Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Н. А. Костов, Т. И. Валчев, Много-
компонентные нелинейные уравнения Шредингера с по-
стоянными граничными условиями, *ТМФ*, 2009, том 159,
номер 3, 438–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 09:48:04

© 2009 г. В. С. Герджиков*, Н. А. Костов*, Т. И. Вылчев*

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОСТОЯННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрены некоторые конкретные вопросы теории многокомпонентных нелинейных уравнений Шредингера с постоянными граничными условиями. Сначала изучаются спектральные свойства оператора Лакса L , структура фазового пространства $\mathcal{M}$ и конструкция фундаментальных аналитических решений. Далее рассматриваются регуляризованные соотношения Вронского, которые позволяют проанализировать отображение, связывающее потенциал в операторе L и данные рассеяния. Гамильтонова формулировка также требует процедуры регуляризации.

Ключевые слова: многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера, постоянные граничные условия, фундаментальное аналитическое решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера с постоянными граничными условиями (ПГУ) хорошо известно [1]–[4]. В настоящей работе мы обратимся к многокомпонентным нелинейным уравнениям Шредингера с ПГУ, для которых решения в виде темных солитонов [5] недавно привлекли к себе внимание в связи с возможными применениями к бозе-эйнштейновским конденсатам [6]. Мы начнем с формулировки векторного нелинейного уравнения Шредингера с ПГУ:

$$i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} - 2(\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q})\mathbf{q}(x, t) + \rho^2 \mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{q}_\pm^\dagger, \mathbf{q}(x, t))\mathbf{q}_\pm = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{q}(x, t)$ – n -компонентные векторнозначные функции, стремящиеся к постоянным векторам $\mathbf{q}_\pm$, т.е. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbf{q}(x, t) = \mathbf{q}_\pm$, $\rho^2 = (\mathbf{q}_\pm^\dagger, \mathbf{q}_\pm)$. Дополнительные линейные по $\mathbf{q}$ члены в (1.1) используются для регуляризации, которая позволяет избежать сильных колебаний вектора $\mathbf{q}(x, t)$ как функции t при $x \rightarrow \pm\infty$.

Уравнение (1.1) допускает представление Лакса $[L(\lambda), M(\lambda)] = 0$, похожее на представление Лакса в модели Манакова [7]. Оператор Лакса L имеет специальную

*Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1784, Bulgaria. E-mail: gerjikov@inrne.bas.bg, nakostov@inrne.bas.bg, valtchev@inrne.bas.bg

форму обобщенной системы Захарова–Шабата в терминах блочных матриц:

$$\begin{aligned} L\psi(x, \lambda) &\equiv i\frac{d\psi}{dx} + q(x)\psi(x, \lambda) - \lambda J\psi(x, \lambda) = 0, \\ q(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{q}^T(x, t) \\ -\mathbf{q}^*(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbf{q}(x, t) = \mathbf{q}_{\pm}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Все рассмотрения, представленные ниже, верны при любой размерности блоков; в некоторых конкретных примерах мы положим $n = 3$ для простоты. Далее, M -оператор задается как

$$\begin{aligned} M\psi &\equiv i\frac{d\psi}{dt} + (V_0(x, t) - V_{0,+} + 2\lambda q(x, t) - 2\lambda^2 J)\psi(x, t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda)C(\lambda), \\ V_0(x, t) &= [\text{ad}_J^{-1}q, q(x, t)] + 2i\text{ad}_J^{-1}q_x, \quad V_{0,\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_0(x, t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В разделе 2 мы опишем в общих чертах спектральные свойства оператора L . При этом мы используем комплексную плоскость унифицирующей переменной z [4], [5]. В разделе 3 мы в общих чертах рассмотрим конструкцию фундаментальных аналитических решений для оператора L , следуя идеям работы [8]. Эволюцию данных рассеяния мы выводим в разделе 4, а в разделе 5 анализируем регуляризованные соотношения Вронского [9]. В разделе 6 обсуждается гамильтонова структура многокомпонентных нелинейных уравнений Шредингера (см. работы [8], [10]). В заключении приведены некоторые выводы.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЛАКСА

Начнем с определения понятия допустимого потенциала $q(x)$, удовлетворяющего выписанным выше условиям и обеспечивающего регулярные решения прямой и обратной задач рассеяния для оператора L . Прежде всего, заметим, что многообразие $\mathcal{M}$ всех допустимых потенциалов нелинейно: линейная комбинация двух допустимых потенциалов, вообще говоря, не является допустимым потенциалом.

