Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Катињо, М. Беккариа, Предел больших спинов
для операторов твиста в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной тео-
рии Янга–Миллса, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 379–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 05:48:17

© 2009 г.

Ф. Катиньо*, М. Беккариа*

ПРЕДЕЛ БОЛЬШИХ СПИНОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТВИСТА В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Представлен метод, позволяющий разложить решение уравнения Бакстера с дальноедействием для твиста 2 и 3 при больших спинах. Также предложены правила сумм для специальных синглетных состояний старших твистов.

Ключевые слова: суперсимметрия, анзац Бете, AdS/CFT-соответствие.

1. ВВЕДЕНИЕ

$\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса – это максимально суперсимметричная теория Янга–Миллса (теория СЯМ) в размерности 4. В последнее десятилетие она привлекает к себе большое внимание исследователей вследствие гипотезы Малдасены [1], предположившего, что $\mathcal{N} = 4$ теория СЯМ дуальна суперструне типа IIB на многообразии $AdS_5 \times S^5$. В частности, аномальные размерности калибровочно-инвариантных составных операторов $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ связаны преобразованием дуальности со струнными уровнями энергии. Из классической интегрируемости струнной теории на пространстве $AdS_5 \times S^5$ можно заключить, что оператор дилатации можно рассматривать как гамильтониан интегрируемой теории в планарном пределе. Эта внутренняя интегрируемость $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ стала понятной после работы Минахана и Зарембо [2], в которой было показано, что в планарном пределе односледовые операторы $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ могут быть интерпретированы в терминах (супер)спиновой цепочки с энергией, совпадающей с аномальной размерностью оператора. Поскольку эти спиновые цепочки интегрируемы, их можно исследовать с применением методов интегрируемых систем и, в частности, с помощью анзаца Бете [3] или операторов Бакстера [4].

Решение уравнения анзаца Бете с дальним порядком для задачи смешивания в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса позволяет эффективно вычислять многопетлевые аномальные размерности разнообразных составных операторов. В случае операторов твиста $sl(2)$ важно получить замкнутые выражения для аномальных размерностей в терминах лоренцева спина. Выдвигались различные

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento, 73100 Lecce, INFN Sezione di Lecce, Italy.
E-mail: beccaria@le.infn.it

гипотезы, хотя аналитические доказательства отсутствуют в порядках выше одной петли.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением так называемого сектора $sl(2)$ $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ, который представляет собой инвариантный подсектор, замкнутый относительно пертурбативного перенормировочного смешивания. Он образован односледовыми операторами

$$\mathcal{O}_{n_1, \dots, n_L} = \text{Tr}(\mathcal{D}^{n_1} \varphi \mathcal{D}^{n_2} \varphi \dots \mathcal{D}^{n_L} \varphi), \quad n_1 + \dots + n_L = N, \quad (1)$$

где φ – одно из трех комплексных скалярных полей $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ, $\mathcal{D}$ – ковариантная производная на световом конусе, $\{n_i\}$ – неотрицательные целые числа, а их сумма N задает полный спин. Число L полей φ называется *твистом оператора* и равно классической размерности минус спин. Структура сектора $sl(2)$ оказывается интересной, в частности, для получения определенного сходства с аналогичными операторами КХД, возникающими в глубоко неупругом рассеянии.

Масштабированные составные операторы суть линейные комбинации операторов $\mathcal{O}_{n_1, \dots, n_L}$ из сектора $sl(2)$, которые оказываются собственными векторами оператора дилатации, собственные значения которых задают аномальные размерности $\gamma(N, L, \lambda)$. Переменная λ – это планарная константа связи 'т Хофта

$$\lambda = \frac{g_{\text{YM}}^2 N_c}{8\pi^2}. \quad (2)$$

При фиксированном L нас интересует пертурбативное разложение

$$\gamma(N, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(N) \lambda^n. \quad (3)$$

Свойство интегрируемости позволяет выписать уравнения анзаца Бете, с помощью которых можно вычислить λ -разложение γ порядок за порядком и которые могут быть решены для любого наперед заданного N . Однако совсем не очевидно, каким образом можно найти параметрическое выражение для $\gamma_n(N)$ в виде замкнутой функции от спина N для всех порядков теории возмущений. Тем не менее такие замкнутые формулы важны для физических приложений, в которых интерес представляют различные предельные случаи и аналитические продолжения по переменной N .

