Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Джорджевич, Б. Г. Драгович, p -Адитеский и адельный гармонические осцилляторы с зависящей от времени частотой, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 2, 239–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:26:50

p -АДИЧЕСКИЙ И АДЕЛЬНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ЧАСТОТОЙ

Развиты классический и квантовый формализмы для p -адического и адельного гармонических осцилляторов с зависящей от времени частотой, и получены общие формулы для основных теоретических величин. В частности, найден p -адический пропагатор, показано существование простого вакуумного состояния и адельной квантовой динамики. Отмечены дискретность пространства и наличие p -адической квантово-механической фазы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантово-механических экспериментах, как и во всех измерениях, численные результаты лежат в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В принципе соответствующие теоретические модели могли бы быть созданы с помощью только $\mathbb{Q}$, но они потеряли бы при этом обычную эффективность и красоту математического анализа. Таким образом, вместо $\mathbb{Q}$ традиционно используются поле действительных чисел $\mathbb{R}$ в классической механике и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ в квантовой механике. $\mathbb{R}$ – это пополнение $\mathbb{Q}$ по метрике, индуцированной абсолютным значением, а $\mathbb{C}$ – алгебраическое расширение $\mathbb{R}$. В дополнение к $\mathbb{R}$ существуют поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, являющиеся пополнением $\mathbb{Q}$ по p -адической норме (p – простое число) [1]. Согласно теореме Островского $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ (для всех p) исчерпывают все возможные пополнения $\mathbb{Q}$. Таким образом, поле $\mathbb{Q}$ всюду плотно не только в $\mathbb{R}$, но и в каждом $\mathbb{Q}_p$. В последние годы появился ряд работ [2–5], в которых исследовались теоретические модели с p -адическими числами.

Имеется общее убеждение, что для физики важно не отдельное простое число p , т.е. необходимо рассматривать p -адические модели для всех простых чисел. Ясно, что p -адические модели, имеющие физический смысл, должны быть как-то связаны с обычными (вещественными) моделями. Пространство аделей $\mathbb{A}$ [6] является математическим инструментом, позволяющим нам рассматривать вещественные и p -адические числа одновременно и как единое целое. Следовательно, естественно ожидать, что адельный

*Department of Physics, University of Niš, Niš, Yugoslavia

†Institute of Physics, Belgrade, Yugoslavia; Математический институт им. В.А. Стеклова, Москва, Россия

подход даст более полное по сравнению с обычным подходом описание физической системы.

p -Адические числа проявляют ультраметрические (неархимедовы) свойства, которые могут быть реализованы в квантовых системах на очень малых расстояниях. Возможность того, что пространство-время на планковских масштабах проявляет p -адическую (или адельную) структуру, является одним из основных мотивов для исследования соответствующих моделей.

Для того чтобы осуществить систематический подход к p -адическим моделям в квантовых системах, была сформулирована p -адическая квантовая механика [7, 8]. Квантование проводится по Вейлю. Соответствующее гильбертово пространство $L_2(\mathbb{Q}_p)$ содержит комплекснозначные квадратично интегрируемые функции над $\mathbb{Q}_p$. Уравнение Шредингера не используется, а динамическая эволюция и спектральная задача системы связываются с унитарным представлением оператора эволюции $U_p(t)$ на $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Как обобщение и объединение p -адической и обычной квантовой механики недавно была сформулирована адельная квантовая механика [9].

До сих пор в p -адической и адельной квантовых механиках было рассмотрено совсем небольшое число систем: нерелятивистская свободная частица [7], гармонический осциллятор [7, 9], частица в постоянном поле [8], модель мини-суперпространства де Ситтера для Вселенной [10] и релятивистская свободная частица [11]. Несомненно, что рассмотрение других физических систем, которые проявляют p -адические и адельные свойства, позволит по-новому взглянуть на проблему в целом и на изучение планковских масштабов, в частности.

В этой статье рассмотрены некоторые свойства p -адического и адельного гармонических осцилляторов с зависящей от времени частотой (ГОЗВЧ). Модель ГОЗВЧ имеет большое количество приложений (от квантовой оптики [12] до квантовой космологии [13]). Однако многие свойства классического и квантового движений могут быть выявлены без конкретизации временной зависимости частоты.

2. p -АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И АДЕЛИ

Дадим вначале краткий обзор некоторых основных фактов из теории p -адических чисел и аделей.

