Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Конт, А. М. Грюндланд, Б. Юард, Решения уравнений изэнтропийного течения жидкости в виде римановых инвариантов, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 399–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:54:36

© 2009 г.

Р. Конт*, А. М. Грюндланд†, Б. Юард‡

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИЗЭНТРОПИЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВИДЕ РИМАНОВЫХ ИНВАРИАНТОВ

Новый вариант метода условной симметрии использован для получения решений ранга k , выражающихся через римановы инварианты изэнтропийного потока сжимаемой идеальной жидкости в размерности $3 + 1$. Подробно описана процедура построения ограниченных решений в терминах эллиптической $\wp$ -функции Вейерштрасса.

Ключевые слова: риманов инвариант, метод условной симметрии, решение ранга k , система гидродинамического типа.

1. МЕТОД УСЛОВНОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ ИЗОЭНТРОПИЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В данном разделе мы дадим краткое описание процедуры, подробно изложенной в работе [1], для построения решения ранга k в терминах римановых инвариантов сжимаемой идеальной жидкости в размерности $3 + 1$,

$$u_t^\alpha + \sum_{\beta=1}^4 \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_\beta^{i\alpha}(u) u_i^\beta = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где $\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3$ – вещественнозначные (4×4) -матричные функции вида

$$\mathcal{A}^i = \begin{pmatrix} u^i & \delta_{i1}\kappa^{-1}a & \delta_{i2}\kappa^{-1}a & \delta_{i3}\kappa^{-1}a \\ \delta_{i1}\kappa a & u^i & 0 & 0 \\ \delta_{i2}\kappa a & 0 & u^i & 0 \\ \delta_{i3}\kappa a & 0 & 0 & u^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

*LRC MESO, École normale supérieure de Cachan (CMLA) et CEA-DAM, 61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex; Service de physique de l'état condensé (URA 2464), CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France. E-mail: robert.conte@cea.fr

†Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-ville, Montréal (QC) H3C 3J7; Université du Québec, Trois-Rivières CP500 (QC) G9A 5H7, Canada. E-mail: grundlan@crm.umontreal.ca

‡Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-ville, Montréal, (QC) H3C 3J7, Canada. E-mail: huard@dms.umontreal.ca

Здесь a – скорость звука в среде, а $\vec{u}$ – векторное поле скоростей потока. Независимые и зависимые переменные обозначаются соответственно как $x = (t, x^1, x^2, x^3) \in X \subset \mathbb{R}^4$ и $u = (a, \vec{u}) \in U \subset \mathbb{R}^4$, а u_i обозначает частные производные первого порядка функции u , т.е. $u_i^\alpha \equiv \partial u^\alpha / \partial x^i$. Кроме того, везде будет предполагаться суммирование по повторяющимся нижним и верхним индексам, за исключением случаев, когда один из индексов заключен в скобки. Цель данной работы – получить решения системы (1) ранга k , выражающиеся через римановы инварианты. Для этого мы ищем решения $u(x)$ задачи (1), неявно определяемые следующим набором соотношений между переменными u^α , r^A и x^i :

$$u = f(r^1(x, u), \dots, r^k(x, u)), \quad r^A(x, u) = \lambda_i^A(u) x^i, \quad \ker(\lambda_0^A \mathcal{I}_4 + \mathcal{A}^i(u) \lambda_i^A) \neq 0, \quad (2)$$

с некоторыми функциями $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^4$ и $A = 1, \dots, k \leq 3$. Такое решение называется решением ранга k , если $\text{rank}(u_i^\alpha) = k$. Функции $r^A(x, u)$ называются римановыми инвариантами, связанными с волновыми векторами $\lambda^A = (\lambda_0^A, \vec{\lambda}^A) \in \mathbb{R}^4$ системы (1). Здесь $\vec{\lambda}^A = (\lambda_1^A, \lambda_2^A, \lambda_3^A)$ определяет направление распространения волны, а собственное значение λ_0^A является фазовой скоростью рассматриваемой волны. Два типа допустимых волновых векторов для изоэнтропийных уравнений (1) получаются из решения дисперсионного соотношения

$$\det(\lambda_0(u) \mathcal{I}_4 + \lambda_i(u) \mathcal{A}^i(u)) = [(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda})^2 - a^2 \vec{\lambda}^2](\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda})^2 = 0. \quad (3)$$

Они называются энтропийным (E) и акустическим (S) волновыми векторами и определяются как

$$\lambda^E = (\epsilon a + \vec{u} \cdot \vec{e}, -\vec{e}), \quad \epsilon = \pm 1, \quad (4a)$$

$$\lambda^S = (\det(\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}), -\vec{e} \times \vec{m}), \quad |\vec{e}|^2 = 1, \quad (4b)$$

где $\vec{e}$ и $\vec{m}$ – единичный и произвольный векторы соответственно.