Поэтому необходимо отделить случай операторов твиста 2 и 3 от операторов старших твистов. Для операторов твиста 2 и 3 были предложены гипотетические замкнутые формулы для основного состояния (с минимальной аномальной размерностью) до трехпетлевого приближения включительно. Доказательства этих формул, к сожалению, отсутствуют, по крайней мере за пределом однопетлевого приближения. Для состояний старших твистов не существует простых замкнутых формул, описывающих основное состояние, аномальная размерность которого оказывается тем самым иррациональной.

В настоящей работе описывается метод (Δ -метод), позволяющий получать разложение старших спинов для размерности $\gamma_n(N)$ в случаях твиста 2 и 3 без каких-либо дополнительных предположений непосредственно из уравнения Бакстера с дальним действием. Более того, в случае старших твистов предлагаются довольно простые

правила сумм для аномальных размерностей основного и возбужденных состояний, которые оказываются параметрическими как по переменной N , так и по твисту L .

2. УРАВНЕНИЕ БАКСТЕРА С ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ В СЕКТОРЕ $sl(2)$

Сначала напомним структуру уравнения Бакстера в секторе $sl(2)$. На однопетлевом уровне имеем

$$\left(u + \frac{i}{2}\right)^L Q(u+i) + \left(u - \frac{i}{2}\right)^L Q(u-i) = t_L(u)Q(u), \quad (4)$$

где

$$t_L(u) = 2u^L + q_{2,L}u^{L-2} + \dots + q_{L,L}, \quad q_{2,L} = -\left(N + \frac{L}{2}\right)\left(N + \frac{L}{2} - 1\right) + \frac{L}{4}. \quad (5)$$

Нас интересует полиномиальное решение

$$Q(u) = \prod_{j=1}^N (u - u_j). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем уравнения анзаца Бете

$$\left(\frac{u_k + i/2}{u_k - i/2}\right)^L = \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{u_k - u_j - i}{u_k - u_j + i}. \quad (7)$$

Однопетлевая аномальная размерность при этом оказывается равной

$$\gamma_1 = i(\ln Q(u))' \Big|_{u=-i/2}^{u=i/2}. \quad (8)$$

На уровне старших петель уравнение Бакстера с дальнодействием в секторе $sl(2)$ $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ обсуждалось с точностью до трех петель в работе [5].

Определив

$$x(u) = \frac{u}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{u^2}}\right), \quad (9)$$

$$x_{\pm} = x\left(u \pm \frac{i}{2}\right), \quad (10)$$

для $\sigma = \pm 1$ получаем

$$\Lambda_{\sigma}^{(n)} = \frac{d^n}{du^n} \ln Q(u) \Big|_{u=i\sigma/2}, \quad (11)$$

$$\Delta_{\sigma}(x) = x^3 \exp\left(-\frac{\lambda}{x} \Lambda_{\sigma}^{(1)} - \frac{\lambda^2}{4x^2} (\Lambda_{\sigma}^{(2)} + x\Lambda_{\sigma}^{(3)})\right). \quad (12)$$

Теперь уравнение Бакстера принимает вид

$$\Delta_{+}(x_{+})Q(u+i) + \Delta_{-}(x_{-})Q(u-i) = t_L(u)Q(u), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
t_L(u) &= 2u^L + q_{1,L}u^{L-1} + q_{2,L}u^{L-2} + \dots + q_{L,L}, \\
q_{1,L} &= \lambda q_{1,L}^{(1)} + \lambda^2 q_{1,L}^{(2)}, \\
q_{i,L} &= q_{i,L}^{(0)} + \lambda q_{i,L}^{(1)} + \lambda^2 q_{i,L}^{(2)}, \quad i = 2, \dots, L.
\end{aligned}$$

