. Для дифференциального оператора $L(q)$ эта процедура является обратной к расширению, введенному в (1.3), т.е. $\hat{L}(x, x'; q) = L(x, x')$. Заметим, однако, что, поскольку на ядра операторов A налагается лишь условие принадлежности пространству распределений, в общем случае хет-ядро $\hat{A}$ зависит от q и не обязано быть ограниченным. Укажем также, что оператор $A^*(q)$, сопряженный оператору $A(q)$, задается ядром

$$A^*(x, x'; q) = \overline{A(x, x'; q)}, \quad (2.3)$$

так что самосопряженный оператор – это оператор с вещественным ядром.

Удобно ввести задаваемое преобразованием Фурье представление оператора $A(q)$ в p -пространстве:

$$A(p; \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \int dx' e^{i(p+\mathbf{q}_{\Re})x - i\mathbf{q}_{\Im}x'} A(x, x'; \mathbf{q}_{\Im}), \quad (2.4)$$

где $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ и мы ввели двумерный комплексный вектор

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\Re} + i\mathbf{q}_{\Im}, \quad q \equiv \mathbf{q}_{\Im}, \quad \mathbf{q}_{\Re}, \mathbf{q}_{\Im} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.5)$$

Композиция (2.1) в p -пространстве принимает вид “сдвинутой” свертки

$$(AB)(p; \mathbf{q}) = \int dp' A(p - p'; \mathbf{q} + p') B(p'; \mathbf{q}). \quad (2.6)$$

С учетом сделанных определений расширение оператора теплопроводности (1.2) имеет вид

$$L = L_0 - u, \quad u(x, x'; q) = u(x)\delta(x - x'), \quad (2.7)$$

где L_0 является расширением в смысле (1.3) дифференциальной части $\mathcal{L}_0$ оператора теплопроводности (1.2) и в силу (2.4) имеет в p -пространстве ядро, задаваемое равенством

$$L_0(p; \mathbf{q}) = (i\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2)\delta(p). \quad (2.8)$$

Основной объект нашего исследования – расширенная резольвента (или просто резольвента, для краткости) $M(q)$ оператора $L(q)$, т.е. оператор, обратный к L в смысле композиции (2.1) (или (2.6)):

$$LM = ML = I. \quad (2.9)$$

Он может быть определен как решение интегральных уравнений

$$M = M_0 + M_0 u M, \quad M = M_0 + u M M_0, \quad (2.10)$$

где M_0 – резольвента оператора L_0 с нулевым потенциалом (голого оператора). В силу (2.8) мы имеем для ядра этого оператора в p -пространстве соотношение $M_0(p; \mathbf{q}) = \delta(p)/(i\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2)$. В случае быстроубывающего потенциала $u(x)$ существование и единственность решения уравнений (2.10) можно доказать по аналогии с работой [4]. Заметим, что для вещественного потенциала $u(x)$ как L , так и M самосопряжены в смысле определения (2.3).

В силу (2.6) и данной выше явной формы $M_0(p; \mathbf{q})$ интегральные уравнения (2.10), записанные в p -пространстве, показывают, что ядро $M(p; \mathbf{q})$ сингулярно при $\mathbf{q}_2 = -i\mathbf{q}_1^2$ и при $\mathbf{q}_2 + p_2 = -i(\mathbf{q}_1 + p_1)^2$. Поэтому естественно ввести следующие транкированные и редуцированные значения резольвенты:

$$\begin{aligned} \nu(p; \mathbf{q}) &= (ML_0)(p; \mathbf{q})|_{\mathbf{q}_2 = -i\mathbf{q}_1^2}, \\ \omega(p; \mathbf{q}) &= (L_0M)(p; \mathbf{q})|_{\mathbf{q}_2 = -i(\mathbf{q}_1 + p_1)^2 - p_2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Можно показать, что оператор $L(q)$ и его резольвента $M(q)$ допускают следующие билинейные представления через ν и ω :

$$L = \nu L_0 \omega, \quad M = \nu M_0 \omega. \quad (2.12)$$

Мы называем операторы ν и ω одевающими, поскольку они “одевают” голые операторы L_0 и M_0 . Отметим, что $\nu(p; \mathbf{q})$ и $\omega(p; \mathbf{q})$ имеют асимптотическое поведение

$$\lim_{\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty} \nu(p; \mathbf{q}) = \delta(p), \quad \lim_{\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty} \omega(p; \mathbf{q}) = \delta(p)$$

и не зависят от $\mathbf{q}_2$, что при необходимости мы поясняем записью $\nu(p; \mathbf{q}_1)$ и $\omega(p; \mathbf{q}_1)$.