Любое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде $x = p^\nu m/n$, где $\nu, m, n \in \mathbb{Z}$ и p – заданное простое число, на которое ни m , ни n не делятся. По теореме о разложении на простые множители целое число ν определяется единственным образом. По определению p -адическая норма от x имеет вид

$$|x|_p = p^{-\nu}, \quad |0|_p = 0 \quad (2.1)$$

и при этом выполняется строгое неравенство треугольника

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p). \quad (2.2)$$

Норма со свойством (2.2) называется неархимедовой или ультраметрической нормой. Каждое p -адическое число x может быть единственным образом представлено с помощью канонического разложения

$$x = p^\nu \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \quad x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad x_0 \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Разложение (2.3) сходится по метрике, индуцированной p -адической нормой $d_p(x, y) = |x - y|_p$.

В основном существуют два типа анализа на $\mathbb{Q}_p$, базирующихся на двух различных отображениях: $\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$. Мы используем оба эти анализа.

Элементарные p -адические функции, такие как $\exp x$, $\sin x$ и $\cos x$, задаются рядами такими же, как и в вещественном случае. Однако их область сходимости довольно ограничена и для перечисленных функций определяется условием $|x|_p < |2|_p$. Производные p -адическозначных функций определены так же, как и в вещественном случае, но используют p -адическую норму вместо абсолютного значения.

Для комплекснозначных функций p -адического аргумента имеется хорошо определенное интегрирование по мере Хаара. В частности, мы используем гауссов интеграл [3]

$$\begin{aligned} \int_{|x|_p \leq p^{-\nu}} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x) dx = \\ = \begin{cases} p^\nu \Omega(p^\nu |\beta|_p), & |\alpha|_p \leq p^{-2\nu}, \\ \lambda_p(\alpha) |2\alpha|_p^{-1/2} \chi_p(-\frac{\beta^2}{4\alpha}) \Omega(p^{-\nu} |\frac{\beta}{2\alpha}|_p), & |4\alpha|_p > p^{-2\nu}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) функция $\chi_p(u) = \exp(2\pi i \{u\}_p)$ — p -адический аддитивный характер, где $\{u\}_p$ обозначает дробную часть, $u \in \mathbb{Q}_p$; $\lambda_p(\alpha)$ — арифметическая комплекснозначная функция со следующими основными свойствами [3]:

$$\begin{aligned} \lambda_p(0) = 1, \quad \lambda_p(a^2 \alpha) = \lambda_p(\alpha), \\ \lambda_p(\alpha) \lambda_p(\beta) = \lambda_p(\alpha + \beta) \lambda_p(\alpha^{-1} + \beta^{-1}), \quad |\lambda_p(\alpha)|_\infty = 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Функция $\Omega(|u|_p)$ в (2.4) — характеристическая функция на $\mathbb{Z}_p$, т.е.

$$\Omega(|u|_p) = \begin{cases} 1, & |u|_p \leq 1, \\ 0, & |u|_p > 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ — кольцо p -адических целых чисел.

Адель $a \in \mathbb{A}$ [6] — это бесконечная последовательность

$$a = (a_\infty, a_2, \dots, a_p, \dots), \quad (2.7)$$

где $a_\infty \in \mathbb{R}$ и $a_p \in \mathbb{Q}_p$ с ограничением, что $a_p \in \mathbb{Z}_p$ для всех, кроме конечного множества S , простых чисел p . Множество всех аделей $\mathbb{A}$ можно записать в форме

$$\mathbb{A} = \bigcup_S \mathcal{A}(S), \quad \mathcal{A}(S) = \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p. \quad (2.8)$$

Множество $\mathbb{A}$ — топологическое пространство, являющееся кольцом по отношению к покомпонентному сложению и умножению. Существует естественное обобщение анализа над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ до анализа над $\mathbb{A}$.

3. КЛАССИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР: ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, p -АДИЧЕСКИЙ И АДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАИ

Классический ГОЗВЧ задается лагранжианом

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2(t)}{2} x^2, \quad (3.1)$$

где $m \in \mathbb{Q}$. Зависящая от времени частота

$$\omega(t) = \sum_{n \geq 0} \omega_n t^n,$$

где $\omega_n \in \mathbb{Q}$, предполагается аналитической функцией на $\mathbb{D}_\infty \subset \mathbb{R}$ и на $\mathbb{D}_p \subset \mathbb{Z}_p$ для всех p . Другими словами, $\omega(t) \in \mathcal{A}(S')$ при $t \in \mathcal{A}(S)$, где S и S' – конечные множества простых чисел p . В вещественном случае $m, x, \dot{x}, t, \omega(t) \in \mathbb{R} \equiv \mathbb{Q}_\infty$ (далее индекс ∞ обозначает величины, определенные над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и такая же ситуация выполняется для p -адических аналогов. Из-за формальной схожести анализа исследование системы с лагранжианом (3.1) проводится одинаково как в вещественном, так и в p -адическом случаях. Таким образом, в обоих случаях уравнения движения будут иметь вид

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0 \quad (3.2)$$

с общим решением [14]

$$x(t) = G(t)[C_1 \cos \gamma(t) + C_2 \sin \gamma(t)]. \quad (3.3)$$

Амплитуда $G(t)$ и фаза $\gamma(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$G^3(t)\ddot{G}(t) + \omega^2(t)G^4(t) = C^2, \quad \dot{\gamma}(t)G^2(t) = C, \quad (3.4)$$

где C – константа ($0 < C \in \mathbb{R}$, $C \in 1 + p\mathbb{Z}_p$), которую можно положить равной единице. Мы интересуемся аналитическими решениями (3.3), когда $G(t)$ и $\gamma(t)$ будут степенными рядами по t с рациональными коэффициентами. Дифференциальное уравнение для $G(t)$ является нелинейным. Однако оно не приводит к нелинейным алгебраическим уравнениям на неизвестные коэффициенты G_n в разложении

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} G_n t^n,$$

и любой G_n может быть представлен как рациональное число, одно и то же в вещественном и всех p -адических случаях. Заметим, что обычные ряды с рациональными коэффициентами, которые сходятся на $\mathbb{D}_\infty \subset \mathbb{R}$ в вещественном случае, являются также p -адически сходящимися в некоторой области $\mathbb{D}_p \subset \mathbb{Z}_p$.

В качестве иллюстрации аналитических решений уравнений (3.4) (при $C = 1$) рассмотрим два простых примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $\omega(t) = \omega_0/(1+at)^2$, где $\omega_0 = b^{-2}$ и $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$G(t) = b(1+at), \quad \gamma(t) = \frac{1}{b^2} \frac{t}{1+at}.$$

Так как функция $\gamma(t)$ является аргументом тригонометрических функций в (3.3), получаем, что общая область сходимости для всех аналитических разложений есть $|t|_p < |2b^2|_p$ для каждого p .

ПРИМЕР 2. Пусть $\omega(t) = \omega_0/(1+at)$, где $\omega_0 = b^{-2}(1+a^2b^4/4)^{1/2}$ и $a, b \in 2\mathbb{N}$. Тогда по аналогии с примером 1 получаем

$$G(t) = b(1+at)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{ab^2} \ln(1+at), \quad |t|_p < |2b^2|_p.$$

Таким образом, существуют нетривиальные адельные решения для $G(t)$ и $\gamma(t)$, и, следовательно, для $x(t)$ в (3.3).

Для определения констант C_1 и C_2 мы используем два типа условий на классическую траекторию.

3.1. Решение с граничными условиями. Классическая траектория, связывающая две пространственно-временные точки (x', t') и (x'', t'') , описывается формулой

$$x(t) = \frac{G(t)}{\sin(\gamma'' - \gamma')} \left[\frac{x'}{G'} \sin(\gamma'' - \gamma(t)) + \frac{x''}{G''} \sin(\gamma(t) - \gamma') \right], \quad (3.5)$$

где $x' = x(t')$, $x'' = x(t'')$, $G' = G(t')$, $G'' = G(t'')$, $\gamma' = \gamma(t')$ и $\gamma'' = \gamma(t'')$. Заметим, что в вещественном случае должно быть выполнено условие $\gamma'' - \gamma' \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Напомним также, что $|\gamma'' - \gamma'|_p < |2|_p$. Как мы увидим далее, полезно записать соответствующий импульс в форме

$$k(t) = m\dot{x}(t) = m \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} x(t) + \frac{mG(t)\dot{\gamma}(t)}{\sin(\gamma'' - \gamma')} \left[\frac{x''}{G''} \cos(\gamma(t) - \gamma') - \frac{x'}{G'} \cos(\gamma'' - \gamma(t)) \right]. \quad (3.6)$$