Уравнение должно быть решено в терминах

$$Q(u) = Q^{(0)}(u) + \lambda Q^{(1)}(u) + \lambda^2 Q^{(2)}(u) \quad (14)$$

и

$$\gamma = \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3 = i \lambda \left[(\ln Q(u))' + \frac{\lambda}{4} (\ln Q(u))''' + \frac{\lambda^2}{48} (\ln Q(u))'''' \right]_{u=-i/2}^{u=+i/2}. \quad (15)$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ СТАРШЕГО СПИНА В СЛУЧАЯХ ТВИСТА 2 И 3

Проверим следующие гипотезы относительно $\gamma_n(N)$. В случае твиста 2 двухпетлевая аномальная размерность имеет вид (при четных N) [6]

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= -4[S_3(N) + S_{-3}(N) - 2S_{-2,1}(N) + 2S_1(N)(S_2(N) + S_{-2}(N))] = \\
&= -S_3\left(\frac{N}{2}\right) + 8S_{-2,1}(N) - 4S_1(N)S_2\left(\frac{N}{2}\right).
\end{aligned} \quad (16)$$

В случае твиста 3 двухпетлевая и трехпетлевая аномальные размерности имеют вид

$$\gamma_2 = -2S_3 - 4S_1S_2, \quad (17)$$

$$\gamma_3 = 5S_5 + 6S_2S_3 - 8S_{3,1,1} + 4S_{4,1} - 4S_{2,3} + S_1(4S_2^2 + 2S_4 + 8S_{3,1}), \quad (18)$$

где все гармонические суммы вычислены в точке $N/2$ [7], [8]. Гармонические суммы задаются стандартными формулами

$$S_a(N) = \sum_{n=1}^N \frac{(\text{sign } a)^n}{n^{|a|}}, \quad S_{a,\mathbf{b}} = \sum_{n=1}^N \frac{(\text{sign } a)^n}{n^{|a|}} S_{\mathbf{b}}(n). \quad (19)$$

В качестве первого шага проверки этих гипотез естественно воспроизвести для $\gamma_n(N)$ разложение старших спинов. Приведем метод, с помощью которого эти разложения можно построить в случаях твиста 2 и 3. Начнем с однопетлевого случая, для которого можно применить процедуру, первоначально предложенную Корчемским в работе [9]. Эта процедура носит название Δ -метода, который весьма эффективен и обычно позволяет получать искомое разложение с помощью вычислений, легко алгоритмизуемых в компьютерных пакетах символьных алгебр.

В двухпетлевом и трехпетлевом случаях Δ -метод не работает, тем не менее и в этих случаях будет предложено довольно надежное улучшенное разложение. Заметим, что в дальнейшем N предполагается четным.

Δ -Метод. Опишем кратко Δ -метод (подробнее см. в работе [10]).

В однопетлевом случае для операторов твиста 2 и 3 соответственно имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad \varepsilon = \frac{2}{N}, \quad (20)$$

для $u = iz$

$$Q(iz) = e^{F(z)}, \quad \Delta(z) = F(z+1) - F(z). \quad (21)$$

В силу (20) и (21) уравнение Бакстера в случае твиста 2 имеет вид

$$\varepsilon^2 \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 e^{\Delta(z)} + \varepsilon^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\Delta(z-1)} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} + 2z^2\right). \quad (22)$$

Подставим асимптотическое разложение

$$\Delta(z) = -2 \ln \varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \varepsilon^n \quad (23)$$

в уравнение Бакстера и сравним коэффициенты при различных целых степенях ε , чтобы получить функции $a_n(z)$. При заданном $\Delta(z)$ перейдем к производной $\ln Q$, что позволит вычислить однопетлевую аномальную размерность. При этом непосредственно получаем выражение, согласованное с гипотезой.