Одевающие операторы ν и ω удовлетворяют уравнениям

$$L\nu = \nu L_0, \quad \omega L = L_0 \omega \quad (2.13)$$

и являются взаимно обратными:

$$\omega\nu = I, \quad \nu\omega = I. \quad (2.14)$$

Для того чтобы задать с помощью одевающих операторов решения Йоста, мы вводим следующие преобразования Фурье:

$$\chi(x, \mathbf{q}_1) = \int dp e^{-ipx} \nu(p; \mathbf{q}_1), \quad \xi(x, \mathbf{q}_1) = \int dp e^{-ipx} \omega(p; \mathbf{q}_1 - p_1). \quad (2.15)$$

Тогда решение Йоста и дуальное решение Йоста можно определить, соответственно, как

$$\Phi(x, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}x_1 - \mathbf{k}^2 x_2} \chi(x, \mathbf{k}), \quad \Psi(x, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}x_1 + \mathbf{k}^2 x_2} \xi(x, \mathbf{k}), \quad (2.16)$$

где мы обозначили $\mathbf{q}_1$ как $\mathbf{k}$, что отвечает стандартному обозначению спектрального параметра. В силу (2.13) эти функции удовлетворяют уравнению теплопроводности и его дуальному:

$$(-\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x))\Phi(x, \mathbf{k}) = 0, \quad (\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x))\Psi(x, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.17)$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ ПОСРЕДСТВОМ СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ζ И η

Для построения двумерного потенциала, описывающего N солитонов, наложенных на общий гладкий фон, мы обходим рекурсивную процедуру, использованную в работе [11] и, используя операторную формулировку, введенную в предыдущем разделе, напрямую строим окончательные величины с помощью сплетающих операторов. А именно, рассмотрим преобразование от оператора L в (2.7) к новому оператору того же вида

$$L' = L_0 - u', \quad u'(x, x'; q) = u'(x)\delta(x - x'), \quad (3.1)$$

заданному операторной парой ζ, η посредством формул

$$L'\zeta = \zeta L, \quad \eta L' = L\eta, \quad (3.2)$$

“сплетающих” L с L' . Мы считаем потенциал $u(x)$ в L вещественной, гладкой, быстроубывающей функцией и ищем самосопряженные операторы ζ и η такие, что новый потенциал $u'(x)$ также является вещественным и гладким. Помимо этого мы требуем, чтобы η был левым обратным к оператору ζ , т.е. удовлетворял условию

$$\eta\zeta = I, \quad (3.3)$$

так что

$$L = \eta L' \zeta. \quad (3.4)$$

Для того чтобы новый потенциал $u'(x)$ не убывал по некоторым направлениям на плоскости, два оператора L и L' должны быть связаны преобразованием, более общим, чем подобие. Поэтому мы ищем сплетающие операторы, для которых произведение $\zeta\eta$ отлично от I . Полагая

$$\zeta\eta = I - P, \quad (3.5)$$

получаем, что P – ортогональный самосопряженный проектор, поскольку в силу (3.3) $P^2 = P$ и $P^* = P$ благодаря свойству самосопряженности ζ и η . Сплетающие операторы ζ и η порождают новый потенциал u' посредством формул (3.2), а также новые одевающие операторы ν' и ω' . Действительно, учтя (2.13), мы получаем на основании (3.2), что $L'\zeta\nu = \zeta L\nu = \zeta\nu L_0$ и $\omega\eta L' = \omega L\eta = L_0\omega\eta$. Поэтому операторы ν' и ω' задаются как

$$\nu' = \zeta\nu, \quad \omega' = \omega\eta \quad (3.6)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$L'\nu' = \nu' L_0, \quad \omega' L' = L_0 \omega', \quad (3.7)$$

аналогичным уравнениям (2.13) для одевающих операторов ν и ω .

Отметим, что в силу (3.3) скалярное произведение этих одевающих операторов, как и исходных в (2.14), равно I :

$$\omega' \nu' = I. \quad (3.8)$$

Однако в отличие от ν и ω эти операторы не удовлетворяют соотношению полноты, поскольку из (2.14) и в отличие от него мы имеем в силу (3.5)

$$\nu' \omega' + P = I. \quad (3.9)$$

Для получения преобразования Дарбу следует конкретизировать свойства аналитичности ядер $\zeta(p; \mathbf{q})$ и $\eta(p; \mathbf{q})$ сплетающих операторов по переменным $\mathbf{q}$. Вследствие (2.14) и (3.6) мы имеем, что $\zeta = \nu' \omega$ и $\eta = \nu \omega'$, поэтому сингулярности этих ядер связаны со свойствами $\nu'(p; \mathbf{q})$ и $\omega'(p; \mathbf{q})$. Мы требуем следующее.