Конструкция решения ранга k с помощью метода условной симметрии достигается путем рассмотрения переопределенной системы, состоящей из исходной системы (1) на p независимых переменных и набора совместных дифференциальных связей первого порядка

$$\xi_a^i(u) u_i^\alpha = 0, \quad \lambda_i^A \xi_a^i = 0, \quad a = 1, \dots, p - k, \quad (5)$$

для которых критерий симметрии выполнен автоматически. В такой ситуации верен следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Невырожденная квазилинейная гиперболическая система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУПЧ) первого порядка (1) на p независимых и q зависимых переменных допускает $(p - k)$ -мерную алгебру L условных симметрий тогда и только тогда, когда существует набор из $p - k$ линейно независимых векторных полей*

$$X_a = \xi_a^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a = 1, \dots, p - k, \quad \ker(\mathcal{A}^i(u) \lambda_i^A) \neq 0, \quad \lambda_i^A \xi_a^i = 0, \quad A = 1, \dots, k,$$

которые в некоторой окрестности точки $(x_0, u_0) \in X \times U$ удовлетворяют условиям

$$\text{tr} \left(\mathcal{A}^\mu \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad (6a)$$

$$\operatorname{tr} \left(A^\mu \frac{\partial f}{\partial r} \left(\eta_{a_1} \frac{\partial f}{\partial r} \cdots \eta_{a_s} \right) \frac{\partial f}{\partial r} \lambda \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (66)$$

где

$$\lambda = (\lambda_i^A) \in \mathbb{R}^{k \times p}, \quad r = (r^1, \dots, r^k) \in \mathbb{R}^k, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial r^A} \right) \in \mathbb{R}^{q \times k},$$

$$\eta_{a_s} = \left(\frac{\partial \lambda_{a_s}^A}{\partial u^\alpha} \right) \in \mathbb{R}^{k \times q}, \quad s = 1, \dots, k-1,$$

$\mathcal{I}_q$ – единичная $(q \times q)$ -матрица, а $(a_1, \dots, a_s)$ обозначает симметризацию по всем индексам в скобках. Решения системы, инвариантные относительно алгебры Ли L , – это в точности решения ранга k вида (2).

Доказательство этого предложения подробно изложено в работе [1]. Заметим, что эти симметрии не являются симметриями исходной системы, но их можно использовать для построения решений переопределенной системы, составленной из (1) и (5).

Вообще говоря, переопределенная система, составленная из (6a) и (6б), является нелинейной, и ее не всегда можно решить в замкнутом виде. Тем не менее частные решения ранга k для многих физически интересных систем ДУЧП вполне заслуживают рассмотрения. Эти частные решения задачи (6a) и (6б) можно получить, предполагая, что функция f имеет вид рациональной функции, что также можно интерпретировать как усеченный ряд Лорана по переменным r^A . Этот метод пригоден только для уравнений, обладающих свойством Пенлеве [2]. Таким образом, эти уравнения весьма часто интегрируются в известных функциях.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА k С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ СКОРОСТЬЮ ЗВУКА

Рассмотрим изоэнтропийное течение идеальной и сжимаемой жидкости в случае, когда скорость звука зависит только от времени t . В размерности $k+1$ система (1) принимает вид

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = 0, \quad a_t + \kappa^{-1} a \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad a_{x^j} = 0, \quad a > 0, \quad \kappa = 2(\gamma - 1)^{-1}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (7)$$

В работе [1] показано, что наш подход позволяет построить общее решение системы (7) ранга k . Замена координат на пространстве $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{k+1}$ вида

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x}^1 = x^1 - u^1 t, \quad \dots, \quad \bar{x}^k = x^k - u^k t, \quad \bar{a} = a, \quad \bar{u} = u \in \mathbb{R}^k,$$

преобразует (7) в систему

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \ln \bar{a} + \kappa^{-1} \operatorname{tr}((\mathcal{I}_k + \bar{t} D \bar{u}(\bar{x}))^{-1} D \bar{u}(\bar{x})) = 0, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

где $D \bar{u}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ – матрица якобиана, а $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k) \in \mathbb{R}^k$.

Легко показать, что в терминах исходных координат $(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ общее решение ранга k системы (7) принимает вид

$$u = f(x^1 - u^1 t, \dots, x^k - u^k t), \quad a(t) = A_1 (1 + p_1 t + \dots + p_k t^k)^{-1/\kappa},$$

где требуется, чтобы коэффициенты p_n , $n = 1, \dots, k$, характеристического многочлена

$$Df(\bar{x})^k - \sum_{n=1}^k p_n(Df(\bar{x}))(Df(\bar{x}))^{k-n} = 0$$

для матрицы якобиана $Df(\bar{x})$ были постоянными.

В частном случае $k = 2$ общее решение ранга 2 системы (7), инвариантное относительно векторного поля

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

неявно определяется из уравнений

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= C_1(x - ut) + \frac{\partial h}{\partial r^2}(x - ut, y - vt), \\ v(t, x, y) &= C_1(y - vt) - \frac{\partial h}{\partial r^1}(x - ut, y - vt), \\ a(t) &= A_1(1 + 2C_1t + B_1t^2)^{-1/\kappa}, \quad A_1 \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Здесь функция h зависит от двух переменных $r^1 = x - ut$ и $r^2 = y - vt$ и удовлетворяет неоднородному уравнению Монжа–Ампера (МА)

$$h_{r^1r^1}h_{r^2r^2} - h_{r^1r^2}^2 = b, \quad (8)$$

где $b = B_1 - C_1^2$ можно нормировать на $0, \pm 1$. Заметим, что уравнение МА имеет геометрический смысл в проективной геометрии в $\mathbb{R}^3$. А именно, если $r^3 = h(r^1, r^2)$ является уравнением несобственной аффинной сферы с аффинными нормальными, параллельными оси r^3 , то для h должно выполняться уравнение МА (8).