Первое важное условие, которое мы наложим на предельные значения $q_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x)$, таково: асимптотические операторы $L_{\pm, \text{as}}$,

$$\begin{aligned} L_{+, \text{as}}\psi_{\text{as}}(x, \lambda) &\equiv i\frac{d\psi_{\text{as}}}{dx} + q_+\psi_{\text{as}}(x, \lambda) - \lambda J\psi_{\text{as}}(x, \lambda) = 0, \\ L_{-, \text{as}}\phi_{\text{as}}(x, \lambda) &\equiv i\frac{d\phi_{\text{as}}}{dx} + q_-\phi_{\text{as}}(x, \lambda) - \lambda J\phi_{\text{as}}(x, \lambda) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

должны иметь один и тот же спектр. Собственные функции операторов $L_{\pm, \text{as}}$ имеют следующий явный вид:

$$\psi_{\text{as}}(x, \lambda) = w_{0,+}^{-1}(\lambda)e^{iJ(\lambda)x}w_{0,+}(\lambda), \quad \phi_{\text{as}}(x, \lambda) = w_{0,-}^{-1}(\lambda)e^{iJ(\lambda)x}w_{0,-}(\lambda), \quad (2.2)$$

где $w_{0,\pm}(\lambda)$ диагонализует асимптотические потенциалы $U_{\pm}(\lambda) = q_{\pm} - \lambda J$:

$$\begin{aligned} (q_{\pm} - \lambda J)w_{0,\pm}(\lambda) &= -w_{0,\pm}(\lambda)J(\lambda), \\ J(\lambda) &= \text{diag}(j(\lambda), -\lambda, \dots, -\lambda, -j(\lambda)), \quad j(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Спектральные свойства операторов $L_{\pm, \text{as}}$ определяются собственными значениями потенциалов $U_{\pm}(\lambda)$. Очевидно, два асимптотических потенциала будут иметь одно и то же множество собственных значений, если они связаны преобразованием подобия. Ниже мы полагаем, что существует такая блочно-диагональная матрица W_0 , что

$$q_- = W_0^{-1} q_+ W_0, \quad W_0 = \begin{pmatrix} w_{01} & 0 & 0 \\ 0 & w_{02} & 0 \\ 0 & 0 & w_{03} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.3) следует, что непрерывный спектр операторов $L_{\pm, \text{as}}$ состоит из $n - 1$ ветвей, заполняющих всю вещественную ось комплексной плоскости λ , и двух ветвей, заполняющих часть вещественной оси $|\operatorname{Re} \lambda| > \rho$.

Обобщая идеи, выдвинутые в работе [4], представим многообразие $\mathcal{M}$ как объединение непересекающихся многообразий,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{W_0, q_+} \mathcal{M}_{W_0, q_+}, \quad (2.5)$$

на каждом из которых, помимо предельного значения q_+ , фиксирован также интеграл движения W_0 . Более точно, элементы многообразия $\mathcal{M}_{W_0, q_+}$ являются матричнозначными функциями $q(x)$ вида (1.2), удовлетворяющими соотношениям (2.4). Явный вид $w_{0, \pm}$ при $n = 3$ таков:

$$w_{0, \pm} = \begin{pmatrix} \lambda - j(\lambda) & 0 & 0 & \lambda + j(\lambda) \\ q_{1, \pm}^* & -q_{3, \pm} & -q_{2, \pm} & q_{1, \pm}^* \\ q_{2, \pm}^* & 0 & q_{1, \pm} & q_{2, \pm}^* \\ q_{3, \pm}^* & q_{1, \pm} & 0 & q_{3, \pm}^* \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Нам также понадобятся унифицирующая переменная z ,

$$z = \frac{\lambda + j(\lambda)}{\rho}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\lambda - j(\lambda)}{\rho},$$