1. Ядра $\nu'(p; \mathbf{q})$ и $\omega'(p; \mathbf{q})$ не должны зависеть от $\mathbf{q}_2$ и должны иметь асимптотическое поведение $\lim_{\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty} \nu'(p; \mathbf{q}_1) = \delta(p)$ и $\lim_{\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty} \omega'(p; \mathbf{q}_1) = \delta(p)$.

2. Ядра $\nu'(p; \mathbf{q}_1)$ и $\omega'(p; \mathbf{q}_1)$ должны иметь (соответственно, правые и левые) простые полюсы по переменной $\mathbf{q}_1$, т.е. должны существовать нетривиальные пределы

$$\nu'_{b_l}(p) = \lim_{\mathbf{q}_1 \rightarrow ib_l} (\mathbf{q}_1 - ib_l) \nu'(p; \mathbf{q}_1), \quad (3.10)$$

$$\omega'_{a_j}(p) = \lim_{\mathbf{q}_1 \rightarrow -p_1 + ia_j} (\mathbf{q}_1 + p_1 - ia_j) \omega'(p; \mathbf{q}_1), \quad (3.11)$$

где $a_1, \dots, a_{N_a}, b_1, \dots, b_{N_b}$ суть $N_a + N_b$ параметров, которые мы выбираем все различными и вещественными, чтобы гарантировать вещественность преобразованного потенциала.

3. Ядра $\zeta(p; \mathbf{q})$ и $\eta(p; \mathbf{q})$ помимо разрывов при $\mathbf{q}_{1\Im} = b_l$ и $\mathbf{q}_{1\Im} = a_j$, наличие которых вытекает из требования 2, не должны иметь иных дефектов аналитичности по $\mathbf{q}_1$.

При этих условиях ядра операторов ζ, η задаются следующими равенствами

$$\zeta(p; \mathbf{q}_1) = \delta(p) + \sum_{l=1}^{N_b} \int dp' \frac{\nu'_{b_l}(p - p') \omega(p'; ib_l - p'_1)}{\mathbf{q}_1 + p'_1 - ib_l}, \quad (3.12)$$

$$\eta(p; \mathbf{q}_1) = \delta(p) + \sum_{j=1}^{N_a} \int dp' \frac{\nu(p - p'; ia_j) \omega'_{a_j}(p')}{\mathbf{q}_1 + p'_1 - ia_j}, \quad (3.13)$$

где использованы обозначения (3.10) и (3.11). Пусть теперь $\chi'(x, \mathbf{k})$ и $\xi'(p; \mathbf{k})$ означают функции, определенные через одевающие операторы ν' и ω' по аналогии с (2.15),

а $\chi'_{b_l}(x)$ и $\xi'_{a_j}(x)$ суть их вычеты (ср. (3.10) и (3.11)). Тогда легко показать, что уравнение (3.3) эквивалентно набору уравнений

$$\chi'_{b_l}(x) = -i \sum_{j=1}^{N_a} \chi(x, ia_j) m_{jl}(x), \quad l = 1, \dots, N_b, \quad (3.14)$$

$$\xi'_{a_j}(x) = i \sum_{l=1}^{N_b} m_{jl}(x) \xi(x, ib_l), \quad j = 1, \dots, N_a, \quad (3.15)$$

где $m(x)$ – $(N_a \times N_b)$ -матрица с элементами

$$m_{jl}(x) = \int_{x_1}^{(a_j - b_l)\infty} dy_1 e^{(a_j - b_l)(x_1 - y_1)} \xi'_{a_j}(y) \chi'_{b_l}(y) \big|_{y_2=x_2}, \quad (3.16)$$

которая хорошо определена для ограниченных χ'_{b_l} и ξ'_{a_j} и для элементов которой имеет место уравнение

$$\partial_{x_1} m_{jl}(x) = (a_j - b_l) m_{jl}(x) - \xi'_{a_j}(x) \chi'_{b_l}(x). \quad (3.17)$$

В дополнение из (3.1) и (3.2) мы получаем для преобразованного потенциала $u'(x)$ следующее равенство:

$$u'(x) = u(x) - 2\partial_{x_1} \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N_b} \xi(x, ib_l) \chi(x, ia_j) m_{jl}(x). \quad (3.18)$$