3.2. Решение с начальными условиями. Налагая начальные условия $x^0 = x(t^0)$, $k^0 = m\dot{x}(t^0)$, находим эволюцию классического состояния в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{G(t)}{G^0} \cos(\gamma(t) - \gamma^0) - \frac{G(t)\dot{G}^0}{C} \sin(\gamma(t) - \gamma^0) \right] x^0 + \\ &\quad + \frac{G(t)G^0}{mC} \sin(\gamma(t) - \gamma^0) k^0, \\ k(t) &= \left[m \left(\frac{\dot{G}(t)}{G^0} - \frac{G(t)\dot{\gamma}(t)\dot{G}^0}{C} \right) \cos(\gamma(t) - \gamma^0) - \right. \\ &\quad \left. - m \left(\frac{\dot{G}(t)\dot{G}^0}{C} + \frac{G(t)\dot{\gamma}(t)}{G^0} \right) \sin(\gamma(t) - \gamma^0) \right] x^0 + \\ &\quad + \frac{G^0}{C} [G(t)\dot{\gamma}(t) \cos(\gamma(t) - \gamma^0) + \dot{G}(t) \sin(\gamma(t) - \gamma^0)] k^0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $G^0 = G(t^0)$ и $\gamma^0 = \gamma(t^0)$. Полагая сначала $t = t'$ и затем $t = t''$ в первом уравнении (3.7), можно найти x^0 и k^0 как функции от x' и x'' . Подставляя $x^0 = x^0(x', x'')$ и $k^0 = k^0(x', x'')$ во второе уравнение (3.7), получаем формулу (3.6) для $k(t)$.

Для удобства вычисления соответствующего классического действия

$$\overline{S}(x'', t''; x', t') = \frac{m}{2} \int_{t'}^{t''} [\dot{x}^2(t) - \omega^2(t)x^2(t)] dt \quad (3.8)$$

следует использовать интегрирование по частям и уравнение движения (3.2), что приводит к выражению

$$\overline{S}(x'', t''; x', t') = \frac{m}{2} (x'' \dot{x}'' - x' \dot{x}'). \quad (3.9)$$

В силу уравнения (3.6), которое дает $\dot{x}$ как функцию от x , мы получаем действие в виде квадратичной формы по x'' и x' , т.е.

$$\begin{aligned} \overline{S}(x'', t''; x', t') = \frac{m}{2} & \left[\left(\frac{\dot{\gamma}''}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} + \frac{\dot{G}''}{G''} \right) x''^2 - \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{\dot{\gamma}''\dot{\gamma}'}}{\sin(\gamma'' - \gamma')} x'' x' + \left(\frac{\dot{\gamma}'}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} - \frac{\dot{G}'}{G'} \right) x'^2 \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

где использовано равенство

$$\frac{G''\dot{\gamma}''}{G'} + \frac{G'\dot{\gamma}'}{G''} = 2\sqrt{\dot{\gamma}''\dot{\gamma}'},$$

полученное с помощью (3.4).

Заметим, что примененный выше p -адический формализм имеет ту же форму, что и его вещественный аналог, или, другими словами, классический ГОЗВЧ инвариантен относительно замены числовых полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ для всех p . Это можно рассматривать как необходимое условие существования адельного классического ГОЗВЧ, который мы построим следующим способом. Пусть координата x , импульс k и время t будут адельными величинами, как (2.7). Соответствующий адельный лагранжиан задается в виде

$$L(x, \dot{x}, t) = (L(x_\infty, \dot{x}_\infty, t_\infty), L(x_2, \dot{x}_2, t_2), \dots, L(x_p, \dot{x}_p, t_p), \dots),$$

где $L(x_v, \dot{x}_v, t_v) = m[\dot{x}_v^2 - \omega^2(t_v)x_v^2]/2$ с $v = \infty, 2, \dots, p, \dots$ и $|L(x_p, \dot{x}_p, t_p)|_p \leq 1$ для всех, кроме конечного числа, простых чисел p . Все другие представленные выше величины, как вещественные, так и p -адические, также могут быть обобщены до адельных. Например, адельное классическое действие запишется в виде

$$\overline{S}(x'', t''; x', t') = (\overline{S}(x''_\infty, t''_\infty; x'_\infty, t'_\infty), \overline{S}(x''_2, t''_2; x'_2, t'_2), \dots, \overline{S}(x''_p, t''_p; x'_p, t'_p), \dots), \quad (3.11)$$

где вещественная и p -адические составляющие имеют вид (3.10).

4. КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР: ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, p -АДИЧЕСКИЙ И АДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАИ

Единственный формализм обычной квантовой механики, который допускает p -адические и адельные обобщения с комплекснозначными волновыми функциями, есть тройка [7, 9]

$$(L_2(\mathbb{R}), W(z_\infty), U(t_\infty)), \quad (4.1)$$

где $L_2(\mathbb{R})$ – гильбертово пространство, z_∞ – точка вещественного классического фазового пространства, $W(z_\infty)$ – унитарное представление группы Вейля–Гайзенберга на $L_2(\mathbb{R})$, $U(t_\infty)$ – унитарное представление эволюционного оператора на $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, под p -адической и адельной квантовыми механиками мы понимаем p -адический и адельный аналоги (4.1), т.е.

$$(L_2(\mathbb{Q}_p), W(z_p), U(t_p)), \quad (4.2)$$

$$(L_2(\mathbb{A}), W(z), U(t)), \quad (4.3)$$

соответственно. Таким образом, для нахождения адельных собственных состояний и их эволюции для ГОЗВЧ, заданной с помощью пропагатора $U(t'', t')$, необходимо решить уравнение

$$U(t'', t') \Psi_S^{(\alpha)}(x', t') = \chi[\alpha(\gamma'' - \gamma')] \Psi_S^{(\alpha)}(x', t'), \quad (4.4)$$

где $\alpha = (\alpha_\infty, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots)$ – адельный аналог энергии,

$$\chi(u) = \prod_v \chi_v(u_v) = \exp(-2\pi i u_\infty) \prod_p \exp(2\pi i \{u_p\}_p)$$

и

$$\Psi_S^{(\alpha)}(x, t) = \Psi_\infty^{(\alpha_\infty)}(x_\infty, t_\infty) \prod_{p \in S} \Psi_p^{(\alpha_p)}(x_p, t_p) \prod_{p \notin S} \Omega(|x_p|_p). \quad (4.5)$$

Эволюционный оператор $U(t'', t') = \prod_v U_v(t''_v, t'_v)$ действует покомпонентно следующим образом:

$$[U_v \Psi_v](x''_v, t''_v) = \int_{\mathbb{Q}_v} \mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) \Psi_v(x'_v, t'_v) dx'_v. \quad (4.6)$$

Ядро $\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)$ определено фейнмановским интегралом по траекториям

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) &= \int \chi_v \left(-\frac{1}{h} S[x] \right) \mathcal{D}x = \\ &= \int \chi_v \left(-\frac{1}{h} \int_{t'_v}^{t''_v} L(x_v, \dot{x}_v, t_v) dt_v \right) \prod_{t_v} dx(t_v), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где h – постоянная Планка. Ядро $\mathcal{K}$, называемое также квантово-механическим пропагатором, играет центральную роль не только в обычной, но и в p -адической и адельной механиках.

p -Адиический фейнмановский интеграл по траекториям для классического действия, квадратичного по x'' и x' , вычислен в работе [15] и имеет ту же форму, что и его вещественный аналог. А именно, если действие $\bar{S}(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)$ квадратично по x''_v и x'_v , то

$$\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) = \lambda_v \left(-\frac{1}{2h} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''_v \partial x'_v} \right) \left| \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x''_v \partial x'_v} \right|_v^{1/2} \chi_v \left(-\frac{1}{h} \bar{S}(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) \right), \quad (4.8)$$

где $\lambda_\infty(\alpha) = (1 - i \operatorname{sign} \alpha)/\sqrt{2}$, $\lambda_\infty(0) = 1$ и выполняются свойства (2.5).

