Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ц. Х. Чан, Ю. Т. Чэнь, Решения вещественной бездисперсионной иерархии Веселова–Новикова, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 387–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:45:36

© 2009 г.

Цзень-Ху Чан*, Юй-Тун Чэнь*

РЕШЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИЕРАРХИИ ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА

Исследовано бездисперсионное уравнение Веселова–Новикова в рамках бездисперсионной двухкомпонентной ВКП-иерархии. Рассмотрены симметричные связи для вещественных бВН-систем. Показано, что сохраняющиеся плотности связаны с многочленами Фабера и их можно найти рекуррентно. Многочлены Фабера, кроме того, используются для нахождения решений типа годографа для иерархии бВН.

Ключевые слова: бВН-иерархия, уравнение Хироты, многочлен Фабера, годограф.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Веселова–Новикова было получено в работе [1] как некоторое двумерное интегрируемое обобщение уравнения КдФ и имеет вид

$$u_\tau = (uV)_z + (u\bar{V})_{\bar{z}} + u_{zzz} + u_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \quad V_{\bar{z}} = -3u_z, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, а индексы $z, \bar{z}, \tau$ обозначают частные производные. В работе [2] рассматривалось бездисперсионное уравнение Веселова–Новикова (бВН), получающееся в результате перехода в (1) к квазиклассическому пределу, при котором дисперсионные эффекты исчезают. Это уравнение имеет вид

$$u_\tau = (uV)_z + (u\bar{V})_{\bar{z}}, \quad V_{\bar{z}} = -3u_z. \quad (2)$$

В работах [3], [4] было показано, что бВН-иерархия допускает применение метода квазиклассического $\bar{\partial}$ -одевания. Кроме того, бВН-уравнение и бВН-иерархия возникли в симметричном аспекте и в связи с описанием явлений геометрической оптики [2]–[4]. В работе [2] некоторые симметричные связи для бВН-уравнения предлагалось использовать как эффективный способ построения редукций (см. также [5], [6] по поводу симметричных связей бездисперсионных интегрируемых уравнений). Было также показано, что бВН-уравнение можно редуцировать к $(1+1)$ -мерным системам гидродинамического типа при наложении некоторой симметричной связи.

*Department of Computer Science, National Defense University, Taoyuan, Taiwan.
E-mail: jhchang@ndu.edu.tw

Бездисперсионные уравнения Хироты для двухкомпонентной ВКП-системы впервые были выведены в работе [7] как бездисперсионный предел дифференциального тождества Фейя. Позже уравнения Хироты были заново получены в работе [8] в рамках метода ядерных формул [9]. В работах [3], [7] показано, что уравнение Гамильтона–Якоби, полученное из дополнительного уравнения для этих уравнений Хироты, можно связать с бВН-уравнением, а также с уравнением эйконала в пределе уравнений Максвелла, соответствующем геометрической оптике.

В настоящей работе исследуется бВН-уравнение на основе 2dВКП-иерархии [7] (см. также [8] по поводу расширенной dВКП-иерархии). Уравнения Хироты для 2dВКП дают эффективный способ построения многочленов Фабера [10] и соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби. Для нахождения вещественных решений бВН-иерархии налагаются вещественные симметричные связи.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 описана 2dВКП-иерархия и приводится отождествление иерархии потоков 2dВКП-системы и бВН-иерархии. В разделе 3 из бВН-иерархии с помощью ее уравнений Хироты выведены многочлены Фабера и для них получены рекуррентные формулы. В разделе 4 найдены соответствующие многочлены Фабера при наложении симметричной связи для бВН-иерархии и получены сохраняющиеся плотности. В разделе 5 представлены решения типа годографа для бВН-иерархии, а также приводится решение для функции S . В разделе 6 обсуждается $2N$ -компонентная симметричная связь для бВН-иерархии и выводятся соответствующие сохраняющиеся плотности. Раздел 7 содержит заключительные замечания.

2. ИЕРАРХИЯ бВН

Систему 2dВКП можно охарактеризовать следующими уравнениями Хироты [7], [8]:

$$\frac{p(\lambda) - p(\mu)}{p(\lambda) + p(\mu)} = e^{-D(\lambda)S(\mu)}, \quad (3)$$

$$\frac{\tilde{p}(\lambda) - \tilde{p}(\mu)}{\tilde{p}(\lambda) + \tilde{p}(\mu)} = e^{-\tilde{D}(\lambda)\tilde{S}(\mu)}, \quad (4)$$

$$\frac{p(\lambda) - \tilde{q}(\mu)}{p(\lambda) + \tilde{q}(\mu)} = e^{-D(\lambda)\tilde{S}(\mu)} = e^{D(\lambda)\tilde{D}(\mu)\mathcal{F}}, \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{p}(\mu) - q(\lambda)}{\tilde{p}(\mu) + q(\lambda)} = e^{-\tilde{D}(\mu)S(\lambda)} = e^{\tilde{D}(\mu)D(\lambda)\mathcal{F}}, \quad (6)$$

где производящие функции $S(\lambda)$, $\tilde{S}(\lambda)$ определяются в виде

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1} \lambda^{2n+1} - D(\lambda)\mathcal{F}, \quad \tilde{S}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{t}_{2n+1} \lambda^{2n+1} - \tilde{D}(\lambda)\mathcal{F},$$