и функции $Q_{\pm}(x, z)$ такие, что

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{0, \pm}(\mathbf{q}(x) - \mathbf{q}_{\pm}) w_{0, \pm} &\equiv Q_{\pm}(x, z) = \\ &= \frac{1}{4\rho} \left(2z A_2^{\pm} + 2A_1^{\pm} - \frac{2}{z} A_{-2}^{\pm} + \frac{B_1^{\pm}}{z+1} + \frac{B_{-1}^{\pm}}{z-1} \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $B_{\pm 1}^{\pm} = A_2^{\pm} \mp A_1^{\pm} + A_0^{\pm} \mp A_{-1}^{\pm} + A_{-2}^{\pm}$ и

$$\begin{aligned} A_2^{\pm} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_1^{\pm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{-2}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{\pm} \end{pmatrix}, \quad A_1^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^{\pm} \\ 0 & 0 & 0 & a_2^{\pm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{-1}^{\pm} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3^{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ -a_2^{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0^{\pm} = \begin{pmatrix} -h_1^{\pm} & b_3^{\pm} & b_2^{\pm} & -a_1^{\pm,*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{\pm,*} & -b_3^{\pm} & -b_2^{\pm} & h_1^{\pm} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
a_1^\pm &= (\mathbf{q}^\dagger(x)\mathbf{q}_\pm) - \rho^2, & a_{2,3}^\pm &= \frac{\mathbf{q}_{2,3,\pm}^*(\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}_\pm) - \mathbf{q}_{2,3}^*(x)\rho^2}{\mathbf{q}_{1,\pm}\rho}, \\
b_{2,3}^\pm &= \mathbf{q}_1(x)\mathbf{q}_{2,3,\pm} - \mathbf{q}_{2,3}(x)\mathbf{q}_{1,\pm}, & h_1^\pm &= a_1^\pm(x) + (a_1^\pm)^*(x).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Используя униформирующую переменную z , перепишем оператор Лакса в виде

$$\begin{aligned}
i\frac{d\tilde{\psi}}{dx} + Q_+(x, z)\tilde{\psi}(x, z) + J(z)\tilde{\psi}(x, z) &= 0, \\
i\frac{d\tilde{\phi}}{dx} + Q_-(x, z)\tilde{\phi}(x, \lambda) + J(z)\tilde{\phi}(x, z) &= 0, \\
J(z) &= \frac{\rho}{2} \operatorname{diag}\left(z - \frac{1}{z}, -z - \frac{1}{z}, -z - \frac{1}{z}, -z + \frac{1}{z}\right),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где новые потенциальные функции $Q_\pm(x, z)$ имеют специальную зависимость от z , а их коэффициентные функции $A_j^\pm, B_k^\pm$ стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

Далее определим решения Йоста и матрицу рассеяния с помощью следующих формул:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(x, z)e^{iJ(z)x} = \mathbf{1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}(x, z)e^{iJ(z)x} = \mathbf{1}, \quad T(z) = \tilde{\psi}\tilde{\phi}(x, z) \tag{2.11}$$

(здесь и далее шляпка означает операцию обращения.)

Непрерывный спектр оператора L совпадает с непрерывным спектром асимптотических операторов $L_{\pm, \text{as}}$. Нам необходимо найти кривые на комплексной плоскости λ (на комплексной плоскости z), на которых $e^{-iJ(\lambda)x}$ ($e^{-iJ(z)x}$) осциллирует, т.е. решить уравнение (здесь $J_k(z)$ – k -й диагональный элемент матрицы $J(z)$)

$$\operatorname{Im} J_k(z) = 0, \quad k = 1, \dots, 4. \tag{2.12}$$

Униформирующая переменная заполняет вещественную ось z и окружность с радиусом ρ . Спектр разбивает комплексную плоскость z на четыре области $\mathcal{R}_k$, $k = 1, \dots, 4$ (см. рисунок):

