Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Эйлер, Н. Эйлер, С. Лундберг, Об обратимых преобразованиях Беклунда для автономных эволюционных уравнений, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 418–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:58:07

© 2009 г.

М. Эйлер*, Н. Эйлер*, С. Лундберг*

ОБ ОБРАТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Обсуждается построение обратимых преобразований Беклунда для эволюционных уравнений с применением интегрирующих множителей нулевого и старших порядков и соответствующих им законов сохранения. В качестве примера рассматриваются уравнение Гарри Дима и уравнение Шварциана–КдФ.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное уравнение, преобразование Беклунда, закон сохранения, интегрируемое эволюционное уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как указано в недавней работе Роджерса и Шифа [1], обратимое преобразование Беклунда было предложено еще в статье Хаара [2]. Современный подход к обратимому преобразованию Беклунда и некоторым его приложениям можно найти в работе [3]. В настоящей работе выводятся обратимые преобразования Беклунда для эволюционных уравнений с использованием интегрирующих множителей и соответствующие им законы сохранения. Интегрирующие множители старших порядков приводят к законам сохранения старших порядков для уравнений. Показано, что эти законы сохранения можно использовать для задания обратимых преобразований Беклунда с интересными уравнениями, получающимися в качестве образа.

При построении интегрирующих множителей и законов сохранения мы следуем работам [4]–[8], применяя обозначения из работ [9], [10] (относительно симметричных интегрируемых уравнений эволюции см. статьи [11], [12] и ссылки в этих работах). Показано, какое влияние оказывают различные интегрирующие множители старшего порядка при применении их к эволюционным уравнениям в рамках обратимого преобразования Беклунда. В деталях обсуждаются два примера эволюционных уравнений третьего порядка: уравнение Гарри Дима и уравнение Шварциана–КдФ.

*Department of Mathematics, Luleå University of Technology, SE-971 87 Luleå, Sweden.
E-mail: Norbert.Euler@sm.luth.se

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим автономное эволюционное уравнение общего вида

$$E := u_t - F(x, u, u_x, u_{xx}, u_{3x}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

и предположим, что оно имеет закон сохранения

$$D_t \Phi^t(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) + D_x \Phi^x(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (2.2)$$

где Φ^t – ток и Φ^x – поток. Следуя работе [10], имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Λ – присоединенная симметрия уравнения (2.1), которая проявляет себя в виде интегрирующего множителя для (2.1), т.е. Λ удовлетворяет условию

$$L_E^*[u]\Lambda|_{E=0} = 0, \quad (2.3)$$

так что

$$\widehat{E}(\Lambda E) = 0, \quad (2.4)$$

где через $\widehat{E}$ обозначен оператор Эйлера,

$$\widehat{E}[u] := \frac{\partial}{\partial u} - D_x \circ \frac{\partial}{\partial u_x} - D_t \circ \frac{\partial}{\partial u_t} + D_x^2 \circ \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - D_x^3 \circ \frac{\partial}{\partial u_{3x}} + \dots, \quad (2.5)$$

и $L_E^*[u]$ – оператор, сопряженный к линейному оператору $L_E[u]$. Другими словами,

$$L_E[u] := \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial u_t} D_t + \frac{\partial E}{\partial u_x} D_x + \frac{\partial E}{\partial u_{xx}} D_x^2 + \dots + \frac{\partial E}{\partial u_{nx}} D_x^n, \quad (2.6)$$

$$L_E^*[u] := \frac{\partial E}{\partial u} - D_x \circ \frac{\partial E}{\partial u_x} - D_t \circ \frac{\partial E}{\partial u_t} + D_x^2 \circ \frac{\partial E}{\partial u_{xx}} + \dots + (-1)^n D_x^n \circ \frac{\partial E}{\partial u_{nx}}. \quad (2.7)$$

Тогда соответствующий закон сохранения имеет вид

$$D_t \Phi^t + D_x \Phi^x = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\Lambda = \widehat{E}[u]\Phi^t(x, u, u_x, u_{xx}, \dots). \quad (2.9)$$