Тогда в силу (3.12) и (3.13) для определения ζ и η следует конкретизировать ν'_{b_l} и ω'_{a_j} , т.е. $\chi'_{b_l}(x)$ и $\xi'_{a_j}(x)$. Вследствие (3.14) и (3.15) это означает, что нам следует определить матрицу $m(x)$. Подставляя равенства (3.14) и (3.15) в (3.17) и используя (2.16), мы выписываем следующее уравнение для матрицы $\hat{m}(x)$ с элементами $\hat{m}_{jl}(x) = e^{(b_l - a_j)(x_1 + (b_l + a_j)x_2)} m_{jl}(x)$:

$$\partial_{x_1} \hat{m}_{jl}(x) = - \sum_{j'=1}^{N_a} \sum_{l'=1}^{N_b} \hat{m}_{jl'}(x) \Psi(x, ib_{l'}) \Phi(x, ia_{j'}) \hat{m}_{j'l}(x). \quad (3.19)$$

Опуская детали, сразу приведем здесь вид $\hat{m}(x)$ в двух эквивалентных формах

$$\hat{m}(x) = (E_{N_a} + c\mathcal{F}(x))^{-1} c = c(E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c)^{-1}, \quad (3.20)$$

где c – произвольная вещественная постоянная $(N_a \times N_b)$ -матрица, E_{N_a} и E_{N_b} суть единичные $(N_a \times N_a)$ - и $(N_b \times N_b)$ -матрицы соответственно, а $\mathcal{F}(x) - (N_b \times N_a)$ -матрица с элементами $\mathcal{F}_{lj}(x) = \mathcal{F}(x, ib_l, ia_j)$, где

$$\mathcal{F}(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int_{(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}'_3)\infty}^{x_1} dx'_1 \Psi(x', \mathbf{k}) \Phi(x', \mathbf{k}') \big|_{x'_2=x_2}. \quad (3.21)$$

Теперь потенциал (3.18) также может быть записан в двух эквивалентных формах:

$$u'(x) = u(x) - 2\partial_{x_1}^2 \ln \det(E_{N_b} + \mathcal{F}c) = u(x) - 2\partial_{x_1}^2 \ln \det(E_{N_a} + c\mathcal{F}). \quad (3.22)$$

Подставляя найденную выше матрицу m в (3.14), (3.15), а затем полученные равенства в (3.12), (3.13), мы выводим явную форму для одевающих операторов ζ и η . Наконец, из (3.6), используя равенство (2.16) и его аналог для преобразованных (штрихованных) решения Йоста и дуального решения Йоста, мы получаем для них по два эквивалентных представления:

$$\begin{aligned}\Phi'(x, \mathbf{k}) &= \Phi(x, \mathbf{k}) - \Phi(x, ia)(E_{N_a} + c\mathcal{F}(x))^{-1}c\mathcal{F}(x, ib, \mathbf{k}) = \\ &= \Phi(x, \mathbf{k}) - \Phi(x, ia)c(E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c)^{-1}\mathcal{F}(x, ib, \mathbf{k}),\end{aligned}\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\Psi'(x, \mathbf{k}) &= \Psi(x, \mathbf{k}) - \mathcal{F}(x, \mathbf{k}, ia)(E_{N_a} + c\mathcal{F}(x))^{-1}c\Psi(x, ib) = \\ &= \Psi(x, \mathbf{k}) - \mathcal{F}(x, \mathbf{k}, ia)c(E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c)^{-1}\Psi(x, ib),\end{aligned}\quad (3.24)$$

где $j = 1, \dots, N_a$, $l = 1, \dots, N_b$,

$$\begin{aligned}\Phi(x, ia) &= \text{diag}\{\Phi(x, ia_j)\}, & \Psi(x, ib) &= \text{diag}\{\Psi(x, ib_l)\}, \\ \mathcal{F}(x, \mathbf{k}, ia) &= \text{diag}\{\mathcal{F}(x, \mathbf{k}, ia_j)\}, & \mathcal{F}(x, ib, \mathbf{k}) &= \text{diag}\{\mathcal{F}(x, ib_l, \mathbf{k})\}\end{aligned}$$

и где может быть использовано любое из двух представлений в (3.23) и (3.24). Легко видеть, что как $\Phi'(x, \mathbf{k})$, так и $\Psi'(x, \mathbf{k})$ имеют полюсы при $\mathbf{k} = ib_l$ и $\mathbf{k} = ia_j$ соответственно и что благодаря (3.23) и (3.24) вычеты этих функций задаются через их значения в дуальных точках с помощью соотношений

$$\Phi'_{b_l}(x) = -i \sum_{j=1}^{N_a} \Phi'(x, ia_j) c_{jl}, \quad \Psi'_{a_j}(x) = i \sum_{l=1}^{N_b} c_{jl} \Psi'(x, ib_l), \quad (3.25)$$

как и следовало ожидать. Можно показать, что потенциал $u'(x)$ в (3.22) и решения Йоста из (3.23) и (3.24) совпадают с полученными в работе [11], в том числе в рассмотренном здесь случае $N_a \neq N_b$, который получается при обращении в нуль некоторых строк или столбцов в постоянной матрице C , введенной в работе [11]. Мы откладываем рассмотрение условий регулярности потенциала, данного в (3.22), до раздела 5.