где

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\lambda^{-2n-1}}{2n+1} \partial_{t_{2n+1}}, \quad \tilde{D}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\lambda^{-2n-1}}{2n+1} \partial_{\tilde{t}_{2n+1}}$$

– вертексные операторы [6]. При этом $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $\tilde{p}(\lambda)$, $\tilde{q}(\lambda)$ определяются как

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \frac{\partial S(\lambda)}{\partial t_1} = \lambda - D(\lambda) \partial_{t_1} \mathcal{F}, & q(\lambda) &= \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \tilde{t}_1} = -D(\lambda) \partial_{\tilde{t}_1} \mathcal{F}, \\ \tilde{p}(\lambda) &= \frac{\partial \tilde{S}(\lambda)}{\partial \tilde{t}_1} = \lambda - \tilde{D}(\lambda) \partial_{\tilde{t}_1} \mathcal{F}, & \tilde{q}(\lambda) &= \frac{\partial \tilde{S}(\lambda)}{\partial t_1} = -\tilde{D}(\lambda) \partial_{t_1} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Приравнивая уравнения (5) и (6), получаем уравнение $p(\lambda)q(\lambda) = \tilde{p}(\mu)\tilde{q}(\mu)$ [7], из которого при $\lambda, \mu \rightarrow \infty$ имеем

$$-2\mathcal{F}_{t_1, \tilde{t}_1} = -2\mathcal{F}_{\tilde{t}_1, t_1} \equiv u, \quad (7)$$

где $u = u(t_1, t_2, \dots; \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots)$ – скалярная функция. Кроме того, при произвольном λ имеем

$$p(\lambda)q(\lambda) = \tilde{p}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = u. \quad (8)$$

Положим $H_{2n+1} = 2\partial_{t_{2n+1}}\partial_{t_1}\mathcal{F}$, $\hat{H}_{2n+1} = 2\partial_{t_{2n+1}}\partial_{\tilde{t}_1}\mathcal{F}$, $\tilde{H}_{2n+1} = 2\partial_{\tilde{t}_{2n+1}}\partial_{t_1}\mathcal{F}$ и $\tilde{\tilde{H}}_{2n+1} = 2\partial_{\tilde{t}_{2n+1}}\partial_{\tilde{t}_1}\mathcal{F}$, тогда уравнение (7) можно рассматривать как эволюцию u по t_{2n+1} и $\tilde{t}_{2n+1}$, а именно,

$$\frac{\partial u}{\partial t_{2n+1}} = -(H_{2n+1})_{\tilde{t}_1} = -(\hat{H}_{2n+1})_{t_1}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} = -(\tilde{H}_{2n+1})_{t_1} = -(\tilde{\tilde{H}}_{2n+1})_{\tilde{t}_1}. \quad (10)$$

Теперь определим τ_{2n+1} -поток, полагая $\partial_{\tau_{2n+1}} = \partial_{t_{2n+1}} + \partial_{\tilde{t}_{2n+1}}$ и считая $\tilde{t}_{2n+1}$ комплексно сопряженным к t_{2n+1} ; в частности, $t_1 := z$ и $\tilde{t}_1 := \bar{z}$, где $z = x + iy$. В дальнейшем функции $\tilde{H}_{2n+1}$, $\tilde{\tilde{H}}_{2n+1}$ можно считать комплексно сопряженными функциям H , $\hat{H}$: $\tilde{H}_{2n+1} = \bar{H}_{2n+1}$ и $\tilde{\tilde{H}}_{2n+1} = \bar{\tilde{H}}_{2n+1}$. Таким образом, из (9) и (10) при $n \geq 1$, а также $n = 0$ в (9) (или (10)) получаем τ_{2n+1} -поток для u :

$$u_{\tau_{2n+1}} = -(H_{2n+1})_{\bar{z}} - (\bar{H}_{2n+1})_z = -(\hat{H}_{2n+1})_z - (\tilde{\tilde{H}}_{2n+1})_{\bar{z}}, \quad u_z = -(H_1)_{\bar{z}},$$

который мы называем бВН-иерархией. При $n = 1$ соответствующее уравнение редуцируется к бВН-уравнению (2).

3. МНОГОЧЛЕНЫ ФАБЕРА 2dВКП ИЕРАРХИИ

Согласно работе [7] левую часть (3) (или (5)) можно разложить следующим образом:

$$\ln \frac{p(\lambda) - w}{p(\lambda) + w} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Phi_{2n+1}(w)}{2n+1} \lambda^{-2n-1}, \quad (11)$$

где $w = p(\mu)$ в (3) (или $w = \tilde{q}(\mu)$ в (5)), а $\Phi_n(w)$ – n -й многочлен Фабера для $p(\lambda)$, определяемый как

$$\ln \frac{p(\lambda) - w}{\lambda} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(w)}{n} \lambda^{-n}. \quad (12)$$

Выражение (12) аналитично при больших λ и фиксированном $w \in \mathbb{C}$. Равенство (11) получается из (12) с учетом симметричных условий $p(-\lambda) = -p(\lambda)$ и $\Phi_n(-w) = (-1)^n \Phi_n(w)$. Если в (11) заменить w на $p(\mu)$, то уравнение (3) можно редуцировать к следующей системе уравнений Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S(\mu)}{\partial t_{2n+1}} = \Phi_{2n+1}(p(\mu)). \quad (13)$$