Рассмотрим два автономных эволюционных уравнения порядка $n \geq 2$ относительно соответствующих функций $u(x, t)$ и $v(y, \tau)$:

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{nx}), \quad (2.10a)$$

$$v_\tau = G(y, v, v_y, v_{yy}, \dots, v_{ny}). \quad (2.10б)$$

Следуя работе [13], определим обратимое преобразование Беклунда R следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим замену переменных при преобразовании R : $(u, x, t) \mapsto (v, y, \tau)$, заданную следующим образом:

$$\begin{aligned} dy(x, t) &= \Phi^t(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx - \Phi^x(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dt, \\ R: \quad d\tau(x, t) &= dt, \\ v(y, \tau) &= g(x, u, u_x, \dots), \end{aligned} \quad (2.11)$$

с законом сохранения для (2.10a) вида (2.2). Преобразование R называется *обратимым преобразованием Беклунда*, если найдется второе преобразование $S: (v, y, \tau) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{\tau})$ вида

$$\begin{aligned} d\tilde{x}(y, \tau) &= \Psi^\tau(y, v, v_y, v_{yy}, \dots) dy - \Psi^y(y, v, v_y, v_{yy}, \dots) d\tau, \\ S: \quad d\tilde{\tau}(y, \tau) &= d\tau, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) &= h(y, v, v_y, \dots) \end{aligned} \quad (2.12)$$

с законом сохранения для уравнения (2.10б)

$$D_\tau \Psi^\tau(y, v, v_y, v_{yy}, \dots) + D_y \Psi^y(y, v, v_y, v_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.13)$$

такое, что

$$S \circ R = R \circ S = I, \quad (2.14)$$

где I – тождественное преобразование.

Следующее предложение напрямую следует из определения 1 и может быть применено для задания g из (2.11) таким образом, чтобы преобразование R оказалось обратимым преобразованием Беклунда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Уравнение (2.10a) тогда и только тогда допускает обратимое преобразование Беклунда R (2.11) с преобразованием S (2.12), которое связывает уравнения (2.10a) и (2.10б), когда

$$\Psi^\tau \Phi^t \Big|_{u \rightarrow v} = 1, \quad (2.15a)$$

$$\Psi^y + \Psi^\tau \Phi^x \Big|_{u \rightarrow v} = 0, \quad (2.15б)$$

где функция h в (2.12) определена так, чтобы выполнялось соотношение (2.14).

Заметим, что так называемое x -обобщенное преобразование годографа, введенное в работах [14], [15], одновременно оказывается обратимым преобразованием Беклунда в соответствии с определением 1. Примеры приведены в следующем разделе.

3. ПРИМЕРЫ

В этом разделе описано в деталях, как определение 1 и предложения 1, 2 применяются к двум явным эволюционным уравнениям третьего порядка, а именно к уравнению Гарри Дима и к уравнению Шварцiana–КдФ. С помощью обратимого преобразования Беклунда эти уравнения могут быть приведены к не зависящим от x

автономным эволюционным уравнениям. Это означает, что необходимо определить функцию g в обратимом преобразовании Беклунда R (2.11) так, чтобы получившееся при этом уравнение не зависело явно от x . Это налагает серьезные ограничения на вид функции g . Заметим также, что различные способы выбора функции g приводят к различным результирующим уравнениям для одних и тех же сохраняющихся величин Φ^t и Φ^x (см., например, ниже случаи 1.1 и 1.2 для уравнения Гарри Дима).