4. РЕЗОЛЬВЕНТА

Коль скоро преобразованный оператор L' получен, операторы ζ и η могут быть использованы для анализа его спектральных свойств, а также для исследования вопросов существования и единственности соответствующей резольвенты M' . Умножая первое и второе уравнения в (3.2) справа на η и слева на ζ соответственно и вспоминая определение (3.5) оператора P , получаем сплетающее соотношение

$$L' = \zeta L \eta + L_{\Delta}, \quad (4.1)$$

где мы ввели

$$L_{\Delta} = L'P = PL'. \quad (4.2)$$

Соответственно, мы ищем резольвенту в виде

$$M' = \zeta M \eta + M_{\Delta}, \quad (4.3)$$

где произведение $\zeta M \eta$ определено предыдущим построением. Действительно, в силу (2.12) и (2.14) мы получаем, что

$$\zeta M \eta = \nu' M_0 \omega', \quad (4.4)$$

а тогда мы имеем для ядра этого произведения в x -пространстве следующее билинейное выражение в терминах преобразованных решений Йоста:

$$\begin{aligned} (\zeta M \eta)(x, x'; q) = & -\operatorname{sgn}(x_2 - x'_2) \frac{e^{-q(x-x')}}{2\pi} \int dp_1 \theta((q_2 + p_1^2 - q_1^2)(x_2 - x'_2)) \times \\ & \times \Phi'(x; p_1 + iq_1) \Psi'(x'; p_1 + iq_1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\theta(\cdot)$ – функция-ступенька Хевисайда.

Второй член M_Δ в (4.3) подлежит определению. Используя (3.2), (2.9) и (3.5), мы выводим, что M' в (4.3) является правым (левым) обратным к L' тогда и только тогда, когда M_Δ – решение первого (второго) из операторных уравнений

$$L' M_\Delta = P, \quad M_\Delta L' = P. \quad (4.6)$$

Ниже мы рассмотрим разрешимость этих уравнений в случае чисто солитонных потенциалов. Для завершения обсуждения общего случая отметим, что явная форма оператора P , определенного в (3.5), может быть получена подстановкой в это равенство операторов ζ и η , заданных формулами (3.12) и (3.13). Снова в силу (2.16) мы получаем для хет-ядра этого оператора выражение

$$\widehat{P}(x, x'; q) = i\delta(x_2 - x'_2) \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \theta(q_1 - \alpha_n) \operatorname{res}_{\mathbf{k}=i\alpha_n} \Phi'(x, \mathbf{k}) \Psi'(x', \mathbf{k}). \quad (4.7)$$

Здесь мы ввели набор параметров

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}\} = \{a_1, \dots, a_{N_a}, b_1, \dots, b_{N_b}\}, \quad \mathcal{N} = N_a + N_b, \quad (4.8)$$

чтобы сделать явными свойства симметрии по отношению к использованным ранее параметрам a_j, b_l . Ядро (4.7) отлично от нуля только в интервале значений q_1 между минимальным и максимальным значениями α_m . Действительно, в силу (4.7) это очевидно для значений q_1 , лежащих левее указанного интервала, а для значений q_1 , лежащих справа от этого интервала, это следует из равенства

$$\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \operatorname{res}_{\mathbf{k}=i\alpha_n} \Phi'(x, \mathbf{k}) \Psi'(x', \mathbf{k}) = 0, \quad (4.9)$$

которое, в свою очередь, является следствием соотношений (3.25). Теперь в соответствии с предыдущим обсуждением мы ожидаем, что $\widehat{M}_\Delta$ имеет структуру, подобную $\widehat{P}(x, x'; q)$. Понятно, что ядро

$$\widehat{M}_\Delta(x, x'; q) = \mp i\theta(\pm(x_2 - x'_2)) \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \theta(q_1 - \alpha_n) \operatorname{res}_{\mathbf{k}=i\alpha_n} \Phi'(x, \mathbf{k}) \Psi'(x', \mathbf{k}) \quad (4.10)$$

при любом знаке удовлетворяет уравнениям $\mathcal{L}'_x \widehat{M}_\Delta(x, x'; q) = P(x, x'; q)$ и $\mathcal{L}'_{x'} \widehat{M}_\Delta(x, x'; q) = P(x, x'; q)$. Но легко видеть, что в общем случае ядро $M_\Delta(x, x'; q)$, построенное с учетом (2.2), растет на пространственной бесконечности, а потому не может быть ядром расширенного оператора в смысле определения из раздела 2. Ниже мы детально рассмотрим эту проблему на специальном примере.