Согласно Гурса [3] уравнение МА (8) можно преобразовать к линейному уравнению Лапласа–Бельтрами

$$\tilde{h}_{r^2r^2} + b\tilde{h}_{zz} = 0, \quad b = 0, \pm 1, \quad (9)$$

с помощью полулежандрова преобразования $(r^1, r^2, h) \rightarrow (s, r^2, \tilde{h})$, задаваемого как

$$\tilde{h}(z, r^2) = h(s, r^2) - sh_s(s, r^2), \quad z = h_s(s, r^2), \quad h_{ss} \neq 0.$$

Используя явный вид решения линейного уравнения (9), можно найти общее решение уравнения МА (8). Вообще говоря, для эллиптического ($b > 0$), гиперболического ($b < 0$) и параболического ($b = 0$) случаев все глобальные вещественные решения уравнения МА (8) известны. Используя подход Гурса, с каждым решением $\tilde{h}(z, r^2)$ уравнения (9) можно связать решение $h(r^1, r^2)$ уравнения МА (8). В зависимости от выбора частных решений уравнения МА (8) получаем римановы двойные волны или решения системы (7) других типов ранга 2. Инвариантные решения системы (7), связанные с частными решениями уравнения МА (8), приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Изэнтропийные решения системы (1), связанные с уравнением МА (8).

№	b	Решения	Замечания
1a	-1	$u = -\frac{-C_1 r^1 \sqrt{-6r^1 - 36(r^2)^2} + 12r^2 r^1 + 72(r^2)^3}{\sqrt{-6r^1 - 36(r^2)^2}}$ $v = \frac{C_1 r^2 \sqrt{-6r^1 - 36(r^2)^2} + r^1 + 6(r^2)^2}{\sqrt{-6r^1 - 36(r^2)^2}}$ $a = A_1((1 + C_1 t)^2 - t^2)^{-1/k}$	$A_1, C_1 \in \mathbb{R}$
16	-1	$u = C_1 r^1 + r^1 \left(1 - \frac{2C_2 e^{2r^2}}{C_2 e^{2r^2} + C_3} \right)$ $v = (C_1 - 1)r^2 - \ln \left(\frac{-r^1}{C_2 e^{r^2} + C_3} \right)$ $a = A_1((1 + C_1 t)^2 - t^2)^{-1/k}$	$A_1, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$
2a	1	$u = \frac{C_1 x + (C_1^2 + 1)tx - 4y}{(1 + C_1 t)^2 + t^2}$ $v = \frac{1}{4} \frac{4(C_1^2 + 1)ty + 4C_1 y + x}{(1 + C_1 t)^2 + t^2}$ $a = A_1((1 + C_1 t)^2 + t^2)^{-1/k}$	$C_1 \in \mathbb{R}$
26	1	$u = C_1 r^1 + \frac{12r^2(r^1 - 6(r^2)^2)}{\sqrt{36(r^2)^2 - 6r^1}}$ $v = C_1 r^2 + \frac{r^1 - 6(r^2)^2}{\sqrt{36(r^2)^2 - 6r^1}}$ $a = A_1((1 + C_1 t)^2 + t^2)^{-1/k}$	$A_1, C_1 \in \mathbb{R}$
2в	1	$u = (C_1 + 2\alpha_{12})r^1 + 2\alpha_{22}r^2 + \beta_2$ $v = (C_1 - 2\alpha_{12})r^2 - 2\alpha_{11}r^1 - \beta_1$ $a = A_1((1 + C_1 t)^2 + t^2)^{-1/k}$	$\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2$ $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = \frac{1}{4}$
3a	0	$u = \frac{(C_1 t + 1)C_1 x + C_2(x + y)}{(1 + C_1 t)^2}$ $v = \frac{(C_1 t + 1)C_1 y - C_2(x + y)}{(1 + C_1 t)^2}$ $a = A_1(1 + C_1 t)^{-2/k}$	$A_1, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
36	0	$u = C_1 r^1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r^1}{1 + r^2} \right)^2}$ $v = C_1 r^2 - \arcsin \left(\frac{r^1}{1 + r^2} \right)$ $a = A_1(1 + C_1 t)^{-2/k}$	$A_1, C_1 \in \mathbb{R}$
3в	0	$u = C_1 r^1 + \alpha_2 \varphi' + \beta_2$ $v = C_1 r^2 - \alpha_1 \varphi' - \beta_1$ $a = A_1(1 + C_1 t)^{-2/k}$	$C_1, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi = \varphi(\alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2)$

3. РЕШЕНИЯ РАНГОВ 2 И 3

Подход к построению, очерченный в разделе 1, был применен к уравнениям (1) изоэнтропийного потока для получения решений рангов 2 и 3. Результаты нашего анализа собраны в табл. 2, 3. Некоторые из приведенных решений демонстрируют определенную долю свободы. Они могут зависеть от одной или двух произвольных функций от одного или двух римановых инвариантов. Набор различных типов решений зависит от различных комбинаций векторных полей X_a . Для удобства обозначим через $E_i E_j$, E_j , S_j , $E_i E_j E_k$ и т.д., $i, j, k = 1, 2, 3$, решения, которые являются результатом нелинейных суперпозиций решений ранга 1, связанных с различными типами волновых векторов (4a) и (4б). Через r^1 , r^2 и r^3 обозначим римановы инварианты, которые совпадают с групповыми инвариантами дифференциальных операторов X_a рассматриваемого решения.