В двухпетлевом случае имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= F^{(0)}(z) + \lambda F^{(1)}(z), \\ \Delta(z) &= \Delta^{(0)}(z) + \lambda \Delta^{(1)}(z), \end{aligned} \quad (24)$$

в трехпетлевом случае

$$\begin{aligned} F(z) &= F^{(0)}(z) + \lambda F^{(1)}(z) + \lambda^2 F^{(2)}(z), \\ \Delta(z) &= \Delta^{(0)}(z) + \lambda \Delta^{(1)}(z) + \lambda^2 \Delta^{(2)}(z), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\Delta^{(0)}(z)$ было только что найдено, и для нового вклада $\Delta^{(1)}(z)$ (то же верно и для $\Delta^{(2)}(z)$) подставляем

$$\Delta^{(1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(z) \ln \varepsilon + b_n(z)) \varepsilon^n \quad (26)$$

в уравнение Бакстера. Прделав затем те же преобразования, что и в однопетлевом случае, получаем следующий результат: для оператора твиста 2

$$\begin{aligned} \gamma_{2,\Delta-} &= \left(\frac{2}{3} \pi^2 \ln \bar{\varepsilon} - 6\zeta_3\right) + \left(-8 \ln \bar{\varepsilon} - \frac{\pi^2}{3}\right) \varepsilon + \\ &+ \left(4 \ln \bar{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{18} + 6\right) \varepsilon^2 + \left(-\frac{4 \ln \bar{\varepsilon}}{3} - \frac{14}{3}\right) \varepsilon^3 + \\ &+ \left(2 - \frac{\pi^2}{180}\right) \varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

и для оператора твиста 3

$$\begin{aligned} \gamma_{2,\Delta-} &= \left(\frac{2}{3} \pi^2 \ln \bar{\varepsilon} - 2\zeta_3\right) + \left(-4 \ln \bar{\varepsilon} - \frac{\pi^2}{3}\right) \varepsilon + \\ &+ \left(2 \ln \bar{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{18} + 3\right) \varepsilon^2 + \left(-\frac{2 \ln \bar{\varepsilon}}{3} - \frac{7}{3}\right) \varepsilon^3 + \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - \frac{\pi^2}{180}\right) \varepsilon^4 + \left(\frac{2 \ln \varepsilon}{15} - \frac{1}{45}\right) \varepsilon^5 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{378}\right) \varepsilon^6 + \dots, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{3,\Delta-} = & \left(-\frac{11}{45} \pi^4 \ln \varepsilon - \zeta_5 + \frac{1}{3} \pi^2 \zeta_3\right) + \left(\frac{4}{3} \pi^2 \ln \varepsilon - 2\zeta_3 + \frac{11\pi^4}{90}\right) \varepsilon + \\ & + \left(-2 \ln^2 \varepsilon - \frac{2}{3} \pi^2 \ln \varepsilon - 4 \ln \varepsilon + \zeta_3 - \frac{11\pi^4}{540} - \frac{5\pi^2}{6}\right) \varepsilon^2 + \dots. \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнивая полученные выражения с гипотетическим разложением, видим, что рас-согласование имеет место для $\gamma_{2,\Delta-}$ в случае твиста 2 и для $\gamma_{3,\Delta-}$ в случае твиста 3. Все несогласующиеся члены не являются ни трансцендентными, ни содержащими логарифмическую составляющую.

Рассогласования результата применения Δ -метода с гипотезой связано с тем, что разложение для $\Delta(z)$ предполагалось верным в уравнении Бакстера как для $\Delta(z)$, так и для $\Delta(1-z)$ в окрестности точки $z = 1/2$. Одновременное существование таких разложений, очевидно, невозможно.