3.1. Уравнение Гарри Дима. Рассмотрим уравнение Гарри Дима в следующем виде:

$$u_t = u^3 u_{3x}. \quad (3.1)$$

В силу предложения 1 полный класс автономных (не зависящих от времени) присоединенных симметрий вплоть до второго порядка, которые также действуют как интегрирующие множители для уравнения (3.1), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \alpha u^{-3}, & \Lambda_2 &= \alpha u^{-3}, & \Lambda_3 &= \alpha x u^{-3}, \\ \Lambda_4 &= \alpha x^2 u^{-3}, & \Lambda_5 &= \alpha \left(u^{-1} u_{xx} - \frac{1}{2} u^{-2} u_x^2 \right). \end{aligned}$$

Здесь α – произвольная константа, которая выбирается ниже подходящим образом. Применим эти интегрирующие множители, чтобы показать, как с помощью предложений 1, 2 могут быть определены различные обратимые преобразования Беклунда, и свяжем таким образом класс эволюционных уравнений с уравнением Гарри Дима (3.1).

СЛУЧАЙ 1. Рассмотрим $\Lambda_1 = -u^{-2}$. Соответствующий не зависящий от x ток нулевого порядка Φ^t и его поток Φ^x для уравнения (3.1) имеют вид

$$\Phi^t(u) = u^{-1}, \quad \Phi^x(u, u_x, u_{xx}) = uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2. \quad (3.2)$$

СЛУЧАЙ 1.1. Пусть $g = x$; это означает, что преобразование R (2.11) представляет собой пример x -обобщенного преобразования годографа, а именно

$$\begin{aligned} R: \quad dy(x, t) &= u^{-1} dx - \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) dt, \\ d\tau(x, t) &= dt, \\ v(y, \tau) &= x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Применяя преобразование R к (3.1), получим уравнение Шварциана–КдФ

$$v_\tau = v_{3y} - \frac{3}{2} v_y^{-1} v_{yy}^2. \quad (3.4)$$

Из предложения 2 следует, что (3.3) представляет собой обратимое преобразование Беклунда с преобразованием S вида

$$\begin{aligned} S: \quad d\tilde{x}(y, \tau) &= v_y dy - \left(-v_{3y} + \frac{3}{2} v_y^{-1} v_{yy}^2 \right) dt, \\ d\tilde{\tau}(y, \tau) &= d\tau, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) &= v_y, \end{aligned} \quad (3.5)$$

таким образом, соответствующие сохраняющиеся ток и поток для (3.4) в данном случае тривиальны, т.е. из тривиального закона сохранения с интегрирующим множителем $\Lambda = 0$ следует, что

$$\Psi^{\tau}(v, v_y) = v_y, \quad \Psi^y(v, v_y, v_{yy}, v_{zy}) = -v_{zy} + \frac{3}{2} v_y^{-1} v_{yy}^2 \equiv -v_{\tau}. \quad (3.6)$$

СЛУЧАЙ 1.2. Пусть $g = u$ с выражениями (3.2) для тока и потока. Уравнение (3.1) при этом приводит к

$$v_{\tau} = v_{zy} + \frac{3}{2} v^{-2} v_y^3 - 3v^{-1} v_y v_{yy}. \quad (3.7)$$

Отметим, что это уравнение представляет собой специальный случай полулинейных эволюционных уравнений, которые допускают рекурсионный интегро-дифференциальный оператор, изученный в работе [16].

СЛУЧАЙ 1.3. Пусть $g = \ln(\alpha u)/\alpha$ с теми же током и потоком (3.2). Уравнение (3.1) при этом приводит к уравнению КдФ с модифицированным потенциалом:

$$v_{\tau} = v_{zy} + \lambda \alpha v_y^3, \quad \alpha^2 = -2\lambda. \quad (3.8)$$

СЛУЧАЙ 2. Рассмотрим $\Lambda_2 = -2u^{-3}$. Соответствующий не зависящий от x ток нулевого порядка Φ^t и поток Φ^x для уравнения (3.1) имеют вид

$$\Phi^t(u) = u^{-2}, \quad \Phi^x(u, u_x, u_{xx}) = 2u_{xx}. \quad (3.9)$$

СЛУЧАЙ 2.1. Пусть $g = x$ с данными током и потоком (3.9). Преобразование R принимает вид x -обобщенного преобразования годографа, а уравнение (3.1) при этом переходит в уравнение Кавальканте–Тененблата:

$$v_{\tau} = v_y^{-3/2} v_{zy} - \frac{3}{2} v_y^{-5/2} v_{yy}^2. \quad (3.10)$$

СЛУЧАЙ 2.2. Пусть $g = u^{-1}$ с током и потоком (3.9). Преобразование R при этом оказывается обратимым автопреобразованием Беклунда, так как при нем уравнение Гарри Дима переходит само в себя, т.е. в уравнение

$$v_{\tau} = v^3 v_{zy}. \quad (3.11)$$

Это обратимое преобразование Беклунда было приведено в работе [17].