Произвольные функции, появляющиеся в решениях из табл. 2, 3, позволяют менять геометрические свойства потока жидкости таким образом, чтобы исключить присутствие сингулярностей. Этот факт имеет здесь особое значение, поскольку, как хорошо известно, в большинстве случаев даже для произвольных гладких и достаточно малых начальных данных при $t = t_0$ амплитуда первых производных римановых инвариантов становится неограниченной за некоторое конечное время T . Таким образом, решения, выражаемые в терминах римановых инвариантов, обычно допускают градиентную катастрофу. Тем не менее мы смогли показать, что в этих случаях все же возможно построить ограниченные решения солитонного типа, выражающиеся через эллиптические функции, за счет должного выбора произвольных функций, возникающих в общем решении. Для этого полезно отобрать дифференциальные связи, соответствующие определенному классу нелинейного уравнения Клейна–Гордона, про которое известно, что оно обладает богатыми семействами солитоноподобных решений [4]. Таким образом, мы подчиняем произвольную функцию или функции, возникающие в общих решениях из табл. 2, 3, скажем v , дифференциальным связям в виде v^6 -полевого уравнения Клейна–Гордона по трем независимым переменным r^1 , r^2 и r^3 :

$$\square_{(r^1, r^2, r^3)} v = c v^5, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Хорошо известно, что уравнение (10) инвариантно относительно сходных алгебр Ли, включающих трансляции, вращения, лоренцевы бусты и дилатацию. Систематическое использование структуры подгрупп [5] группы инвариантности уравнения (10) позволяет породить все симметричные переменные ξ в терминах римановых инвариантов r^1 , r^2 , r^3 . Ниже мы сосредоточимся на случае, когда симметричные переменные являются инвариантами предполагаемых подгрупп $G_i \subset G$, орбиты которых в общем положении имеют коразмерность 1. Набор симметричных переменных ξ позволяет после некоторых преобразований редуцировать уравнение (10) ко многим возможным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Применение симметричной редукции к уравнению (10) приводит к решениям вида

$$v(r) = \alpha(r) F(\xi), \quad r = (r^1, r^2, r^3), \quad (11)$$

где множитель $\alpha(r)$ и симметричные переменные $\xi(r)$ явно определяются исходя из теоретико-групповых соображений, а $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ, получаемому подстановкой (11) в уравнение (10). В табл. 4 представлена редукция по подгруппам $G_i \subset G$. Используется следующий базис алгебры Ли $\text{sim}(1, 2)$: дилатация

ТАБЛИЦА 2. Решения ранга 2 с одной, двумя или тремя произвольными функциями одной или двух переменных. Неизвестные функции $a(\cdot)$, $u(\cdot)$, $\dots$ являются произвольными функциями своих аргументов.

№	Тип	Векторные поля	Римановы инварианты	Решения
1	$E_1 S_1$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1}$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1}$ $\beta_i = -(\tilde{e}^2 \times \tilde{m}^2)_i (a + \tilde{e}^1 \cdot \tilde{u}) + e_i^1 [\tilde{u}, \tilde{e}^2, \tilde{m}^2]$ $\sigma_j = -e_1^1 (\tilde{e}^2 \times \tilde{m}^2)_j + e_j^1 (\tilde{e}^2 \times \tilde{m}^2)_{1j}, j = 2, 3$	$r^1 = ((1+k)\bar{a}_1(r^1) + C_2)t - \tilde{e}^1 \cdot \tilde{x}$ $r^2 = Ct - [\tilde{x}, \tilde{e}^2, \tilde{m}^2], [\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{m}^2] = 0$ $C_2 = (C_1 e_1^1 - e_3^1)^{-1}$	$\bar{a} = \bar{a}_1(r^1) + a_0, [\bar{u}_2, \tilde{e}^2, \tilde{m}^2] = C$ $\bar{u} = k\bar{a}_1(r^1) + \bar{u}_2(r^2), \bar{u}_3(r^2) = C_1 \bar{u}_2^1(r^2)$ $a_0, C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
2a	$S_1 S_2$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}$	$r^1 = x^1 - u^1 t$ $r^2 = x^2 - u^2 t$	$\bar{a} = a_0, \bar{u}^1 = -\phi_{,2}, \bar{u}^2 = \phi_{,1},$ $\phi = \varphi(\alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2) + \beta_1 r^1 + \beta_2 r^2 + \gamma,$ $\bar{u}^3 = \bar{u}^3(r^1, r^2), a_0, \alpha_i, \beta_i, \gamma \in \mathbb{R}, i = 1, 2,$
2б	$S_1 S_2$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}$	$r^1 = x^1 - u^1 t$ $r^2 = x^2 - u^2 t$	$\bar{a} = a_0, \bar{u}^2 = \bar{u}^3 = g(x^1 - x^2), a_0 \in \mathbb{R},$ $\bar{u}^1 = b(x^1 - tg(x^1 - x^2), x^2 - tg(x^1 - x^2))$
2в	$S_1 S_2$	$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial x^1}$ $\beta_j = \lambda_j^2 [\tilde{u}, \tilde{e}^1, \tilde{m}^1] - \lambda_j^1 [\tilde{u}, \tilde{e}^2, \tilde{m}^2]$ $\sigma_i = \lambda_1^1 \lambda_i^2 - \lambda_i^1 \lambda_1^2$	$r^1 = (C_1 + \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^2} C_2)t - \tilde{\lambda}^1 \cdot \tilde{x}$ $r^2 = (C_2 + \frac{\lambda_2^1}{\lambda_1^2} C_1 + G(r^1))t - \tilde{\lambda}^2 \cdot \tilde{x}$ $\lambda_i^j = -(\tilde{e}^j \times \tilde{m}^j)_i$ $G(r^1) = \frac{1}{\lambda_1^1} ((\lambda_1^1 \lambda_2^2 - \lambda_2^1 \lambda_1^2) \bar{u}_1^3(r^1) + (\lambda_1^1 \lambda_3^2 - \lambda_3^1 \lambda_1^2) \bar{u}_1^3(r^1))$	$\bar{a} = a_0, a_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $\bar{u}^1 = \frac{1}{\lambda_1^1} (C_1 - \lambda_1^1 \bar{u}_1^2(r^1) - \lambda_3^1 \bar{u}_1^3(r^1)) -$ $-(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^3} \eta + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^1}) \bar{u}_2^2(r^2) + \frac{C_2}{\lambda_1^1}$ $\bar{u}^2 = \bar{u}_1^2(r^1) + \bar{u}_2^2(r^2)$ $\bar{u}^3 = \bar{u}_1^3(r^1) + \eta \bar{u}_2^2(r^2), \eta = \frac{\lambda_1^2 \lambda_3^2 - \lambda_1^1 \lambda_3^2}{\lambda_1^1 \lambda_3^2 - \lambda_3^1 \lambda_1^2}$
3	$E_1 E_2 S_1$	$X = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\sigma_1}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta_{23}}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\beta_{31}}{\beta_{12}} \frac{\partial}{\partial x^2}$ $\sigma_1 = \epsilon_{ijk} e_i^1 e_j^2 (\tilde{e}^3 \times \tilde{m})_k$ $\beta_{ij} = (e_j^1 e_i^2 - e_i^1 e_j^2) [\tilde{u}, \tilde{e}^3, \tilde{m}^3] +$ $+(e_j^2 (\tilde{e}^3 \times \tilde{m}^3)_i - e_i^2 (\tilde{e}^3 \times \tilde{m}^3)_j)(a + \tilde{e}^1 \cdot \tilde{u}) +$ $+(e_i^1 (\tilde{e}^3 \times \tilde{m}^3)_j - e_j^1 (\tilde{e}^3 \times \tilde{m}^3)_i)(a + \tilde{e}^2 \cdot \tilde{u})$	$r^1 = \frac{\beta_{31}(\tilde{e}^3)_t - e_1^1 x^1 - e_2^2 x^2}{1 - \alpha(1+\kappa)t}$ $r^2 = \frac{-\beta_{31}(\tilde{e}^3)_t - e_1^1 x^1 - e_2^2 x^2}{1 - \alpha(1+\kappa)t}$ $r^3 = x^3 - u_0^0 t$ $\beta = \frac{1+\kappa^{-1}}{e_1^1 - e_2^2}$	$\bar{a} = \frac{\alpha(e_1^1 + e_2^1)x^1 + (e_2^2 + e_2^2)x^2}{1 - \alpha(1+\kappa)t}, \bar{u}^3 = u_0^3$ $\bar{u}^1 = \frac{-\kappa\alpha((e_1^1)^2 + (e_1^2)^2)x^1 + (e_1^1 e_2^1 + e_1^2 e_2^2)x^2 - \bar{u}_3^1(r^3)}{1 - \alpha(1+\kappa)t}$ $\bar{u}^2 = \kappa\alpha \left(\frac{e_2^2 (\beta_{31}(\tilde{e}^3)_t - e_1^1 x^1 - e_2^2 x^2)}{1 - \alpha(1+\kappa)t} + \right.$ $\left. + \frac{e_2^2 (-\beta_{31}(\tilde{e}^3)_t - e_1^1 x^1 - e_2^2 x^2)}{1 - \alpha(1+\kappa)t} \right) + \frac{e_2^2 - e_1^2}{e_2^1 - e_1^1} \bar{u}_3^1(r^3),$ $\alpha, u_0^3 \in \mathbb{R}$