Применяя формулу (4.8) к ГОЗВЧ и используя (3.10), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v) = & \lambda_v \left(\frac{m}{2h} \frac{\sqrt{\dot{\gamma}'' \dot{\gamma}'}}{\sin(\gamma'' - \gamma')} \right) \left| \frac{m}{h} \frac{\sqrt{\dot{\gamma}'' \dot{\gamma}'}}{\sin(\gamma'' - \gamma')} \right|_v^{1/2} \times \\ & \times \chi_v \left\{ -\frac{m}{2h} \left[\left(\frac{\dot{\gamma}''}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} + \frac{\dot{G}''}{G''} \right) x''^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\sqrt{\dot{\gamma}'' \dot{\gamma}'}}{\sin(\gamma'' - \gamma')} x'' x' + \left(\frac{\dot{\gamma}'}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} - \frac{\dot{G}'}{G'} \right) x'^2 \right] \right\}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

что содержит ранее полученный результат в вещественном случае (см., например, [14]). Можно явно показать, что пропагатор (4.9) удовлетворяет всем обычным свойствам вероятностной амплитуды квантовой частицы для прохождения из пространственно-временной точки (x'_v, t'_v) в пространственно-временную точку (x''_v, t''_v) .

Соответствующий адельный пропагатор имеет вид

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \prod_v \mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v), \quad (4.10)$$

где $\mathcal{K}_v(x''_v, t''_v; x'_v, t'_v)$ дается формулой (4.9). Произведение в (4.10) расходится, но его можно рассматривать как адельный функционал на пространстве пробных функций, являющихся обычными функциями Шварца–Брюа (см. также [16]).

В p -адической квантовой механике важную роль играет собственное состояние $\Omega(|x_p|_p)$ (2.6), которое инвариантно относительно $U_p(t''_p, t'_p)$ -преобразований и может рассматриваться как p -адическое вакуумное состояние, т.к. у него $\{\alpha_p(\gamma''_p - \gamma'_p)\}_p = 0$. В силу (4.5) существование функции $\Omega(|x_p|_p)$ для всех p , кроме конечного числа, является необходимым условием для объединения обычной и p -адической квантовых механик в адельных формах. Это Ω -состояние существует тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\int_{|x'_p|_p \leq 1} \mathcal{K}_p(x''_p, t''_p; x'_p, t'_p) dx'_p = \Omega(|x''_p|_p). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.9) с $v = p$ в (4.11) и используя интеграл (2.4) для $\nu = 0$, мы можем вывести некоторые условия на величины $G(t_p)$, $\gamma(t_p)$ и m , которые обеспечивают существование Ω -состояния. Например, если $\gamma(t_p) = \gamma_0 + \gamma_1 t_p + \gamma_2 t_p^2 + \dots + \gamma_n t_p^n + \dots$ и

$$\left| \frac{\dot{G}'}{G'} \right|_p < \left| \frac{\dot{\gamma}'}{\operatorname{tg}(\gamma'' - \gamma')} \right|_p > \left| \frac{h}{2m} \right|_p,$$

то $\Omega(|x_p|_p)$ существует для всех $p \neq 2$. Полезно заметить, что не всякий ГОЗВЧ имеет Ω -состояние и может быть обобщен до адельного.

В качестве простейшей иллюстрации к перечисленным утверждениям можно взять частоту $\omega(t) = \omega_0$ и вывести ранее полученный результат [9].

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В соответствии с (4.5) адельная волновая функция $\Psi(x, t)$ дает больше информации о физической системе, чем ее стандартная часть $\Psi_\infty(x_\infty, t_\infty)$. Мы хотим особо отметить дискретность пространства и наличие p -адической фазы, что обусловлено и в основном следует из адельного квантового формализма.

Например, адельное состояние

$$\Psi(x, t) = \Psi_\infty(x_\infty, t_\infty) \prod_p \Omega(|x_p|_p)$$

показывает дискретную структуру пространства на длине $l_0 = (hm^{-1}\omega^{-1})^{1/2}$. Действительно, в соответствии с обычной интерпретацией волновой функции следует рассматривать $|\Psi(x, t)|_\infty^2$ в рациональных точках x и t . В нашем адельном случае мы получаем

$$|\Psi(x, t)|_\infty^2 = |\Psi_\infty(x, t)|_\infty^2 \prod_p \Omega(|x|_p) \begin{cases} |\Psi_\infty(x, t)|_\infty^2 & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие свойства Ω -функции:

$$\Omega^2(|x|_p) = \Omega(|x|_p), \quad \prod_p \Omega(|x|_p) = 1,$$

если $x \in \mathbb{Z}$, и

$$\prod_p \Omega(|x|_p) = 0,$$

если $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Таким образом, это означает, что координата x может иметь только дискретные значения: $x/l_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для проверки этой дискретности пространства экспериментально нужно исследовать физическую систему в ее вакуумном состоянии и на расстояниях порядка длины l_0 . Когда система находится в смешанном состоянии

$$\Psi(x, t) = \sum_{S, \alpha} C(S, \alpha) \Psi_S^{(\alpha)}(x, t),$$

дискретная структура не проявляется и пространство обнаруживает обычные непрерывные свойства. Таким образом, дискретность пространства есть квантовый эффект, который зависит от адельного квантового состояния.