5. ЧИСТО СОЛИТОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И РЕШЕНИЯ ЙОСТА

В случае $u(x) \equiv 0$ преобразованный потенциал $u'(x)$ есть общий чисто N -солитонный потенциал, где $N = \max\{N_a, N_b\}$. Этот потенциал и соответствующие решения Йоста можно легко получить из общего представления, найденного в разделе 3. Итак, чисто солитонный потенциал дается любым из равенств в (3.22), где теперь матрица $\mathcal{F}(x)$ имеет элементы

$$\mathcal{F}_{lj}(x) = \frac{e^{(a_j - b_l)(x_1 + (a_j + b_l)x_2)}}{a_j - b_l}. \quad (5.1)$$

Разлагая детерминанты в правой части (3.22) и используя формулу Коши–Бине, получаем, что для регулярности потенциала достаточно, чтобы вещественная матрица с удовлетворяла следующим характеристическим требованиям (эквивалентным тем, что приведены в работе [20]):

$$\Lambda \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix} \geq 0, \quad \Lambda_{lj} = \frac{1}{a_j - b_l}, \quad (5.2)$$

для любых $1 \leq n \leq \min\{N_a, N_b\}$ и всех миноров, т.е. для любого выбора $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leq N_b$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N_a$. Мы использовали здесь стандартное обозначение

$$A \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_{j_1 l_1} & a_{j_1 l_2} & \dots & a_{j_1 l_n} \\ a_{j_2 l_1} & a_{j_2 l_2} & \dots & a_{j_2 l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_n l_1} & a_{j_n l_2} & \dots & a_{j_n l_n} \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

для миноров матрицы $A = \|a_{jl}\|$. Формулы (3.23) и (3.24) после достаточно трудоемких вычислений, которые мы здесь опускаем, могут быть более просто представлены как отношения детерминантов. Как и в (3.22), можно использовать альтернативным, но эквивалентным образом детерминанты матриц размера $(N_a \times N_a)$ или $(N_b \times N_b)$. Мы используем ниже последний выбор, а также симметричное обозначение (4.8). В этих терминах для функций χ' и ξ' , связанных с решениями Йоста посредством равенств (2.16), мы имеем

$$\chi'(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} (b_l + i\mathbf{k})^{-1} \right) \frac{\tau_\chi(x, \mathbf{k})}{\tau(x)}, \quad (5.4)$$

$$\xi'(x', \mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} (b_l + i\mathbf{k}) \right) \frac{\tau_\xi(x', \mathbf{k})}{\tau(x')}, \quad (5.5)$$

где τ -функции суть детерминанты:

$$\begin{aligned}\tau_\chi(x, \mathbf{k}) &= \det(\mathfrak{A}e^{A(x)}(\alpha + i\mathbf{k})\mathcal{D}), \\ \tau_\xi(x', \mathbf{k}) &= \det(\mathfrak{A}e^{A(x')}(\alpha + i\mathbf{k})^{-1}\mathcal{D}), \\ \tau(x) &= \det(\mathfrak{A}e^{A(x)}\mathcal{D}),\end{aligned}\tag{5.6}$$

т.е. детерминанты $(N_b \times N_b)$ -матриц, полученных как произведения квадратных и прямоугольных матриц. А именно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{ln} &= \alpha_n^{N_b-l}, & \alpha + i\mathbf{k} &= \text{diag}\{\alpha_n + i\mathbf{k}\}, \\ e^{A(x)} &= \text{diag}\{e^{A_n(x)}\}, & \mathcal{A}_n(x) &= \alpha_n x_1 + \alpha_n^2 x_2, \\ \mathcal{D} &= \begin{pmatrix} d \\ E_{N_b} \end{pmatrix}, & d_{jl} &= c_{jl} \frac{\prod_{l'=1, l' \neq l}^{N_b} (b_l - b_{l'})}{\prod_{l'=1}^{N_b} (a_j - b_{l'})},\end{aligned}\tag{5.7}$$

где $l = 1, 2, \dots, N_b$, $j = 1, 2, \dots, N_a$, $n = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$. Если рассматривать потенциал, то он может быть записан как $u'(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau(x)$, и, принимая во внимание последнее соотношение в (5.6), мы восстанавливаем выражение, полученное в работах [19], [20], [22] с использованием тау-функций.