ТАБЛИЦА 3. Решения ранга 3 с произвольными функциями $a(\cdot), u(\cdot), \dots$.

№	Тип	Векторные поля	Римановы инварианты	Решения
1	$E_1 E_2 E_3$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\sigma_1}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial x^2}$ $\sigma_1 = -[\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3]$ $\beta_i = (\tilde{e}^2 \times \tilde{e}^3)_i$ $+(\tilde{e}^1 \times \tilde{e}^3)_i(a + \tilde{e}^2 \cdot \tilde{u}) +$ $+(\tilde{e}^1 \times \tilde{e}^2)_i(a + \tilde{e}^3 \cdot \tilde{u})$	$r^i = (1 + \kappa) a_i(r^i)t - \tilde{e}^i \cdot \tilde{x}, \quad i = 1, 2, 3$ $\tilde{e}^i \cdot \tilde{e}^j = -\frac{1}{\kappa}, \quad i \neq j = 1, 2, 3$ $\frac{\partial x^3}{\partial t} + (f(r^1) + u_0^3) \frac{\partial r^3}{\partial x^3} = 0$	$\bar{a} = \bar{a}_1(r^1) + \bar{a}_2(r^2) + \bar{a}_3(r^3)$ $\bar{u} = \kappa(\tilde{e}^1 \bar{a}_1(r^1) + \tilde{e}^2 \bar{a}_2(r^2) + \tilde{e}^3 \bar{a}_3(r^3))$ $(a + \tilde{e}^1 \cdot \tilde{u}) +$
2a	$E_1 S_1 S_2$	$X = e_1^3 \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma + e_2^3 \frac{\partial}{\partial x^2}$	$r^1 = ((1 + k^{-1})f(r^1) + a_0 + u_0^3)t - x^3$ $r^2 = t - x^1 \sin g(r^2, r^3) + x^2 \cos g(r^2, r^3)$ $\frac{\partial x^3}{\partial t} + (f(r^1) + u_0^3) \frac{\partial r^3}{\partial x^3} = 0$	$\bar{a} = k^{-1}f(r^1) + a_0, \quad \bar{u}^1 = \sin g(r^2, r^3)$ $\bar{u}^2 = -\cos g(r^2, r^3), \quad \bar{u}^3 = f(r^1) + u_0^3$ $a_0, u_0^3 \in \mathbb{R}$
2б	$E_1 S_1 S_2$	$X = e_1^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma + e_2^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$	$r^1 = \frac{((1+k^{-1})B+a_0+u_0^3)t-x^3}{1-(1+k^{-1})At}$ $r^2 = t - x^1 \sin g(r^2, r^3) + x^2 \cos g(r^2, r^3)$ $r^3 = \Psi \frac{A(k a_0 - u_0^3)t + x^3 - k a_0 - B}{A((1+k)At - k)/(k+1)}$	$\bar{a} = k^{-1}(Ar^1 + B) + a_0,$ $\bar{u}^1 = \sin g(r^2, r^3), \quad \bar{u}^2 = -\cos g(r^2, r^3)$ $\bar{u}^3 = Ar^1 + B + u_0^3, \quad a_0, u_0^3 \in \mathbb{R}$
2в	$E_1 S_1 S_2$	$X = \frac{\partial}{\partial x^3}$	$r^1 = (k^{-1}f(r^1) + a_0)t - x^1 \cos f(r^1) - x^2 \sin f(r^1)$ $r^2 = -t \cos f(r^1) - x^2, \quad r^3 = -t \sin f(r^1) + x^1$	$\bar{a} = k^{-1}f(r^1) + a_0,$ $\bar{u}^1 = \sin f(r^1), \quad \bar{u}^2 = -\cos f(r^1)$ $\bar{u}^3 = g(r^2 \cos f(r^1) + r^3 \sin f(r^1)), \quad a_0 \in \mathbb{R}$