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &\equiv \{\operatorname{Im} z < 0, \quad |z| > 1\}, & \mathcal{R}_2 &\equiv \{\operatorname{Im} z < 0, \quad |z| < 1\}, \\
\mathcal{R}_3 &\equiv \{\operatorname{Im} z > 0, \quad |z| < 1\}, & \mathcal{R}_4 &\equiv \{\operatorname{Im} z > 0, \quad |z| > 1\}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

В каждой из этих областей мнимые части функции $J_k(z)$ упорядочены следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 : \quad & \operatorname{Im} J_1(z) > \operatorname{Im} J_2(z) > 0 > \operatorname{Im} J_4(z), \\
\mathcal{R}_2 : \quad & \operatorname{Im} J_1(z) > 0 > \operatorname{Im} J_2(z) > \operatorname{Im} J_4(z), \\
\mathcal{R}_3 : \quad & \operatorname{Im} J_4(z) > \operatorname{Im} J_2(z) > 0 > \operatorname{Im} J_1(z), \\
\mathcal{R}_4 : \quad & \operatorname{Im} J_4(z) > 0 > \operatorname{Im} J_2(z) > \operatorname{Im} J_1(z).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Непрерывный спектр оператора L на комплексной z -плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Непрерывный спектр оператора L имеет переменную кратность. Конформное отображение из λ в z переводит часть вещественной оси $|\operatorname{Re} \lambda| > \rho$ в вещественную ось в z -плоскости, тогда как интервал $-\rho \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \rho$ отображается в окружность с радиусом ρ .

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ L

Построим фундаментальные аналитические решения (ФАР) в каждой из определенных выше областей $\mathcal{R}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Начнем с ФАР в области $\mathcal{R}_1$ и используем тот факт, что в этой области $\operatorname{Im} J_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, упорядочены так, как показано в первом соотношении в (2.14).

Опуская подробности, сформулируем процедуру построения ФАР в области $\mathcal{R}_1$. Поскольку любые два фундаментальных решения должны быть линейно связаны, приведем явное соотношение между ФАР и матрицей рассеяния. Естественно ожидать, что при этом понадобятся соответствующие обобщенные разложения Гаусса (ОРГ) матрицы рассеяния $T(\lambda)$ и ее обратной $\hat{T}(\lambda)$. Более конкретно, введем блочные матрицы

$$T(z) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{T}(z) = \begin{pmatrix} \hat{T}_{11} & \hat{T}_{12} & \hat{T}_{13} \\ \hat{T}_{21} & \hat{T}_{22} & \hat{T}_{23} \\ \hat{T}_{31} & \hat{T}_{32} & \hat{T}_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где T_{21} , T_{23} , T_{12}^T и T_{32}^T — $(n-1)$ -компонентные векторы, T_{11} , T_{13} , T_{31} , T_{33} — скалярные функции, а T_{22} — матрица размера $(n-1) \times (n-1)$. Заметим, что эта структура согласуется с блочной структурой матрицы $J(z)$. Тогда упомянутое выше ОРГ принимает вид

$$T(z) = T^-(z)D^+(z)\hat{S}^+(z), \quad (3.2)$$

где T^- (S^+) – ниже- (верхне-) блочно-треугольная матрица,

$$T^-(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau_{21}^- & 1 & 0 \\ \tau_{31}^- & \tau_{32}^- & 1 \end{pmatrix}, \quad S^+(z) = \begin{pmatrix} 1 & s_{12}^+ & s_{13}^+ \\ 0 & 1 & s_{23}^+ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$D^+(z) = \text{diag}(m_1^+, m_2^+, m_3^+), \quad \hat{D}^+(z) = \text{diag}\left(\frac{1}{m_1^+}, \hat{m}_2^+, \frac{1}{m_3^+}\right),$$

$$\begin{aligned} s_{12}^+ &= -\frac{T_{12}}{m_1^+}, & s_{23} &= \hat{T}_{23}m_3^+, & s_{13} &= \hat{T}_{13}m_3^+, \\ \tau_{21}^- &= -\frac{T_{21}}{m_1^+}, & \tau_{32} &= \hat{T}_{32}m_3^+, & \tau_{31} &= \frac{T_{31}}{m_1^+}, \\ m_1^+ &= T_{11}, & m_2^+ &= T_{22} - \frac{T_{21}T_{12}}{m_1^+}, & \hat{m}_2^+ &= \hat{T}_{22} - \hat{T}_{21}\hat{T}_{12}m_3^+. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Более детальный анализ показывает, что число независимых матричных элементов гауссовых множителей S^+ и T^- равно n и совпадает с числом независимых элементов потенциала q .