Если рассуждать более строго, то получатся новые члены, содержащие степени ε^{4z} . Эти новые аномальные члены появляются в разложении функции F . Можно видеть, что с учетом этих членов результаты согласуются с гипотезой.

4. СТАРШИЕ ТВИСТЫ

При значениях операторов твиста $L > 3$ состояния старшего веса с нулевым импульсом для $sl(2)$ спиновой цепочки с L узлами разбиваются на два подмножества: синглеты с невырожденной энергией и парные состояния со степенью вырождения 2. Мы исследуем синглетные состояния.

Легко видеть, что все синглеты получаются путем решения уравнения Бакстера при условии, что трансфер-матрица $t_L(u)$ обладает определенной четностью:

$$t_L(u) = (-1)^L t_L(u). \quad (30)$$

При этом условии некоторые квантовые числа в $t_L(u)$ обращаются в нуль. Число синглетных состояний N_{singl} для операторов твиста $L = 2n$ или $L = 2n + 1$ представляет собой функцию от лоренцева спина:

$$N_{\text{singl}} = \binom{N/2 + n - 1}{n - 1}. \quad (31)$$

Теперь можно вычислить сумму аномальных размерностей синглетных состояний

$$\Sigma_L^{(s)}(N) = \sum \gamma_{L,k}^{(s)}(N), \quad (32)$$

где суммирование ведется по всем синглетным состояниям. Легко видеть (см. [11], приложение В), что эта величина рациональна. Если задана последовательность рациональных чисел, описывающих зависимость от N для $\Sigma_L(N)$, то можно попытаться найти замкнутые формулы с помощью некоторых пробных комбинаций гармонических сумм.

Нам удалось применить этот метод вычислений вплоть до $L = 13$ с помощью проверки следующих структурных свойств.

1. Общая формула для Σ_L до трехпетлевого приближения включительно имеет вид

$$\Sigma_L(N) = \sum_{n_1=1}^{N/2} \sum_{n_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{n_p=1}^{n_{p-1}} \sigma_L(n_p), \quad (33)$$

где число сумм равно $p = n - 1$ как для $L = 2n$, так и для $L = 2n + 1$.

2. Внутренняя функция $\sigma_L(n_p)$ может быть записана в виде линейной комбинации гармонических сумм с полной трансцендентностью, равной $2\ell - 1$, где ℓ – порядок петли, $\ell = 1, 2, 3$.

3. Аргумент гармонических сумм равен n_p для нечетных L и $2n_p$ для четных L .

4. Мультииндексы гармонических сумм содержат только положительные индексы при нечетных L .

5. Множество мультииндексов одно и то же для всех четных L в фиксированном порядке петлевого разложения. То же справедливо и для нечетных L , но множество мультииндексов при этом будет другим.

Рассмотрев зависимость от L для коэффициентов гармонических сумм, мы получаем следующие компактные выражения:

а) для нечетных L

$$\begin{aligned} \Sigma_L(N) = & 2(L-1)S_{X,1}g^2 + [(3L-7)S_{X,3} - 2(L-1)S_{X,1,2} - 4(L-2)S_{X,2,1}]g^4 + \\ & + [(20L-79)S_{X,5} - 6(L-1)S_{X,1,4} - 12(2L-7)S_{X,4,1} - \\ & - 2(8L-21)S_{X,2,3} - 2(12L-37)S_{X,3,2} + 4(L-1)S_{X,1,2,2} + \\ & + 8(L-2)S_{X,2,1,2} + 8(2L-5)S_{X,2,2,1} + 8(L-1)S_{X,1,3,1} + \\ & + 24(L-3)S_{X,3,1,1}]g^6 + \cdots, \\ S_{X,a} \equiv & S_{X,a}\left(\frac{N}{2}\right), \quad X = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{(L-3)/2}; \end{aligned} \quad (34)$$