ТАБЛИЦА 4. Редукция уравнения (10) в пространстве Минковского $M(1, 2)$ к ОДУ второго порядка; решение имеет вид $v = \alpha F(\xi)$.

№	Алгебра	α	ξ	ОДУ
1	D, P_1	$\{4c[(r^2)^2 + (r^3)^2]\}^{-1/4}$	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r^3}{r^2}$	$F'' + F + F^5 = 0$
2	D, L_{31}	$\left\{-\frac{c(r^1)^2}{4}\right\}^{-1/4}$	$\frac{(r^2)^2 + (r^3)^2}{(r^1)^2}$	$\xi(1 + \xi)F'' + (2\xi + \frac{3}{2})F' + \frac{3}{16}F + F^5 = 0$
3	$D + \frac{1+q}{q}K_{12}, L_{23}$	$\left\{-\frac{(2q+1)}{c}\right\}^{1/4} (r^1 + r^2)^{q/2}$	$[(r^1)^2 - (r^2)^2 - (r^3)^2](r^1 + r^2)^q$	$F'' + \frac{3q+k}{2q+1}\xi F' + F^5 = 0, \quad q = -k/3, k = 2, 4 - 3k$
4	$D + \frac{1}{2}K_{12}, L_1 - K_{13}$	$(\frac{9}{4c})^{1/4} \{r^2 - (r^1 + r^3)^2/4\}^{-1/2}$	$\frac{6(r^3 - r^1 + 6r^2)(r^1 + r^3) - (r^1 + r^3)^3}{8(r^2 - (r^1 + r^3)^2/4)^{3/2}}$	$(1 + \xi^2)F'' + \frac{7}{3}\xi F' + \frac{1}{3}F + F^5 = 0$

$D = r^i \partial_{r^i} - \frac{1}{2} v \partial_v$, трансляции $P_i = \partial_{r^i}$, вращения $L_{ab} = r^a \partial_{r^b} - r^b \partial_{r^a}$, лоренцевы бусты $K_{1a} = -r^1 \partial_{r^a} - r^a \partial_{r^1}$. Подробности процедуры получения таких ОДУ можно найти в работе [5].

Выполняя сохраняющее свойство Пенлеве преобразование $(F, \xi) \rightarrow (U, \zeta)$ уравнений, выписанных в табл. 4,

$$F(\xi) = \left(\frac{U(\zeta)}{g(\xi)} \right)^{1/2}, \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 = \frac{1}{Gg^2},$$

где четыре набора функций G , g и констант e_0 , c_4 удовлетворяют соответствующим условиям:

- 1) $G = -\frac{3c_4}{4}$, $g^2 = \frac{4e_0}{c_4}$,
- 2) $G = -\frac{3c_4}{4} \xi(\xi + 1)$, $g^2 = -\frac{64e_0}{c_4} \xi$,
- 3) $G = -\frac{3c_4}{4}$, $(a, e_0, g^2) = (0, 0, k_1)$, $\left(\frac{4}{3}, 0, k_1 \xi^{4/3} \right)$, $\left(2, e_0, -\frac{16e_0}{c_4} \xi^2 \right)$,
- 4) $G = -\frac{3c_4}{4} (\xi^2 + 1)$, $g = k_1(1 + \xi^2)^{1/3}$, $e_0 = 0$, $k_1 \neq 0$,

получаем первый интеграл

$$U'^2 - c_4 U^4 - 12e_0 U^2 - 4K'U = 0, \quad c_4 \neq 0.$$

Если $K' = 0$, то функция U^{-1} есть $\sin$, $\cos$, sh или ch в зависимости от знаков констант; следовательно, ограниченные решения легко охарактеризовать. Когда $K' \neq 0$, удобно сначала проинтегрировать это эллиптическое уравнение в терминах $\wp$ -функции Вейерштрасса,

$$U(\zeta) = \frac{K'}{\wp(\zeta) - e_0}, \quad g_2 = 12e_0^2, \quad g_3 = -8e_0^3 - c_4 K'^2, \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

а затем использовать классические соотношения между $\wp$ -функцией и различными ограниченными функциями Якоби [6]. Мы приведем явные решения выписанных в табл. 4 уравнений в терминах $\wp$ -функции Вейерштрасса, оставив переход к обозначениям Якоби читателю. Эти решения получаются при подходящих выборах нормировочных констант e_0 , c_4 , K' , k_1 .