СЛУЧАЙ 3. Рассмотрим $\Lambda_3 = xu^{-3}$. Соответствующие ток нулевого порядка Φ^t и поток Φ^x для (3.1) имеют вид

$$\Phi^t(x, u) = -\frac{1}{2} xu^{-2}, \quad \Phi^x(x, u, u_x, u_{xx}) = -xu_{xx} + u_x. \quad (3.12)$$

Пусть $g = x$ с такими током и потоком. Получившееся обратимое преобразование Беклунда R относится к классу x -обобщенных преобразований годографа. Оно переводит уравнение Гарри Дима (3.1) в уравнение

$$v_{\tau} = v^{3/2} v_y^{-3/2} v_{zy} + \frac{3}{2} v^{-1/2} v_y^{3/2} + \frac{3}{2} v^{3/2} v_y^{-5/2} v_{yy}^2. \quad (3.13)$$

СЛУЧАЙ 4. Рассмотрим $\Lambda_4 = -2x^2u^{-3}$. Соответствующие ток нулевого порядка Φ^t и поток Φ^x для (3.1) имеют вид

$$\Phi^t(x, u) = x^2u^{-2}, \quad \Phi^x(x, u, u_x, u_{xx}) = -2x^2u_{xx} + 4xu_x - 4u. \quad (3.14)$$

Пусть $g = x$ с указанными током и потоком. Получившееся обратимое преобразование Беклунда R относится к классу x -обобщенных преобразований годографа. Оно переводит уравнение Гарри Дима (3.1) в уравнение

$$v_\tau = v^3v_y^{-3/2}v_{zy} - \frac{3}{2}v^3v_y^{-5/2}v_{yy}^2. \quad (3.15)$$

СЛУЧАЙ 5. Рассмотрим интегрирующий множитель

$$\Lambda_5 = -2\left(u^{-1}u_{xx} - \frac{1}{2}u^{-2}u_x^2\right). \quad (3.16)$$

СЛУЧАЙ 5.1. Отвечающий интегрирующему множителю (3.16) не зависящий от x ток первого порядка Φ^t и поток Φ^x для (3.1) имеют вид

$$\Phi^t(u, u_x) = u^{-1}u_x^2, \quad (3.17a)$$

$$\Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) = -2\left(u^2u_xu_{3x} + \frac{1}{2}uu_x^2u_{xx} - \frac{1}{8}u_x^4 - \frac{1}{2}u^2u_{xx}^2\right). \quad (3.17b)$$

Пусть $g(u) = u$ с данными током и потоком. Обратное преобразование Беклунда R переводит уравнение Гарри Дима (3.1) в уравнение

$$v_\tau = v^6v_y^{-6}v_{zy} - 3v^6v_y^{-7}v_{yy}^2 + 3v^5v_y^{-5}v_{yy} - \frac{3}{4}v^4v_y^{-3}. \quad (3.18)$$

СЛУЧАЙ 5.2. Отвечающий интегрирующему множителю (3.16) не зависящий от x ток второго порядка Φ^t и поток Φ^x для (3.1) имеют вид

$$\Phi^t(u, u_x) = -(\ln u)u_{xx}, \quad (3.19a)$$

$$\Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) = \ln u (3u^2u_xu_{3x} + u^3u_{4x}) + u^2u_{xx}^2 - uu_x^2u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^4 - u^2u_xu_{3x}. \quad (3.19b)$$