б) для четных L

$$\begin{aligned} \Sigma_L^{(1/2)}(N) = & [2L\tilde{S}_{X,1} + 2(L-2)\tilde{S}_{X,-1}]g^2 + \\ & + [4(3L-8)\tilde{S}_{X,-3} + 12(L-2)\tilde{S}_{X,3} - 8(L-2)\tilde{S}_{X,-2,-1} - \\ & - 8(L-3)\tilde{S}_{X,-2,1} - 4(L-2)\tilde{S}_{X,-1,-2} - 4(L-2)\tilde{S}_{X,-1,2} - \\ & - 4L\tilde{S}_{X,1,-2} - 4L\tilde{S}_{X,1,2} - 8(L-2)\tilde{S}_{X,2,-1} - 8(L-1)\tilde{S}_{X,2,1}]g^4 + \cdots, \\ \tilde{S}_{X,a} \equiv & \tilde{S}_{X,a}\left(\frac{N}{2}\right), \quad X = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{(L-2)/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Важная проверка приведенных выше результатов состоит в том, что, как ожидается, при больших N все основные и возбужденные состояния масштабируются логарифмически с ростом N , а их зависимость от константы связи может быть абсорбирована в так называемую физическую константу связи (см. [12]–[16])

$$g_{\text{ph}}^2 = g^2 - \zeta_2 g^4 + \frac{11\pi^4}{180} g^6 + \cdots. \quad (36)$$

Применяя некоторые полезные формулы для гармонических сумм, получаем одно за другим те же самые асимптотические выражения для аномальных размерностей $\Sigma_L(N)$.

Можно вывести правила сумм для произвольно высокого порядка. Нахождение явных формул – только лишь вопрос мощности вычислительных машин. В работе [11] мы нашли квадратичные и кубические правила сумм.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для физических приложений важно найти замкнутые формулы для аномальных размерностей масштабирующих операторов сектора $sl(2)$. Эта задача становится нетривиальной на уровне выше первой петли, и в настоящее время предложены гипотезы только относительно операторов твиста 2 и 3. Мы нашли разложение старших спинов для аномальных размерностей операторов твиста 2 и 3 непосредственно из уравнения Бакстера, что явилось серьезной проверкой предложенных замкнутых формул. Было бы также весьма полезно показать, что выполняются некоторые асимптотические свойства типа инверсивности Грибова–Липатова [17].

Мы также получили новые замкнутые формулы для операторов старших твистов, но не для самих аномальных размерностей, которые иррациональны в общем случае, а для некоторых сумм аномальных размерностей.

Остается понять являются ли полученные замкнутые выражения для правил сумм случайными, или же они представляют собой проявление некоторого более глубокого свойства, например AdS/CFT-соответствия.

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 231–252.
- [2] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2003), 013.
- [3] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symmetries Quantiques* (Les Houches, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [4] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [5] A. Vogt, S. Moch, M. Vermaseren, *Nucl. Phys. B*, **691**:1–2 (2004), 129–181.
- [6] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 19–61; erratum **685**:1–3 (2004), 405–407; A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 521–529; **632**:5–6 (2006), 754–756.
- [7] M. Beccaria, *JHEP*, **06** (2007), 044.
- [8] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher, V. N. Velizhanin, *J. Stat. Mech.*, **10** (2007), 10003; [arXiv: 0704.3586](#).
- [9] G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **462**:2–3 (1996), 333–388.
- [10] M. Beccaria, F. Catino, *JHEP*, **01** (2008), 067.
- [11] M. Beccaria, F. Catino, *JHEP*, **06** (2008), 103.
- [12] G. P. Korchemsky, G. Marchesini, *Nucl. Phys. B*, **406**:1–2 (1993), 225–258.
- [13] A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **667**:1–2 (2003), 3–54.
- [14] A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **748**:1–2 (2006), 24–59.
- [15] B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **11** (2006), 11014.
- [16] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), 01021.
- [17] M. Beccaria, Yu. L. Dokshitzer, G. Marchesini, *Phys. Lett. B*, **652**:4 (2007), 194–202.