Аналогично, при замене w на $\tilde{q}(\mu)$ уравнение (5) редуцируется к уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \tilde{S}(\mu)}{\partial t_{2n+1}} = \Phi_{2n+1}(\tilde{q}(\mu)). \quad (14)$$

Дифференцируя уравнения (13) и (14) по $z, \bar{z}$, получаем временные эволюции $p(\mu)$, $q(\mu)$, $\tilde{p}(\mu)$ и $\tilde{q}(\mu)$ по t_{2n+1} -потoku в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mu)}{\partial t_{2n+1}} &= \partial_z \Phi_{2n+1}(p(\mu)), & \frac{\partial q(\mu)}{\partial t_{2n+1}} &= \partial_{\bar{z}} \Phi_{2n+1}(p(\mu)), \\ \frac{\partial \tilde{p}(\mu)}{\partial t_{2n+1}} &= \partial_{\bar{z}} \Phi_{2n+1}(\tilde{q}(\mu)), & \frac{\partial \tilde{q}(\mu)}{\partial t_{2n+1}} &= \partial_z \Phi_{2n+1}(\tilde{q}(\mu)). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким же образом для уравнений Хироты (4) и (6) можно вывести соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби, выражая многочлены Фабера как

$$\ln \frac{\tilde{p}(\lambda) - w}{\tilde{p}(\lambda) + w} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\tilde{\Phi}_{2n+1}(w)}{2n+1} \lambda^{-2n-1}. \quad (16)$$

Тогда подстановки $w = \tilde{p}(\mu)$ и $w = q(\mu)$ приводят к следующим системам уравнений Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial \tilde{S}(\mu)}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} = \tilde{\Phi}_{2n+1}(\tilde{p}(\mu)), \quad \frac{\partial S(\mu)}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} = \tilde{\Phi}_{2n+1}(q(\mu)).$$

В результате получаем следующие временные эволюции функций $p(\mu)$, $q(\mu)$, $\tilde{p}(\mu)$ и $\tilde{q}(\mu)$ по $\tilde{t}_{2n+1}$ -потoku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}(\mu)}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} &= \partial_{\bar{z}} \tilde{\Phi}_{2n+1}(\tilde{p}(\mu)), & \frac{\partial \tilde{q}(\mu)}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} &= \partial_z \tilde{\Phi}_{2n+1}(\tilde{p}(\mu)), \\ \frac{\partial p(\mu)}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} &= \partial_z \tilde{\Phi}_{2n+1}(q(\mu)), & \frac{\partial q(\mu)}{\partial \tilde{t}_{2n+1}} &= \partial_{\bar{z}} \tilde{\Phi}_{2n+1}(q(\mu)). \end{aligned} \quad (17)$$

Действуя по аналогии с рассуждениями из работы [10], дифференцируем обе части (11) по λ и получаем

$$\frac{wp'(\lambda)}{p^2(\lambda) - w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n+1}(w) \lambda^{-2n-2}.$$

Полагая $p(\lambda) = \lambda - \sum_{n=0}^{\infty} (H_{2n+1}/(2n+1)) \lambda^{-2n-1}$ в этом выражении, имеем

$$w + w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{\lambda^{2n+2}} = \left[\left(\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+1)\lambda^{2n+1}} \right)^2 - w^2 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_{2n+1}}{\lambda^{2n+2}}.$$

Сравнивая коэффициенты при всех степенях λ в обеих частях, находим

$$\Phi_1(w) = w, \quad \Phi_3(w) = w^3 + 3H_1w, \quad (18)$$

а также рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} \Phi_{2n+5}(w) = w^2\Phi_{2n+3}(w) - \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} \frac{H_{2n-2m-2k+1}H_{2k+1}}{(2n-2m-2k+1)(2k+1)} \Phi_{2m+1}(w) + \\ + 2 \sum_{m=0}^{n+1} \frac{H_{2n-2m+3}}{2n-2m+3} \Phi_{2m+1} + wH_{2n+3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

которую можно использовать для нахождения многочленов Φ_n . Несколько первых $\Phi_n(w)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_5(w) &= w^5 + 5H_1w^3 + 5\left(H_1^2 + \frac{H_3}{3}\right)w, \\ \Phi_7(w) &= w^7 + 7H_1w^5 + 7\left(2H_1^2 + \frac{H_3}{3}\right)w^3 + 7\left(H_1^3 + \frac{2}{3}H_1H_3 + \frac{H_5}{5}\right)w. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично, дифференцируя (16) по λ , находим

$$\frac{w\tilde{p}'(\lambda)}{\tilde{p}^2(\lambda) - w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{2n+1}(w)\lambda^{-2n-2}.$$

Полагая здесь $\tilde{p}(\lambda) = \lambda - \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{H}_{2n+1}/(2n+1))\lambda^{-2n-1}$ и сравнивая при степенях λ , находим несколько первых многочленов Фабера:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(w) &= w, \\ \tilde{\Phi}_3(w) &= w^3 + 3\bar{H}_1w, \\ \tilde{\Phi}_5(w) &= w^5 + 5\bar{H}_1w^3 + 5\left(\bar{H}_1^2 + \frac{\bar{H}_3}{3}\right)w, \\ \tilde{\Phi}_7(w) &= w^7 + 7\bar{H}_1w^5 + 7\left(2\bar{H}_1^2 + \frac{\bar{H}_3}{3}\right)w^3 + 7\left(\bar{H}_1^3 + \frac{2}{3}\bar{H}_1\bar{H}_3 + \frac{\bar{H}_5}{5}\right)w, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Phi}_{2n+1}$ подчиняются рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{2n+5}(w) = w^2\tilde{\Phi}_{2n+3}(w) - \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} \frac{\bar{H}_{2n-2m-2k+1}\bar{H}_{2k+1}}{(2n-2m-2k+1)(2k+1)} \tilde{\Phi}_{2m+1}(w) + \\ + 2 \sum_{m=0}^{n+1} \frac{\bar{H}_{2n-2m+3}}{2n-2m+3} \tilde{\Phi}_{2m+1} + w\bar{H}_{2n+3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