С учетом этого ОРГ ФАР $\tilde{\chi}_{(1)}(x, z)$ в области $\mathcal{R}_1$ оказывается связанным с решениями Йоста уравнения (2.10) следующим образом:

$$\tilde{\chi}_{(1)}(x, z) = \tilde{\phi}_{(1)}(x, z)S^+(z) = \tilde{\psi}_{(1)}(x, z)T^-(z)D^+(z). \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Решения Йоста и матрица рассеяния $T(z)$ корректно определены на непрерывном спектре оператора L . Таким образом, хотя множители $S^+(z)$ и $T^-(z)$ в (3.5) определены только на границе области $\mathcal{R}_1$, функция $\tilde{\chi}_{(1)}(x, z)$ допускает аналитическое продолжение на любое значение $z \in \mathcal{R}_1$.

Конструкция ФАР в любой другой из областей $\mathcal{R}_k$, $k = 2, 3, 4$ требует дополнительной процедуры. А именно, сначала выполняется такое переупорядочение столбцов и строк в матрице $Q(x, z) - J(z)$, чтобы мнимые части $J(z)$ после переупорядочения удовлетворяли условиям в первой строке в (2.14). Аналогичное переупорядочение, разумеется, следует также совершить в $T(z)$ и $\hat{T}(z)$. К переупорядоченным матрицам $T(z)$ и $\hat{T}(z)$ далее применяется ОРГ и определяются соответствующие функции $\tilde{\chi}_{(k)}(x, z)$.

Доказательство аналитичности функции $\tilde{\chi}_{(1)}(x, z)$ можно получить, исследуя систему интегральных уравнений, которым удовлетворяет функция $\tilde{\xi}_{(1)}(x, z) = \tilde{\chi}_{(1)}(x, z)e^{-iJ(z)x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{(1),kp}(x, z) &= \delta_{kp} + \int_{-\infty}^x dy \sum_{j=1}^{n+1} Q_{-,kj}(y, z) \tilde{\xi}_{(1),jp}(x, z) e^{-i(J_k - J_p)(x-y)}, \quad k \geq p; \\ \tilde{\xi}_{(1),kp}(x, z) &= \int_{\infty}^x dy \sum_{j=1}^{n+1} Q_{+,kj}(y, z) \tilde{\xi}_{(1),jp}(x, z) e^{-i(J_k - J_p)(x-y)}, \quad k < p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что при $z \in \mathcal{R}_1$ экспоненциальные множители в подынтегральных выражениях не расходятся.

Набор ФАР $\tilde{\xi}_{(k)}(x, z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{\xi}_{(k)}(x, z) = \tilde{\xi}_{(m)}(x, z)G_{(k,m)}(x, z), \quad z \in \mathcal{R}_k \cap \mathcal{R}_m, \quad k, m = 1, 2, 3, 4, \quad (3.7)$$

где сшивающая функция $G_{(k,m)}(x, z)$ имеет вид

$$G_{(k,m)}(x, z) = e^{iJ(z)x} \hat{S}_{(m)}^+ S_{(k)}^+ e^{-iJ(z)x} \quad (3.8)$$