При нормировке $e_0 = -1/3$, $c_4 = -4/3$, $K' = C$ общее решение первого уравнения из табл. 4 имеет вид

$$F^2(\xi) = \frac{C}{\wp(\xi) + 1/3}, \quad \zeta = \xi, \quad g_2 = \frac{4}{3}, \quad g_3 = \frac{8}{27} + \frac{4}{3} C^2, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

В нормировке $e_0 = k_0^{-2}/48$, $c_4 = -(4/3)k_0^{-2}$, $K' = C$ решение второго уравнения есть

$$F^2(\xi) = \frac{C\xi^{-1/2}}{\wp(\zeta) - 1/(48k_0^2)}, \quad \zeta = -2k_0 \text{Arcth} \sqrt{\xi + 1}, \quad (13)$$

$$g_2 = \frac{1}{192k_0^4}, \quad g_3 = -\frac{1}{13824k_0^6} + \frac{4C^2}{3k_0^2},$$

где $k_0, C \in \mathbb{R}$. Три случая для третьего уравнения приводят к соответствующим решениям:

$$\begin{aligned} q = -\frac{k}{3}: \quad F^2(\xi) &= \frac{C}{\wp(\xi)}, \quad \zeta = \xi, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{4C^2}{3}, \\ q = 4 - 3k: \quad F^2(\xi) &= \frac{C\xi^{-2/3}}{\wp(\zeta)}, \quad \zeta = 3k_0\xi^{1/3}, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{4C^2}{3k_0^2}, \\ q = k - 2: \quad F^2(\xi) &= \frac{C\xi^{-1}}{\wp(\zeta) - 1/(12k_0^2)}, \quad \zeta = k_0 \ln \xi, \quad g_2 = \frac{1}{12k_0^4}, \quad g_3 = -\frac{1}{216k_0^6} + \frac{4C^2}{3k_0^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, четвертое уравнение интегрируется как

$$F^2(\xi) = \frac{C(\xi^2 + 1)^{-1/3}}{\wp(\zeta)}, \quad \zeta = \xi_2 F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; -\xi^2\right), \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{4C^2}{3k_0^2}, \quad (15)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция.

Используя эти результаты, мы построили ограниченные решения ранга 3 уравнений (1). При этом для каждого общего решения из табл. 2 и 3 мы ввели в уравнение Клейна–Гордона (10) произвольные функции и отображали только те решения, которые выражаются через $\wp$ -функцию Вейерштрасса.

В качестве иллюстрации рассмотрим решение ранга 3 в случае $E_1E_2E_3$. Это решение существует, если углы ϕ_{ij} между энтропийными волновыми векторами $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ удовлетворяют условиям [7]

$$\cos \phi_{ij} = -\frac{1}{\kappa}, \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

Если выполняется требование, что каждая из функций $a_i(r^i)$, $i = 1, 2, 3$, подчиняется первому уравнению из табл. 4, решение ранга 3 типа $E_1E_2E_3$ согласно уравнению (12) принимает вид

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{\left(\wp(r^i, \frac{4}{3}, \frac{8}{27} + \frac{4}{3}C_i^4) + \frac{1}{3}\right)^{1/2}}, \quad \vec{u} = \kappa \sum_{i=1}^3 \frac{C_i \vec{\lambda}^i}{\left(\wp(r^i, \frac{4}{3}, \frac{8}{27} + \frac{4}{3}C_i^4) + \frac{1}{3}\right)^{1/2}}, \\ r^i &= -(1 + \kappa) \frac{C_i}{\left(\wp(r^i, \frac{4}{3}, \frac{8}{27} + \frac{4}{3}C_i^4) + \frac{1}{3}\right)^{1/2}} t + \vec{\lambda}^i \cdot \vec{x}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Это решение имеет физический интерес, поскольку оно остается ограниченным при каждом значении римановых инвариантов r^i . Таким образом, оно представляет ограниченное решение с периодическими скоростями потока. Аналогично можно подставить произвольные функции во второе, третье и четвертое дифференциальные уравнения из табл. 4 и получить другие типы ограниченных решений. В табл. 5 приведены получающиеся типы решений и соответствующие римановы инварианты. Все они являются ограниченными решениями периодического типа или типа бампа или кинка. Заметим, что эти решения допускают градиентную катастрофу за некоторое конечное время. Поэтому могут возникать некоторые разрывы, такие как ударные волны. Заметим также, что решения остаются ограниченными, даже когда первые производные от r^i стремятся к бесконечности после некоторого конечного времени T . Однако после времени T решение не может быть представлено в параметрическом виде через римановы инварианты и прекращает существование.

Таблица 5. Ограниченные вещественные решения для нерассеивающегося решения $E_1 E_2 E_3$, полученные при подчинении произвольных функций различным редукциям (12)–(15) уравнения Клейна-Гордона (10).