Адельные волновые функции дают возможность исследования новых фаз, которые могут быть названы p -адическими. Действительно, выражение (4.5) содержит функции

$$\Psi_p(x_p, t_p) = \chi_p[\alpha_p(\gamma(t_p) - \gamma^0)] \Psi_p(x_p, 0),$$

где $\chi_p[\alpha_p(\gamma(t_p) - \gamma^0)]$ можно интерпретировать как p -адическую динамическую фазу. Подобную фазу можно наблюдать, исследуя тонкую структуру процесса интерференции.

На реальных расстояниях, очень больших по сравнению с l_0 , p -адические эффекты пропадают и адельная квантовая механика сводится к обычной. В этом случае мы

должны проинтегрировать $|\Psi(x, t)|^2$ по p -адическим компонентам адельного пространства. Так как

$$\int_{|x_p|_p \leq 1} dx = 1, \quad \int_{\mathbb{Q}_p} |\Psi_p(x_p, t_p)|_\infty^2 dx_p = 1,$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}(S) \setminus \mathbb{R}} |\Psi_S(x, t)|_\infty^2 dx &= |\Psi_\infty(x_\infty, t_\infty)|_\infty^2 dx_\infty \prod_{p \in S} \int_{\mathbb{Q}_p} |\Psi_p(x_p, t_p)|_\infty^2 dx_p \times \\ &\times \prod_{p \notin S} \int_{\mathbb{Z}_p} \Omega(|x_p|_p) dx_p = |\Psi_\infty(x_\infty, t_\infty)|_\infty^2 dx_\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, обычная квантовая теория может рассматриваться как эффективная аппроксимация более тонкой адельной квантовой теории.

Благодарности. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 990100166) и грантом ведущих научных школ. Мы хотели бы поблагодарить наших коллег из Отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова в Москве за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] *W. H. Schikhof.* Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [2] *L. Brekke, P. G. O. Freund.* Phys. Rep. 1993. V. 233. P. 1.
- [3] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов.* p -Адический анализ и математическая физика. М.: Физ.-мат. лит., Наука, 1994.
- [4] *A. Khrennikov.* p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
- [5] *A. Khrennikov.* Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
- [6] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятацкий-Шаниро.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966; *A. Weil.* Adeles and Algebraic Groups. Boston: Birkhäuser, 1982.
- [7] *V. S. Vladimirov, I. V. Volovich.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659.
- [8] *Ph. Ruelle, E. Thiran, D. Verstegen, J. Weyers.* J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2854.
- [9] *Б. Драгович.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 349; *B. Dragovich.* Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2349.
- [10] *B. Dragovich.* Adelic Wave Function of the Universe. In: Proc. Third Friedmann Intern. Seminar on Gravitation and Cosmology. Eds. Yu. N. Gnedin, A. A. Grib, and V. M. Mostepanenko. St. Petersburg: Friedmann Lab. Publ., 1995. P. 311.
- [11] *G. S. Djordjević, B. Dragovich, Lj. Nešić.* Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 317.
- [12] *A. D. Jannussis, B. S. Bartzis.* Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 263; *R. J. Glauber.* Quantum theory of particle trapping by oscillating fields. In: Quantum Measurements in Optics. Eds. P. Tombesi and D. F. Walls. N. Y.: Plenum Press, 1992. P. 3; *V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1993. V. 175. P. 1.
- [13] *J. J. Halliwell, S. W. Hawking.* Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 1777.
- [14] *D. C. Khandekar, S. V. Lawande.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 384; *C. P. Natividade.* Am. J. Phys. 1988. V. 56. P. 921; *C. Farina, A. J. Segui-Santonja.* Phys. Lett. A. 1993. V. 184. P. 23.
- [15] *G. S. Djordjević, B. Dragovich.* Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 1455.
- [16] *B. Dragovich.* Integral Transforms and Special Functions. 1998. V. 6. P. 197.

Поступила в редакцию 24.IX.1999 г.,
после доработки 20.I.2000 г.