(здесь $S_{(m)}$ – гауссов множитель, отвечающий разложению (3.2) с переупорядоченной матрицей $T(z)$, см. замечание 3). Налагая условие $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_{(1)}(x, z) = \mathbb{1}$, можно рассматривать систему уравнений (3.7) как обобщенную задачу Римана–Гильберта с канонической нормировкой. Таким образом, обратная задача рассеяния для оператора Лакса L сводится к задаче Римана–Гильберта. Мы также предполагаем, что задача Римана–Гильберта (3.7) имеет единственное регулярное решение, т.е. решение, для которого $\det \xi_{(k)}(x, z) \neq 0$ при всех $z \in \mathcal{R}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда набор сшивающих функций $G_{(k,m)}(x, z)$ единственным образом определяет соответствующий потенциал $Q(x, z)$ через первые асимптотические коэффициенты функции $\tilde{\xi}_{(k)}(x, z)$ в соответствующих окрестностях точек $z = 1$, $z = -1$, $z = 0$ и $z = \infty$.

4. ЭВОЛЮЦИЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ $T(\lambda, t)$

Эволюция данных рассеяния определяется M -оператором. Рассмотрим пределы уравнения (1.3) при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, предполагая, что $\psi(x, t, \lambda)$ является решением Йоста для оператора Лакса L , определенным при $x \rightarrow \infty$. Из первой асимптотики определим закон дисперсии $C(\lambda)$, потребовав, чтобы $\psi_{\text{as}}(x, \lambda)$ не зависела от времени. Замечая, что $V(x, t) - V_{0,+}$ обращается в нуль при $x \rightarrow \infty$, получаем, что $C(\lambda) = 2\lambda J(\lambda)$. При рассмотрении предела $x \rightarrow -\infty$ наложим дополнительное условие $q_+^2 = q_-^2$, которое обеспечивает, что $V_{0,-} = V_{0,+}$. При выбранном $C(\lambda)$ это влечет, что $\phi_{\text{as}}(x, \lambda)$ также не зависит от времени, и таким образом мы получаем, что

$$i \frac{dT}{dt} - 2\lambda [J(\lambda), T(\lambda, t)] = 0. \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие $q_+^2 = q_-^2$ в действительности означает, что $\mathbf{q}_- = e^{i\theta} \mathbf{q}_+$, где разность фаз θ одна и та же для всех компонент векторов $\mathbf{q}_{\pm}$. Оно также обеспечивает, что уравнение (1.1) допускает решения, которые стремятся к не зависящим от времени постоянным $\mathbf{q}_{\pm}$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Вообще говоря, можно опустить это условие, но тогда эволюция матрицы рассеяния $T(\lambda, t)$ будет значительно более сложной, кроме того, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{q}(x, t)$ будет явно зависеть от времени.

Применяя ту же процедуру к ФАР, получаем следующую эволюцию для множителей из ОРГ:

$$\begin{aligned} i \frac{dT^-}{dt} - 2\lambda [J(\lambda), T^-(\lambda, t)] &= 0, \\ i \frac{dS^+}{dt} - 2\lambda [J(\lambda), S^+(\lambda, t)] &= 0, \quad i \frac{dD^+}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В результате заключаем, что $D^+(\lambda)$ является производящим функционалом законов сохранения. В частности, $\ln m_1^+(\lambda)$ порождает главную серию законов сохранения, имеющих локальные плотности.

Сшивающие функции $G_{(k,m)}(x, z)$ при $z \in \mathcal{R}_{(k)} \cap \mathcal{R}_{(m)}$ или, эквивалентно, набор множителей $S_{(k)}^+$ из ОРГ при $z \in \overline{\mathcal{R}}_k$ можно рассматривать как минимальные данные рассеяния для решения обратной задачи рассеяния.

5. СООТНОШЕНИЯ ВРОНСКОГО

Отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$ между классом допустимых потенциалов $\mathcal{M}$ и данными рассеяния $\mathcal{T}$ для оператора Лакса L можно исследовать с помощью вронскианных соотношений [11], [12]. Они представляют собой средство, позволяющее показать, что метод обратной задачи рассеяния является обобщенным преобразованием Фурье. В случае постоянных граничных условий эти соотношения требуют дополнительной регуляризации. Поэтому мы используем тождество [9], [10]

$$\widehat{\chi}(q(x, t) - \lambda J)\chi(x, \lambda)|_{x=-\infty}^{\infty} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dy \widehat{\chi}(y, \lambda) q_y \chi(y, \lambda), \quad (5.1)$$