6. N -СОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В СЛУЧАЕ $N_b = 1$

Ограничимся специальным случаем N -солитонного потенциала с $N_b = 1$ и произвольным $N_a = N$. В дополнение для простоты, но без потери общности мы выбираем $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$. В этой ситуации потенциал $u'(x)$ имеет на x -плоскости N_a входящих и один исходящий луч, как показано схематично на рисунке. В этом случае τ -функции (5.6) принимают простой вид:

$$\begin{aligned}\tau_\chi(x, \mathbf{k}) &= \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f_m e^{A(x)}(\alpha_m + i\mathbf{k}), & \tau_\xi(x, \mathbf{k}) &= \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \frac{f_m e^{A(x)}}{\alpha_m + i\mathbf{k}}, \\ \tau(x) &= \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f_m e^{A(x)},\end{aligned}\tag{6.1}$$

где коэффициенты f_m получены из элементов d_{m1} матрицы d в (5.7) путем перестановки, учитывающей выбранное упорядочение $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$. Условие (5.2) здесь означает, что все $f_m > 0$.

Мы хотим показать, что, как сказано во введении, расширенный оператор $L'(q)$ с таким потенциалом имеет левый самосопряженный аннигилятор $K(q)$ при значениях q , принадлежащих некоторой области на q -плоскости. А именно, рассмотрим область внутри вписанного в параболу $q_2 = q_1^2$ многоугольника с вершинами в точках с координатами $q_1 = \alpha_m$, $m = 1, \dots, N$, характеристическая функция которого имеет вид

$$\begin{aligned}\kappa(q) &= \sum_{m=1}^{\mathcal{N}-1} [\theta(q_1 - \alpha_{m+1}) - \theta(q_1 - \alpha_m)] \times \\ &\times [\theta(q_2 - (\alpha_m + \alpha_{m+1})q_1 + \alpha_m \alpha_{m+1}) - \theta(q_2 - (\alpha_1 + \alpha_N)q_1 + \alpha_1 \alpha_N)].\end{aligned}\tag{6.2}$$

Рис. 1. Лучи и многоугольник для $\mathcal{N} = 4$.

Заметим, что этот многоугольник можно считать дуальным структуре лучей на x -плоскости (см. рисунок для случая $\mathcal{N} = 4$).

Основное наблюдение, необходимое для получения аннигилятора $K(q)$, состоит в том, что функция

$$\psi(x; q) = \frac{\kappa(q)e^{qx}}{\tau(x)} \quad (6.3)$$

ограничена на x -плоскости. Более точно, как можно доказать с помощью более детального рассмотрения, она экспоненциально убывает для x , стремящегося к бесконечности по любому направлению на плоскости, при q , лежащих внутри многоугольника, а если q принадлежит границе многоугольника, то эта функция имеет направления неубывающего (но ограниченного) поведения.

Вследствие соотношений (2.16), (5.4) и (6.1) функция $1/\tau$ пропорциональна значению дуального решения Йоста $\Psi'(x, \mathbf{k})$ при $\mathbf{k} = ib_1$. Тогда мы имеем

$$\mathcal{L}_{x'}^d \hat{\psi}(x'; q) = 0 \quad (6.4)$$

и, следовательно,

$$KL' = 0 \quad (6.5)$$

для любого оператора K с ядром

$$K(x, x'; q) = \varphi(x; q)\psi(x'; q), \quad (6.6)$$

где $\varphi(x; q)$ – любая самосопряженная функция, ограниченная по x и тождественно равная нулю вне введенного выше многоугольника.

Можно легко проверить, что $KP = K$. Если мы выбираем $\varphi(x; q)$ в виде $\varphi(x; q) = (P\gamma)(x; q)$, где $\gamma(x; q)$ – вещественная функция, ограниченная по x , равная тождественно нулю вне многоугольника и удовлетворяющая равенству

$$\int dx \gamma(x; q)\psi(x, q) = \kappa(q), \quad (6.7)$$

то имеем также

$$P\varphi = \varphi, \quad \int dx \varphi(x; q) \psi(x, q) = \kappa(q). \quad (6.8)$$

Тогда нетрудно показать, что K – самосопряженный проектор, коммутирующий с проектором P , т.е. мы имеем

$$K^* = K, \quad K^2 = K, \quad PK = KP = K. \quad (6.9)$$

Существование этого аннигилятора доказывает, что оператор L' не может иметь правый обратный для значений q , принадлежащих многоугольнику, определенному характеристической функцией (6.2). Для того чтобы доказать, что, напротив, резольвента $M'(q)$ существует для q , лежащих вне многоугольника, обратимся к хет-ядру $\widehat{M}_\Delta(x, x'; q)$, определенному в (4.10), и рассмотрим свойства ограниченности $M_\Delta(x, x'; q) = e^{-q(x-x')} \widehat{M}_\Delta(x, x'; q)$. Используя (2.16), (5.4), (5.5) и (6.1), мы записываем явно эту функцию как

$$M_\Delta(x, x'; q) = \frac{\pm e^{-q(x-x')} \theta(\pm(x_2 - x'_2))}{\tau(x) \tau(x')} \times \\ \times \sum_{m,n=1}^N f_m f_n \theta(q_1 - \alpha_m) (\alpha_m - \alpha_n) e^{\mathcal{A}_m(x) + \mathcal{A}_n(x)}. \quad (6.10)$$