№	Римановы инварианты	Решение	Тип и замечания
1	$r^i = -(1 + \kappa) \frac{C_i}{\left(\wp(r^i, \frac{4}{3}, \frac{8}{27} + \frac{4}{3} C_i^4) + \frac{1}{3}\right)^{1/2}} t + \bar{\lambda}^i \cdot \vec{x}$	$a = \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{\left(\wp(r^i, \frac{4}{3}, \frac{8}{27} + \frac{4}{3} C_i^4) + \frac{1}{3}\right)^{1/2}}$ $\vec{a} = \kappa \sum_{i=1}^3 \frac{C_i \bar{\lambda}^i}{\left(\wp(r^i, \frac{4}{3}, \frac{8}{27} + \frac{4}{3} C_i^4) + \frac{1}{3}\right)^{1/2}}$	Периодическое решение $C_i \in \mathbb{R}$
2a	$r^i = -(1 + \kappa) \left(\frac{C_i}{\wp(r^i, 0, \frac{4}{3} C_i^2)} \right)^{1/2} t + \bar{\lambda}^i \cdot \vec{x}$	$a = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i}{\wp(r^i, 0, \frac{4}{3} C_i^2)} \right)^{1/2}$ $\vec{a} = \kappa \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i}{\wp(r^i, 0, \frac{4}{3} C_i^2)} \right)^{1/2} \bar{\lambda}^i$	Периодическое решение $C_i > 0$
2б	$r^i = -(1 + \kappa) \left(\frac{C_i (r^i)^{-2/3}}{\wp(\zeta_i, 0, \frac{4 C_i^2}{3 k_0^2})} \right)^{1/2} t + \bar{\lambda}^i \cdot \vec{x}$ $\zeta_i = 3 k_0 (r^i)^{1/3}$	$a = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i (r^i)^{-2/3}}{\wp(\zeta_i, 0, \frac{4 C_i^2}{3 k_0^2})} \right)^{1/2}$ $\vec{a} = \kappa \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i (r^i)^{-2/3}}{\wp(\zeta_i, 0, \frac{4 C_i^2}{3 k_0^2})} \right)^{1/2} \bar{\lambda}^i$	Бамп $k_0 \in \mathbb{R}, C_i > 0$
2в	$r^i = -(1 + \kappa) \left(\frac{C_i (r^i)^{-1}}{\wp(\zeta_i, 12 e_0^2, -8 e_0^3 + 16 C_i^2 e_0) - e_0} \right)^{1/2} t + \bar{\lambda}^i \cdot \vec{x}$ $\zeta_i = k_0 \ln r^i$	$a = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i (r^i)^{-1}}{\wp(\zeta_i, 12 e_0^2, -8 e_0^3 + 16 C_i^2 e_0) - e_0} \right)^{1/2}$ $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 \kappa \left(\frac{C_i (r^i)^{-1}}{\wp(\zeta_i, 12 e_0^2, -8 e_0^3 + 16 C_i^2 e_0) - e_0} \right)^{1/2} \bar{\lambda}^i$	Бамп $e_0 \in \mathbb{R}, C_i > 0$
3	$r^i = -(1 + \kappa) \left(\frac{C_i ((r^i)^2 + 1)^{-1/3}}{\wp(\zeta_i, 0, \frac{4 C_i^2}{3 k_0^2})} \right)^{1/2} t + \bar{\lambda}^i \cdot \vec{x}$ $\zeta_i = r^i {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; -(r^i)^2\right)$	$a = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i ((r^i)^2 + 1)^{-1/3}}{\wp(\zeta_i, 0, \frac{4 C_i^2}{3 k_0^2})} \right)^{1/2}$ $\vec{a} = \kappa \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_i ((r^i)^2 + 1)^{-1/3}}{\wp(\zeta_i, 0, \frac{4 C_i^2}{3 k_0^2})} \right)^{1/2} \bar{\lambda}^i$	Кинк $k_0 \in \mathbb{R}, C_i > 0$

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы показали, как построить периодические решения рангов 2 и 3, выражающиеся через $\wp$ -функцию Вейерштрасса. Они представлены бампами, кинками и многоволновыми решениями, которые параметризованы римановыми инвариантами. Эти решения остаются ограниченными, даже когда инварианты допускают градиентную катастрофу. Мы также нашли решения ранга 2 для изоэнтропийного течения идеальной жидкости, когда скорость звука зависит только от времени. Эти решения были получены с использованием метода условных симметрий и преобразования Лежандра, примененного к уравнению МА. В настоящее время нами исследуются свойства устойчивости полученных решений. Решения, которые обладают свойством устойчивости, должны быть наблюдаемы физически, и такой анализ мог бы стать отправной точкой для пертурбативных расчетов. Эта задача будет рассмотрена в последующей работе.

Благодарности. Настоящая работа была частично поддержана исследовательскими грантами от NSERC of Canada. Р. Конт с удовольствием благодарит Laboratoire de Physique Mathématique du Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal за постоянную поддержку.

Список литературы

- [1] A. M. Grundland, B. Huard, *J. Phys. A*, **40**:15 (2007), 4093–4123.
- [2] R. Conte, M. Musette, *The Painlevé Handbook*, Springer, Dordrecht, 2008.
- [3] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*. V. I: *Problème de Cauchy. Caractéristiques. Intégrales intermédiaires*, Hermann, Paris, 1896; V. II: *La méthode de Laplace. Les systèmes en involutions. La méthode de M. Darboux. Les équations de la première classe. Transformations des équations du second ordre. Généralisations diverses*, Hermann, Paris, 1898.
- [4] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [5] P. Winternitz, A. M. Grundland, J. A. Tuszyński, *J. Math. Phys.*, **28**:9 (1987), 2194–2212.
- [6] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Grundlehren Math. Wiss., **52**, Springer, Berlin–New York, 1966.
- [7] Z. Peradzyński, *Arch. Mech.*, **24** (1972), 287–303.