4. СИММЕТРИЙНАЯ СВЯЗЬ ДЛЯ ИЕРАРХИИ БВН И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ПЛОТНОСТИ

Один из способов найти сохраняющиеся плотности бВН-иерархии состоит в наложении симметричных связей [2]; тогда явные формулы для этих плотностей можно выразить через соответствующие многочлены Фабера и найти плотности рекуррентно. Основная симметричная связь, рассматриваемая нами, имеет вид

$$u_x = (S^i)_{z\bar{z}}, \quad (20)$$

где $S^i = S(\mu_i)$ вычисляется в некоторой точке μ_i , причем S^i предполагается вещественным числом. В этом разделе мы покажем, что все сохраняющиеся плотности можно вывести с помощью соответствующих многочленов Фабера при этой симметричной редукции. Преобразуем соотношения (20) двумя способами.

Первый способ. Возьмем производные $S(\lambda)$ по z , $\bar{z}$, x и с учетом $-2\mathcal{F}_{z\bar{z}} = u$ получаем

$$\frac{\partial^3 S(\lambda)}{\partial z \partial \bar{z} \partial x} = -D(\lambda)\mathcal{F}_{z\bar{z}x} = \frac{1}{2} D(\lambda)u_x = \frac{1}{2} D(\lambda)S^i_{z\bar{z}}, \quad (21)$$

где $\partial S^i / \partial z = p(\mu_i) = p^i$, $\partial S^i / \partial \bar{z} = q(\mu_i) = q^i = \overline{\partial S^i / \partial z} = \bar{p}^i$ удовлетворяют алгебраическим соотношениям $u = p^i q^i = p^i \bar{p}^i$, при этом u является положительным вещественным числом. Отметим, что в рамках нелинейной геометрической оптики величина $\sqrt{u}$ пропорциональна коэффициенту преломления, а $u = S^i_z S^i_{\bar{z}}$ есть стандартное уравнение эйконала, возникающее в высокочастотном пределе уравнений Максвелла [2]–[4].

Интегрируя (21) по z , $\bar{z}$ и учитывая (3), получаем

$$(p(\lambda))_x = \left(\frac{1}{2} D(\lambda) S^i \right)_z = -\frac{1}{2} \partial_z \left(\ln \frac{p(\lambda) - p^i}{p(\lambda) + p^i} \right), \quad (22)$$

$$(q(\lambda))_x = \left(\frac{1}{2} D(\lambda) S^i \right)_{\bar{z}} = -\frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} \left(\ln \frac{p(\lambda) - p^i}{p(\lambda) + p^i} \right). \quad (23)$$

Используя (11) с заменой w на p^i и разложения для $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$, приведем уравнения (22) и (23) к следующему виду:

$$\partial_x H_{2n+1} = -\partial_z \Phi_{2n+1}(p^i), \quad (24)$$

$$\partial_x \hat{H}_{2n+1} = -\partial_{\bar{z}} \Phi_{2n+1}(p^i), \quad (25)$$

где $H_{2n+1} \equiv 2\partial_z \partial_{t_{2n+1}} \mathcal{F}$ и $\hat{H}_{2n+1} \equiv 2\partial_{\bar{z}} \partial_{t_{2n+1}} \mathcal{F}$. Таким образом, уравнения (24) и (25) приводят к уравнениям Гамильтона–Якоби (15), которые принимают вид

$$\frac{\partial p^i}{\partial t_{2n+1}} = -\frac{\partial H_{2n+1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{p}^i}{\partial t_{2n+1}} = -\frac{\partial \hat{H}_{2n+1}}{\partial x}. \quad (26)$$

В результате функции H_{2n+1} и $\hat{H}_{2n+1}$ оказываются сохраняющимися плотностями, характеризруемыми соответствующими уравнениями Гамильтона–Якоби. Более того, из (24) и (25) следует, что H_{2n+1} и $\hat{H}_{2n+1}$ связаны соотношениями совместности $\partial_{\bar{z}} H_{2n+1} = \partial_z \hat{H}_{2n+1}$.