Пусть $g(u) = u_x$ с этими током и потоком. Обратное преобразование Беклунда R при этом переводит уравнение Гарри Дима (3.1) в уравнение

$$v_\tau = v^3v_y^6v_{yy}^{-3}v_{zy} - 3v^3v_y^5v_{yy}^{-1} + \frac{1}{4}v^4v_y. \quad (3.20)$$

3.2. Уравнение Шварциана–КдФ. Рассмотрим уравнение Шварциана–КдФ в следующем виде:

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_x^{-1}u_{xx}^2. \quad (3.21)$$

Полный класс не зависящих от x и автономных присоединенных симметрий до порядка два включительно, которые также действуют как интегрирующие множители для уравнения (3.21), имеет вид

$$\Lambda_1 = \alpha(u^2 u_x^{-3} u_{xx} - 2uu_x^{-1}), \quad (3.22a)$$

$$\Lambda_2 = \alpha(uu_x^{-3} u_{xx} - u_x^{-1}), \quad (3.22б)$$

$$\Lambda_3 = \alpha u_x^{-3} u_{xx} \quad (3.22в)$$

с произвольной константой α . Для того чтобы вычислить токи Φ^t уравнения (3.21), рассмотрим два случая, а именно

$$\Phi^t = \Phi^t(u, u_x), \quad (3.23a)$$

$$\Phi^t = \Phi^t(u, u_x, u_{xx}). \quad (3.23б)$$

Ниже приводится список явных форм для Φ^t , Φ^x и g в обратимом преобразовании Беклунда R вместе с получающимися при этом отображениями уравнениями.

СЛУЧАЙ 1. Рассмотрим интегрирующий множитель Λ_1 из (3.22a). Если справедливо предположение (3.23a) с $\alpha = -2/3$, то мы получим

$$\begin{aligned} \Phi^t(u, u_x) &= \frac{1}{3} u^2 u_x^{-1}, \\ \Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) &= \frac{1}{3} u^2 u_x^{-2} u_{3x} - \frac{1}{6} u^2 u_x^{-3} u_{xx}^2 - \frac{4}{3} uu_x^{-1} u_{xx} + \frac{4}{3} u_x. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Беклунда R (2.11) с $g(u) = u^3$ переводит (3.21) в уравнение

$$v_\tau = v^2 v_y^{-3/2} v_{3y} - \frac{3}{2} v^2 v_y^{-5/2} v_{yy}^2 + \frac{4}{9} v_y^{3/2}. \quad (3.24)$$

Если справедливо предположение (3.23б) с $\alpha = -2/9$, то получим

$$\begin{aligned} \Phi^t(u, u_x, u_{xx}) &= \frac{2}{27} u^3 u_x^{-3} u_{xx}, \\ \Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) &= -\frac{2}{27} u^3 u_x^{-3} u_{4x} + \frac{2}{9} u^3 u_x^{-4} u_{xx} u_{3x} + \\ &+ \frac{2}{9} u^2 u_x^{-2} u_{3x} - \frac{2}{9} u^2 u_x^{-3} u_{xx}^2 - \frac{1}{9} u^3 u_x^{-5} u_{xx}^3 - \frac{4}{9} uu_x^{-1} u_{xx} + \frac{4}{9} u_x. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Беклунда R (2.11) с $g(u, u_x) = u_x^{-2}$ переводит (3.21) в уравнение

$$v_\tau = v^{-3/2} v_y^4 v_{yy}^{-3} v_{3y} + \frac{3}{2} v^{-5/2} v_y^5 v_{yy}^{-2} - 3v^{-3/2} v_y^3 v_{yy}^{-1} + \frac{4}{9} v^{-1/2} v_y. \quad (3.25)$$

СЛУЧАЙ 2. Рассмотрим интегрирующий множитель Λ_2 , задаваемый формулой (3.22б). Если справедливо предположение (3.23a) с $\alpha = -2$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi^t(u, u_x) &= uu_x^{-1}, \\ \Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) &= uu_x^{-2} u_{3x} - \frac{1}{2} uu_x^{-3} u_{xx}^2 - 2u_x^{-1} u_{xx}. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Беклунда R (2.11) с $g(u) = u$ переводит (3.21) в уравнение

$$v_\tau = v^{3/2}v_y^{-3/2}v_{3y} - \frac{3}{2}v^{3/2}v_y^{-5/2}v_{yy}^2 - \frac{3}{2}v^{-1/2}v_y^{3/2}. \quad (3.26)$$