которое следует из уравнения (1.2). Здесь $\chi(x, \lambda)$ может быть любым фундаментальным решением для оператора Лакса L ; для удобства возьмем его как ФАР в области $\mathcal{R}_1$. Левую часть тождества (5.1) можно вычислить явно, используя асимптотику ФАР при $x \rightarrow \pm\infty$. Она выражается матричными элементами множителей $S^+(\lambda)$, $T^-(\lambda)$ и $D^+(\lambda)$, которые определяют данные рассеяния для L . Таким образом,

$$\begin{aligned} s_{12;p}^+(z) &= -\frac{iz}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{tr}(q_y \chi E_{p+1,1} \widehat{\chi}(x, z)), \\ s_{23;p}^+(z) &= \frac{i}{\rho z} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{tr}(q_y \chi E_{n+1,p+1} \widehat{\chi}(x, z)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где E_{km} – матрица, размера $(n+1) \times (n+1)$ с элементами $(E_{km})_{pl} = \delta_{kp} \delta_{ml}$. Заметим, что подынтегральные выражения в правых частях уравнений (5.2) являются аналитическими функциями по z в области $\mathcal{R}_1$, которые стремятся к нулю при $y \rightarrow \pm\infty$; это обеспечивает существование интегралов.

Второй набор соотношений Вронского, который мы рассмотрим, связывает вариацию потенциала δq с соответствующими вариациями данных рассеяния $\delta \rho$ и $\delta \mathcal{T}$. Для этого используем тождество

$$\widehat{\chi} \delta \chi(x, \lambda)|_{x=-\infty}^{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} dy \widehat{\chi} \delta q(y) \chi(y, \lambda). \quad (5.3)$$

Здесь мы рассмотрим специальный класс вариаций потенциала $q(x)$, которые сохраняют $\mathbf{q}_\pm$, т.е. при которых $\delta\mathbf{q}_\pm = 0$. Тогда $\delta w_{0,\pm} = 0$, и мы получаем

$$\begin{aligned}\delta s_{12;p}^+(z) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{tr}(\delta q(y) \chi E_{p+1,1} \widehat{\chi}(x, z)), \\ \delta s_{23;p}^+(z) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{tr}(\delta q(y) \chi E_{n+1,p+1} \widehat{\chi}(x, z)), \\ \delta \ln m_1^+(z) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{tr}(\delta q(y) \chi E_{1,1} \widehat{\chi}(x, z)).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Закончим наше рассмотрение несколькими замечаниями о гамильтоновых свойствах уравнения (1.1). Мы уже говорили о нетривиальной структуре фазового пространства $\mathcal{M}$, возникающей из-за нетривиальных граничных условий. Эта сложность встречается также и в интегралах движения, и в гамильтоновых векторных полях, которые они порождают. Для большей конкретности выпишем три первых интеграла движения уравнения (1.1):

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy ((\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}(y)) - \rho^2), \\ I_2 &= \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dy ((\mathbf{q}_y^\dagger, \mathbf{q}(y)) - (\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}_y)), \\ I_3 &= \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dy ((\mathbf{q}_y^\dagger, \mathbf{q}_y) + (\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}(y))^2 - \rho^4).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Заметим, что хотя все интегралы здесь сходятся, их вариационные производные $\delta I_k / \delta \mathbf{q}^\dagger$ не обязательно обращаются в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$; это верно только для $\delta I_2 / \delta \mathbf{q}^\dagger$. Поэтому для того чтобы получить регулярную гамильтонову динамику, интеграл движения I_3 , который является кандидатом на роль гамильтониана для задачи (1.1), следует регуляризовать. Это можно сделать, используя один дополнительный интеграл движения, который в скалярном случае пропорционален I_1 [8]:

$$\tilde{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dy ((\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}_\pm)(\mathbf{q}_\pm^\dagger, \mathbf{q}(y)) - \rho^4).\tag{5.6}$$

Тогда получаем следующий гамильтониан задачи (1.1):

$$\begin{aligned}H_{\text{reg}} &= \frac{8}{3} I_3 - \rho^2 I_1 - \tilde{I}_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy ((\mathbf{q}_y^\dagger, \mathbf{q}_y) + (\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q})^2 - \rho^2 (\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}) - (\mathbf{q}^\dagger, \mathbf{q}_\pm)(\mathbf{q}_\pm^\dagger, \mathbf{q}) + \rho^4).\end{aligned}\tag{5.7}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим несколько открытых задач, которые будут рассмотрены в другой работе.