Второй способ. Аналогичным образом, дифференцирование $\tilde{S}(\lambda)$ по $z, \bar{z}, x$ показывает, что

$$\frac{\partial^3 \tilde{S}(\lambda)}{\partial z \partial \bar{z} \partial x} = -\tilde{D}(\lambda) \mathcal{F}_{z\bar{z}x} = \frac{1}{2} \tilde{D}(\lambda) u_x = \frac{1}{2} \tilde{D}(\lambda) S_{z\bar{z}}^i.$$

Тогда получаем

$$(\tilde{p}(\lambda))_x = \left(\frac{1}{2} \tilde{D}(\lambda) S^i \right)_{\bar{z}} = -\frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} \left(\ln \frac{\tilde{p}(\lambda) - \bar{p}^i}{\tilde{p}(\lambda) + \bar{p}^i} \right), \quad (27)$$

$$(\tilde{q}(\lambda))_x = \left(\frac{1}{2} \tilde{D}(\lambda) S^i \right)_z = -\frac{1}{2} \partial_z \left(\ln \frac{\tilde{p}(\lambda) - \bar{p}^i}{\tilde{p}(\lambda) + \bar{p}^i} \right). \quad (28)$$

Используя (16) с заменой w на $\bar{p}^i$ и разложение для $\tilde{p}(\lambda)$, приведем (27) и (28) к виду

$$\partial_x \bar{H}_{2n+1} = -\partial_{\bar{z}} \tilde{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^i), \quad (29)$$

$$\partial_x \tilde{\bar{H}}_{2n+1} = -\partial_z \tilde{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^i), \quad (30)$$

где $\bar{H}_{2n+1} \equiv 2\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{t}_{2n+1}} \mathcal{F}$, $\tilde{\bar{H}}_{2n+1} \equiv 2\partial_z \partial_{\bar{t}_{2n+1}} \mathcal{F}$. Поэтому уравнения Гамильтона–Якоби (17) можно теперь переписать как законы сохранения:

$$\frac{\partial \bar{p}^i}{\partial \bar{t}_{2n+1}} = -\frac{\partial \bar{H}_{2n+1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p^i}{\partial t_{2n+1}} = -\frac{\partial \tilde{\bar{H}}_{2n+1}}{\partial x}. \quad (31)$$

Кроме того, сохраняющиеся плотности $\bar{H}_{2n+1}$ и $\tilde{\bar{H}}_{2n+1}$ в (29) и (30) удовлетворяют условиям совместности $\partial_z \bar{H}_{2n+1} = \partial_{\bar{z}} \tilde{\bar{H}}_{2n+1}$ и их можно найти из (29) и (30). Заметим, что многочлены Фабера $\tilde{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^i)$ стали комплексно сопряженными к многочленам $\Phi_{2n+1}(p^i)$, т.е. $\tilde{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^i) = \overline{\Phi_{2n+1}(p^i)}$. Поскольку для этих H_n $u = p^i \bar{p}^i$, Φ_{2n+1} понимается как функция переменных $p^i, \bar{p}^i$.

Ниже, при условии симметричной связи (20), мы приведем некоторые примеры, показывающие, как найти сохраняющиеся плотности $H_{2n+1}, \hat{H}_{2n+1}$. Для упрощения вычислений будем использовать многочлены Фабера (18), (19) и тождества

$$p_z^i = p_x^i - u_x, \quad u_z p^i = u p_x^i - u u_x + u_x (p^i)^2. \quad (32)$$

Из уравнения (8) находим соотношение между $\hat{H}_{2n+1}$ и H_{2n+1} . Учитывая, что $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ определяются формулами

$$p(\lambda) = \lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{2n+1} \lambda^{-2n-1}, \quad q(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{H}_{2n+1}}{2n+1} \lambda^{-2n-1},$$

из (8) получаем выражение

$$u = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{H}_{2n+1}}{2n+1} \lambda^{-2n} + \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1} \hat{H}_{2m+1}}{(2n+1)(2m+1)} \lambda^{-2n-2m-2}.$$

Приравнивая коэффициенты при всех степенях λ в обеих частях, получаем $\hat{H}_1 = -u$ и рекуррентное соотношение

$$\hat{H}_{2n+3} = (2n+3) \sum_{k=0}^n \frac{H_{2n-2k+1} \hat{H}_{2k+1}}{(2n-2k+1)(2k+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Для $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$\hat{H}_3 = -3uH_1, \quad \hat{H}_5 = -\frac{5}{3}u(3H_1^2 + H_3), \quad \hat{H}_7 = -\frac{7}{3}u\left(3H_1^3 + 2H_1H_3 + \frac{3}{5}H_5\right).$$

Приведем примеры построения сохраняющихся плотностей.

ПРИМЕР 1. В силу (24) и (32) при $n = 0$ имеем $H_{1x} = -\Phi_{1z} = -p_z^i = (u - p^i)_x$. Интегрирование обеих частей по x приводит к равенству

$$H_1 = u - p^i. \quad (34)$$

ПРИМЕР 2. В силу (24) при $n = 1$

$$\begin{aligned} H_{3x} &= -\Phi_{3z} = -((p^i)^3 + 3(u - p^i)p^i)_z = \\ &= (3(u - p^i)^2 - (p^i)^3)_x = (3H_1^2 - (p^i)^3)_x, \end{aligned}$$

где мы воспользовались уравнениями (18) и (32). Отсюда получаем

$$H_3 = 3H_1^2 - (p^i)^3. \quad (35)$$

ПРИМЕР 3. При $n = 2$ из уравнения (24), применяя (19), (34), (35) и тождества (32), находим

$$\begin{aligned} H_{5x} &= -\Phi_{5z} = -\left((p^i)^5 + 5(u - p^i)(p^i)^3 + 5\left(2(u - p^i)^2 - \frac{1}{3}(p^i)^3\right)p^i\right)_z = \\ &= \left(10(u - p^i)^3 - \frac{20}{3}(u - p^i)(p^i)^3 - (p^i)^5\right)_x = \left(-10H_1^3 + \frac{20}{3}H_1H_3 - (p^i)^5\right)_x, \end{aligned}$$