Если справедливо предположение (3.23б) с $\alpha = 1$, то мы получим

$$\begin{aligned} \Phi^t(u, u_x, u_{xx}) &= -\frac{1}{2}u^2u_x^{-3}u_{xx}, \\ \Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) &= \frac{1}{2}u^2u_x^{-3}u_{4x} - \frac{3}{2}u^2u_x^{-4}u_{xx}u_{3x} - uu_x^{-2}u_{3x} + uu_x^{-3}u_{xx}^2 + \\ &\quad + \frac{3}{4}u^2u_x^{-5}u_{xx}^3 + u_x^{-1}u_{xx}. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Беклунда R (2.11) с $g(u, u_x) = u_x^{-2}$ переводит (3.21) в уравнение

$$v_\tau = v^{-3/2}v_y^{9/2}v_{yy}^{-3}v_{3y} + \frac{3}{2}v^{-5/2}v_y^{11/2}v_{yy}^{-2} - 3v^{-3/2}v_y^{7/2}v_{yy}^{-1}. \quad (3.27)$$

СЛУЧАЙ 3. Рассмотрим интегрирующий множитель Λ_3 , задаваемый формулой (3.22в). Если справедливо предположение (3.23а) с $\alpha = -2$, то

$$\begin{aligned} \Phi^t(u, u_x) &= u_x^{-1}, \\ \Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) &= u_x^{-2}u_{3x} - \frac{1}{2}u_x^{-3}u_{xx}^2. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Беклунда R (2.11) с $g(u) = u$ переводит (3.21) в уравнение

$$v_\tau = v_y^{-3/2}v_{3y} - \frac{3}{2}v_y^{-5/2}v_{yy}^2. \quad (3.28)$$

Если справедливо предположение (3.23б) с $\alpha = -2$, то

$$\begin{aligned} \Phi^t(u, u_x, u_{xx}) &= 2uu_x^{-3}u_{xx}, \\ \Phi^x(u, u_x, u_{xx}, u_{3x}) &= -2uu_x^{-3}u_{4x} + 6uu_x^{-4}u_{xx}u_{3x} + 2u_x^{-2}u_{3x} - 3uu_x^{-5}u_{xx}^3 - 2u_x^{-3}u_{xx}^2. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Беклунда R (2.11) с $g(u, u_x) = u_x^{-2}$ переводит (3.21) в уравнение

$$v_\tau = v^{-3/2}v_y^6v_{yy}^{-3}v_{3y} + \frac{3}{2}v^{-5/2}v_y^7v_{yy}^{-2} - 3v^{-3/2}v_y^5v_{yy}^{-1}. \quad (3.29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что уравнение (3.28) также следует и из уравнения Гарри Дима (3.1) при x -обобщенном преобразовании годографа (см. (3.21)).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, как можно систематически использовать предложения 1 и 2 при построении обратимых преобразований Беклунда, задаваемых определением 1, для уравнений Гарри Дима и Шварциана–КдФ. Эти преобразования также включают в себя так называемое x -обобщенное преобразование годографа. Очевидно, что можно применить эту же процедуру к эволюционным уравнениям или к системам эволюционных уравнений, которые допускают интегрирующие множители, не зависящие

от времени. Нужно тем не менее указать, что выбор функции g в R (2.11) должен быть таким, чтобы для преобразования S существовала функция h , задаваемая в (2.13). Такой выбор обеспечивается предложением 2. Это не всегда возможно, если уравнения и системы уравнений имеют интегрирующие множители и законы сохранения только старших порядков. Расширенная классификация с применением этого подхода будет опубликована в отдельной работе.