В силу (4.9) эта функция тождественно равна нулю вне полосы $\alpha_1 < q_1 < \alpha_{N+1}$ на q -плоскости. Внутренняя же часть полосы делится многоугольником на части, лежащие сверху и снизу от многоугольника. Тогда, выбирая верхний (нижний) знак для q , лежащих над (под) многоугольником в этой полосе, можно доказать, что ядро $M_\Delta(x, x'; q)$ – ограниченная функция от x, q и что она определяет ядро расширенного оператора $M_\Delta(q)$ в соответствии с определением из раздела 2. Мы заключаем, что для q , не принадлежащих многоугольнику, $M_\Delta(q)$ удовлетворяет уравнениям (4.6), и, следовательно, резольвента $M'(q)$ существует в этой области и дается формулой (4.3).

Заметим, что функция Грина $G(x, x', \mathbf{k})$ оператора $\mathcal{L}'$ может быть определена (см. работы [11], [12]) как значение ядра $M'(x, x'; q)$ при $q_1 = \mathbf{k}_\Im$, $q_2 = \mathbf{k}_\Im^2 - \mathbf{k}_\Re^2$ для комплексного спектрального параметра $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\Re + i\mathbf{k}_\Im$. Эти значения q лежат вне параболы $q_2 = q_1^2$, а потому вне многоугольника и касаются его только в вершинах, так что функция Грина существует для любого значения $\mathbf{k}$, но сингулярна в точках $\mathbf{k} = i\alpha_m$, отвечающих вершинам многоугольника. Это единственные сингулярности функции Грина, поскольку разрывы первого члена в (4.3) при $q_1 = \alpha_m$ (см. (4.5)) скомпенсированы (вне многоугольника) разрывами второго члена, как следует из равенства (4.10).

Наконец, уместно отметить, что случай $N_a = 1$ и произвольного N_b может быть рассмотрен аналогично, при этом вместо левого для $L'(q)$ получается правый аннигилятор для q внутри многоугольника, и в случае $N_a = N_b = 1$ многоугольник сводится к сегменту на линии $q_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)q_1 - \alpha_1\alpha_2$ с конечными точками $q_1 = \alpha_1$ и $q_1 = \alpha_2$. В этом случае восстанавливаются результаты, полученные в работе [11].

Благодарности. Эта работа частично поддержана РФФИ (грант № 08-01-00501, совместные гранты РФФИ–КЭ № 06-01-92057 и NWO–РФФИ № 047.011.2004.059), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1), Программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”, а также INFN и Консорциумом E.I.N.S.T.E.I.N. А. К. Погребков благодарит факультет физики Университета Саленто (Лечче) за теплое гостеприимство.

Список литературы

- [1] В. С. Дрюма, *Письма в ЖЭТФ*, **19**:12 (1974), 753–755.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [3] M. J. Ablowitz, D. Bar Yaacov, A. S. Fokas, *Stud. Appl. Math.*, **69**:2 (1983), 135–143.
- [4] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [5] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov, *Inverse Problems*, **8**:3 (1992), 331–364.
- [6] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 181–210.
- [7] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 4683–4718.
- [8] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *Inverse Problems*, **13**:3 (1997), L7–L10.
- [9] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **116**:1 (1998), 3–53.
- [10] B. Prinari, *Inverse Problems*, **16**:3 (2000), 589–603.
- [11] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 937–957.
- [12] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari, *J. Math. Phys.*, **43**:2 (2002), 1044–1062.
- [13] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **144**:2 (2005), 257–276.
- [14] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, “Спектральная теория нестационарного уравнения Шрёдингера с двумерно возмущенным одномерным потенциалом”, *Нелинейная динамика*, Тр. МИАН, **251**, ред. Е. Ф. Мищенко, 2005, 10–53.
- [15] J. Villarroel, M. J. Ablowitz, *Stud. Appl. Math.*, **109**:3 (2002), 151–162.
- [16] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *J. Phys. A*, **39**:8 (2006), 1877–1898.
- [17] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **47**:12 (2006), 123510.
- [18] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, *Phys. Lett. A*, **63**:3 (1977), 205–206.
- [19] G. Biondini, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **36**:42 (2003), 10519–10536.
- [20] G. Biondini, S. Chakravarty, *J. Math. Phys.*, **47**:3 (2006), 033514.
- [21] G. Biondini, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:6 (2007), 064103.
- [22] S. Chakravarty, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **41**:27 (2008), 275209.