где мы использовали подстановку для $(p^i)^3$ из (35). Отсюда

$$H_5 = -10H_1^3 + 20H_1 \frac{H_3}{3} - (p^i)^5.$$

ПРИМЕР 4. Аналогичные вычисления показывают, что

$$H_7 = 7\left(5H_1^4 - 5H_1^2H_3 + \frac{6}{5}H_1H_5 + \frac{1}{3}H_3^2 - \frac{(p^i)^7}{7}\right). \quad (36)$$

5. РЕШЕНИЯ ГОДОГРАФА ДЛЯ 6ВН-ИЕРАРХИИ

Выразив многочлены Фабера через p^i , $\bar{p}^i$ для 6ВН-иерархии, которая лежит в основе налагаемых симметричных связей (20), найдем решения годографа для $p^i(z, \bar{z}, \tau_{2n+1})$ и $\bar{p}^i(z, \bar{z}, \tau_{2n+1})$.

Из (24)–(26) и (29)–(31) следует, что t_{2n+1} -потоки и $\bar{t}_{2n+1}$ -потоки функций p^i , $\bar{p}^i$ можно записать соответственно как

$$\begin{aligned} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_{t_{2n+1}} &= \partial_{p^i} \Phi_{2n+1} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_z + \partial_{\bar{p}^i} \Phi_{2n+1} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_{\bar{z}}, \\ \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_{\bar{t}_{2n+1}} &= \partial_{p^i} \overline{\Phi_{2n+1}} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_z + \partial_{\bar{p}^i} \overline{\Phi_{2n+1}} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

где мы использовали равенство $p^i_z = \bar{p}^i_z$. Поэтому τ_{2n+1} -поток бВН-иерархии задается в виде

$$\left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_{\tau_{2n+1}} = \partial_{p^i} M_{2n+1} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_z + \partial_{\bar{p}^i} M_{2n+1} \left(\frac{p^i}{\bar{p}^i} \right)_{\bar{z}}, \quad n \geq 1, \quad (37)$$

где $M_{2n+1} \equiv \Phi_{2n+1} + \overline{\Phi_{2n+1}}$. Заметим, что из первого уравнения иерархии при $n = 0$ вытекает, что p^i и $\bar{p}^i$ зависят от τ_1 и x только через линейную комбинацию $\tau_1 + x$. Уравнение (37) имеет следующий неявный вид уравнения годографа:

$$z + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n+1}(p^i, \bar{p}^i) \tau_{2n+1} = F, \quad \bar{z} + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n+1}(p^i, \bar{p}^i) \tau_{2n+1} = G, \quad (38)$$

где функции $F = F(p^i, \bar{p}^i)$, $G = G(p^i, \bar{p}^i)$ – начальные условия при $\tau_{2n+1} = 0$, $f_{2n+1} = \partial_{p^i} M_{2n+1}$, $g_{2n+1} = \partial_{\bar{p}^i} M_{2n+1}$. Можно показать, что в силу коммутативности τ_{2n+1} -потоков функций p^i , $\bar{p}^i$ функции G и F удовлетворяют уравнениям

$$F_{\bar{p}^i} = G_{p^i}, \quad p^i F_{p^i} = -\bar{p}^i G_{\bar{p}^i} - (1 - p^i - \bar{p}^i) G_{p^i}.$$

Из первого уравнения следует существование такой функции $\varphi(p^i, \bar{p}^i)$, что $F = \partial_{p^i} \varphi$, $G = \partial_{\bar{p}^i} \varphi$. Подставляя F и G во второе уравнение, получаем определяющее уравнение для φ :

$$p^i \varphi_{p^i p^i} + \bar{p}^i \varphi_{\bar{p}^i \bar{p}^i} + (1 - p^i - \bar{p}^i) \varphi_{p^i \bar{p}^i} = 0. \quad (39)$$

Пусть $p^i = (\rho_1 - i\rho_2)/2$, $\bar{p}^i = (\rho_1 + i\rho_2)/2$. Тогда $\partial/\partial p^i = \partial/\partial \rho_1 - i\partial/\partial \rho_2$ и $\partial/\partial \bar{p}^i = \partial/\partial \rho_1 + i\partial/\partial \rho_2$. При этом определяющее уравнение (39) принимает вид

$$\varphi_{\rho_1 \rho_1} + 2\rho_2 \varphi_{\rho_1 \rho_2} + (1 - 2\rho_1) \varphi_{\rho_2 \rho_2} = 0. \quad (40)$$

В силу (38) имеем $F = \sum_{n \geq 0} \mu_n f_{2n+1}$ и $G = \sum_{n \geq 0} \xi_n g_{2n+1}$, где $\mu_n = \xi_n$. Тогда для φ имеется разложение полиномиального типа по ρ_1 , ρ_2 ,

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n M_{2n+1}(\rho_1, \rho_2), \quad (41)$$

которое удовлетворяет (40). Например, в некоторых случаях имеем:

- 1) $\varphi = M_1 = \rho_1$;
- 2) $\varphi = M_3 = \rho_1^3 - 3\rho_1^2 + \frac{3}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2)$;
- 3) $\varphi = M_5 = \rho_1^5 - \frac{20}{3}\rho_1^4 + 10\rho_1^3 + \frac{5}{3}\rho_1^2(\rho_1^2 + \rho_2^2) - \frac{15}{2}\rho_1(\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{5}{3}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2$;
- 4) $\varphi = M_7 = \rho_1^7 - \frac{259}{30}\rho_1^6 + \frac{35}{2}\rho_1^5 + \frac{21}{10}\rho_1^4\rho_2^2 + \frac{7}{5}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2\rho_1^2 - \frac{35}{2}\rho_1^3\rho_2^2 + 35\rho_1^2\rho_2^2 - \frac{35}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2\rho_1 - \frac{35}{8}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 + \frac{28}{15}(\rho_1^2 + \rho_2^2)^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно найти также несколько простых решений некоторых ДУЧП из (40) следующими способами:

- а) $\varphi_{\rho_1\rho_1} = 0$, $2\rho_2\varphi_{\rho_1\rho_2} + (1 - 2\rho_1)\varphi_{\rho_2\rho_2} = 0$; б) $\varphi_{\rho_1\rho_2} = 0$, $\varphi_{\rho_1\rho_1} + (1 - 2\rho_1)\varphi_{\rho_2\rho_2} = 0$;
- в) $\varphi_{\rho_2\rho_2} = 0$, $\varphi_{\rho_1\rho_1} + 2\rho_2\varphi_{\rho_1\rho_2} = 0$.

Можно показать, что в случаях “а” и “б” имеются решения полиномиального типа, как в (41), но для случая “в” это не так. В случае “в” имеются решения вида $\varphi = c_0 + c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_2e^{-2\rho_1}$.

ПРИМЕР 5. Чтобы найти $(2+1)$ -мерные решения, зависящие от z , $\bar{z}$, τ и удовлетворяющие (37), используем равенство $\Phi_3 = (p^i)^3 + 3H_1p^i$, $H_1 = p^i\bar{p}^i - p^i$, и разложим уравнение годографа (38) до $\tau_3 = \tau$:

$$\begin{aligned} F(p^i, \bar{p}^i) &= z + f_3\tau = z + (3(p^i + \bar{p}^i)^2 - 6p^i)\tau, \\ G(p^i, \bar{p}^i) &= \bar{z} + g_3\tau = \bar{z} + (3(p^i + \bar{p}^i)^2 - 6\bar{p}^i)\tau. \end{aligned}$$

При $F = 1$, $G = 1$ легко решить приведенные выше уравнения как

$$p^i = \frac{1}{12\tau} (3\tau + (z - \bar{z}) \pm \sqrt{9\tau^2 - 6\tau(z + \bar{z} - 2)}).$$

Тогда u принимает вид

$$u = p^i\bar{p}^i = \frac{1}{144\tau^2} (18\tau^2 - 6\tau(z + \bar{z} - 2) - (z - \bar{z})^2 \pm 6\tau\sqrt{9\tau^2 - 6\tau(z + \bar{z} - 2)}).$$

Можно проверить, что приведенное решение удовлетворяет бВН-уравнению (2) при $\tau = \tau_3$, $V = 3H_1$.

Если выбрать $F = f_3$, $G = g_3$, получаем

$$p^i = \frac{1}{12(\tau - 1)} (3(\tau - 1) + (z - \bar{z}) \pm \sqrt{9(\tau - 1)^2 - 6(\tau - 1)(z + \bar{z})}),$$

поэтому

$$u = \frac{18(\tau - 1)^2 - 6(\tau - 1)(z + \bar{z}) - (z - \bar{z})^2 \pm 6(\tau - 1)\sqrt{9(\tau - 1)^2 - 6(\tau - 1)(z + \bar{z})}}{144(\tau - 1)^2}.$$

Аналогично можно найти и другие новые решения, но основная трудность, с которой приходится сталкиваться, состоит в решении алгебраических уравнений высоких порядков. При этом функция S^i имеет вид

$$\begin{aligned} S^i(z, \bar{z}, \tau) &= \\ &= \frac{3(\tau - 1)(z - \bar{z})^2 + 18(\tau - 1)^2(z + \bar{z} + 4C) - 2\sqrt{3}(3(\tau - 1)^2 - 2(\tau - 1)(z + \bar{z}))^{3/2}}{72(\tau - 1)^2}, \end{aligned}$$

где C – произвольная постоянная.

6. 2N-КОМПОНЕНТНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе мы приведем $2N$ -компонентную редукцию бВН-иерархии при более общей симметричной связи, а также построим соответствующее уравнение годографа. Рассмотрим симметричную связь вида $u_x = \sum_{i=1}^N \epsilon_i S_{z\bar{z}}^i$ [2]. Предположим, что $u = p^i \bar{p}^i$ для всех $i = 1, \dots, N$ и $\sum_{i=1}^N \epsilon_i = 1$. В результате вычислений, аналогичных вычислениям в разделе 4, получаем следующие соотношения между сохраняющимися плотностями и соответствующими многочленами Фабера:

$$(H_{2n+1})_x = - \sum_{i=1}^N \epsilon_i \partial_z \Phi_{2n+1}(p^i), \quad (\hat{H}_{2n+1})_x = - \sum_{i=1}^N \epsilon_i \partial_{\bar{z}} \Phi_{2n+1}(\bar{p}^i),$$