Понятно, что если мы преобразуем симметрично-интегрируемое эволюционное уравнение или систему эволюционных уравнений [11], применяя обратимое преобразование Беклунда, то получаемое эволюционное уравнение или система уравнений будет также обладать симметричной интегрируемостью, т.е. допускать бесконечный набор высших законов сохранения и бесконечное число локальных симметрий Ли–Беклунда. Поскольку как уравнение Гарри Дима (3.1), так и уравнение Шварцiana–КдФ (3.21) представляют собой симметрично-интегрируемые уравнения, все уравнения, полученные выше, также оказываются симметрично интегрируемыми эволюционными уравнениями. Тем не менее они не новы, поскольку полная классификация интегрируемых уравнений такого типа была приведена в работе [18]. Заметим, что в некоторых случаях необходимо произвести локальное преобразование для того, чтобы привести уравнения, рассмотренные в настоящей работе, к уравнению из работы [18]. В частности, полулинейное уравнение вида

$$u_t = u_{xxx} + a(x, u, u_x)u_{xx} + b(x, u, u_x)$$

приводится с помощью точечного преобразования к полулинейному уравнению $u_t = u_{xxx} + f(x, u, u_x)$.

Отметим, что обобщения симметрично-интегрируемых эволюционных уравнений третьего порядка типа Шварцiana–КдФ (3.21) изучались недавно в связи с проблемой существования операторов рекурсии [19]; такие уравнения также включают в себя уравнения типа Кричевера–Новикова [20].

Благодарности. М. Эйлер и Н. Эйлер благодарны Swedish Research Council за оплату дорожных расходов, М. Эйлер благодарит Luleå University of Technology (грант № 2557-05) за финансовую поддержку, а С. Лундберг благодарит Royal Academy of Sciences (грант № FOA08V-032) за оплату дорожных расходов и Department of Mathematics at Luleå University of Technology за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] C. Rogers, W. K. Schief, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, Suppl. 1 (2005), 548–564.
- [2] A. Haar, *Math. Ann.*, **100**:1 (1928), 481–502.
- [3] C. Rogers, W. F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Math. Sci. Eng., **161**, Academic Press, New York, 1982.
- [4] A. S. Fokas, B. Fuchssteiner, *Lett. Nuovo Cimento* (2), **28**:8 (1980), 299–303.
- [5] A. M. Vinogradov, *J. Math. Anal. Appl.*, **100**:1 (1984), 1–40.
- [6] A. M. Vinogradov, *J. Math. Anal. Appl.*, **100**:1 (1984), 41–129.
- [7] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **68**:2 (1986), 163–171.
- [8] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Ser. Sov. East European Math., **9**, World Sci., Singapore, 1992.

- [9] S. C. Anco, G. Bluman, *European J. Appl. Math.*, **13**:5 (2002), 545–566.
- [10] S. C. Anco, G. Bluman, *European J. Appl. Math.*, **13**:5 (2002), 567–585.
- [11] A. S. Fokas, *Stud. Appl. Math.*, **77**:3 (1987), 253–299.
- [12] V. V. Sokolov, A. B. Shabat, “Classification of integrable evolution equations”, *Mathematical Physics Reviews*, Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev., **4**, ed. S. P. Novikov, Harwood Academic, Chur, 1984, 221–280.
- [13] J. G. Kingston, C. Rogers, *Phys. Lett. A*, **92**:6 (1982), 261–264.
- [14] N. Euler, M. Euler, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:3 (2001), 342–362.
- [15] M. Euler, N. Euler, N. Petersson, *Stud. Appl. Math.*, **111**:3 (2003), 315–337.
- [16] N. Petersson, N. Euler, M. Euler, *Stud. Appl. Math.*, **112**:2 (2004), 201–225.
- [17] J. G. Kingston, C. Rogers, D. Woodwall, *J. Phys. A*, **17**:2 (1984), L35–L38.
- [18] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov, “The symmetrey approach to classification of integrable equations”, *What is Integrability?*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 115–184.
- [19] M. Euler, N. Euler, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **14**:3 (2007), 313–315.
- [20] M. Euler, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 147–151.