ФАР для оператора Лакса L можно использовать для определения резольвенты оператора. Применяя метод контурного интегрирования, можно вывести соотношения полноты системы ФАР; случай $n = 1$ рассмотрен в работе [3].

Регуляризованные вронскианские соотношения вместе с ФАР для оператора L можно использовать для построения “квадратов решений”, а затем интерпретировать метод обратной задачи рассеяния как обобщенное преобразование Фурье. По поводу скалярного случая см. работу [13].

Поучительным будет вывод солитонных решений темно-темного и темно-светлого типов [5] для задачи (1.1) путем модификации метода одевания Захарова–Шабата [14] применительно к системам вида (2.10) или путем использования метода преобразования Дарбу [15].

Приведенные выше результаты можно также обобщить на многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера с ПГУ, связанные с другими симметрическими пространствами [16].

Благодарности. В. С. Герджиков благодарит профессоров М. Бойти, Ф. Пемпинелли и Б. Принари за предоставленную возможность участия в конференции. Т. И. Валчев был поддержан со стороны European Operational programm HRD (контракт BGO051PO001/07/3.3-02/53 с Болгарским министерством образования).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **64** (1973), 1627–1639.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *ТМФ*, **19:3** (1974), 332–343.
- [3] V. S. Gerdjikov, P. P. Kuliš, *Bulgar. J. Phys.*, **5:4** (1978), 337–349; В. С. Герджиков, П. П. Кулиш, *ТМФ*, **39:1** (1979), 69–74.
- [4] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [5] B. Prinari, M. J. Ablowitz, G. Biondini, *J. Math. Phys.*, **47:6** (2006), 063508.
- [6] J. Ieda, T. Miyakawa, M. Wadati, *Phys. Rev. Lett.*, **93:19** (2004), 194102.
- [7] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **65** (1973), 505–516.
- [8] В. С. Герджиков, П. П. Кулиш, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **131** (1983), 34–46.
- [9] V. A. Atanasov, V. S. Gerdjikov, “On the multi-component nonlinear Schrödinger equation with constant boundary conditions”, *Gravity, Astrophysics and Strings at the Black Sea*, eds. P. P. Fiziev, M. D. Todorov, St. Kliment Ohridsky Univ. Press, Sofia, 2006, 22–36.
- [10] V. S. Gerdjikov, “Selected Aspects of Soliton Theory. Constant boundary conditions”, *Prof. G. Manev’s Legacy in Contemporary Aspects of Astronomy, Gravitational and Theoretical Physics*, eds. V. Gerdjikov, M. Tsvetkov, Heron Press, Sofia, 2005, 277–290; “Basic aspects of soliton theory”, *Geometry, Integrability and Quantization*, eds. I. M. Mladenov, A. C. Hirshfeld, Softex, Sofia, 2005, 78–125; [arXiv: nlin.SI/0604004](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0604004).
- [11] F. Calogero, A. Degasperis, *Nuovo Cimento B*, **32:2** (1976), 201–242.
- [12] F. Calogero, A. Degasperis, *Nuovo Cimento B*, **39:1** (1976), 1–54.
- [13] V. V. Konotop, V. E. Vekslerchik, *Phys. Rev. E*, **49:3** (1994), 2397–2407.
- [14] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [15] A. Degasperis, S. Lombardo, *J. Phys. A*, **40:5** (2007), 961–977.
- [16] A. P. Fordy, P. P. Kulish, *Comm. Math. Phys.*, **89:3** (1983), 427–443; C. Athorne, A. Fordy, *J. Phys. A*, **20:6** (1987), 1377–1386.