где многочлены Фабера $\Phi_{2n+1}(p^i)$ определяются, как и выше, а сохраняющиеся плотности имеют различные виды и их также можно найти рекуррентно. Некоторые из H_{2n+1} для редуцированной системы имеют вид

$$H_1 = u - \sum_{i=1}^N \epsilon_i p^i, \quad H_3 = 3H_1^2 - \sum_{i=1}^N \epsilon_i (p^i)^3, \quad H_5 = -10H_1^3 + \frac{20}{3}H_1H_3 - \sum_{i=1}^N \epsilon_i (p^i)^5.$$

Выражения для $\hat{H}_{2n+1}$ в терминах найденных H_n аналогичны выражениям (33). При наличии симметричной связи уравнения Гамильтона–Якоби можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^k}{\partial t_{2n+1}} &= \partial_z \Phi_{2n+1}(p^k), & \frac{\partial \bar{p}^k}{\partial t_{2n+1}} &= \partial_{\bar{z}} \Phi_{2n+1}(\bar{p}^k), \\ \frac{\partial p^k}{\partial \bar{t}_{2n+1}} &= \partial_z \bar{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^k), & \frac{\partial \bar{p}^k}{\partial \bar{t}_{2n+1}} &= \partial_{\bar{z}} \bar{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^k), \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, N$. Учитывая выписанные выше эволюционные уравнения по τ_{2n+1} -токам бВН-иерархии и замечая, что $p_{\bar{z}}^i = \bar{p}_z^i$ при $i = 1, \dots, N$, получаем уравнение годографа для $2N$ -компонентной системы

$$\begin{pmatrix} p^k \\ \bar{p}^k \end{pmatrix}_{\tau_{2n+1}} = \sum_{i=1}^N f_{2n+1}^i \begin{pmatrix} p^i \\ \bar{p}^i \end{pmatrix}_z + \sum_{i=1}^N g_{2n+1}^i \begin{pmatrix} p^i \\ \bar{p}^i \end{pmatrix}_{\bar{z}}, \quad (42)$$

где $n \geq 1$, $k = 1, \dots, N$ и $f_{2n+1}^i(p^k, \bar{p}^k) = \partial_{p^i}(\Phi_{2n+1}(p^k) + \bar{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^k))$, $g_{2n+1}^i(p^k, \bar{p}^k) = \partial_{\bar{p}^i}(\Phi_{2n+1}(p^k) + \bar{\Phi}_{2n+1}(\bar{p}^k))$. Например, в случае $N = 2$ имеем

$$\begin{pmatrix} p^1 \\ \bar{p}^1 \\ p^2 \\ \bar{p}^2 \end{pmatrix}_{\tau_{2n+1}} = \begin{pmatrix} f^1(p^1, \bar{p}^1)I + g^1(p^1, \bar{p}^1)\mathbb{A}^1 & f^2(p^1, \bar{p}^1)I + g^2(p^1, \bar{p}^1)\mathbb{A}^2 \\ f^1(p^2, \bar{p}^2)I + g^1(p^2, \bar{p}^2)\mathbb{A}^1 & f^2(p^2, \bar{p}^2)I + g^2(p^2, \bar{p}^2)\mathbb{A}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^1 \\ \bar{p}^1 \\ p^2 \\ \bar{p}^2 \end{pmatrix}_z,$$

где I – единичная (2×2) -матрица и

$$\mathbb{A}^i \equiv \mathbb{A}(p^i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{p}^i}{p^i} & \frac{1-p^i-\bar{p}^i}{p^i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовалась бВН-иерархия в рамках 2dВКП-системы. Показано, как вывести соответствующие многочлены Фабера и рекуррентные соотношения для них через уравнения Хироты для 2dВКП-иерархии. При наличии симметричной связи (20) найдены сохраняющиеся плотности с помощью этих многочленов Фабера. Кроме того, получена система уравнений годографа для бВН-иерархии и решения годографа для бВН-уравнения.

Для более общей симметричной связи мы построили $2N$ -компонентную редуцированную систему с помощью обобщенных многочленов Фабера и записали соответствующее уравнение годографа. Однако основная сложность состоит в нахождении явных решений $2N$ -редуцированной системы (42). Мы надеемся вернуться к этой задаче в дальнейшем.

Благодарности. Цзень-Ху Чан благодарен Б.Г. Конопельченко и А. Моро за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана National Science Council of Taiwan (гранты № NSC 96-2115-M-606-001-MY2 (Цзень-Ху Чан) и NSC 96-2811-M-606-001 (Юй-Тун Чэнь)).

Список литературы

- [1] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24.
- [2] Л. В. Богданов, Б. Г. Конопельченко, А. Моро, *Фундамент. и прикл. матем.*, **10**:1 (2004), 5–15.
- [3] B. G. Konopelchenko, A. Moro, *Stud. Appl. Math.*, **113**:4 (2004), 325–352.
- [4] Б. Г. Конопельченко, А. Моро, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 102–109.
- [5] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *Phys. Lett. A*, **330**:6 (2004), 448–459.
- [6] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, Suppl. 1 (2005), 64–73.
- [7] K. Takasaki, *SIGMA*, **2** (2006), 057.
- [8] Y.-T. Chen, M.-H. Tu, *J. Math. Phys.*, **47**:10 (2006), 102702.
- [9] R. Carroll, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **28**:22 (1995), 6373–6387.
- [10] L.-P. Teo, *Lett. Math. Phys.*, **64**:1 (2003), 75–92.