Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Гилсон, Д. К. Ниммо, К. М. Суман, Матричные решения некоммутативного уравнения КП и некоммутативного уравнения мКП, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 448–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:27:37

© 2009 г. К. Р. Гилсон*, Дж. Дж. К. Ниммо*, К. М. Суман*

МАТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОММУТАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ КП И НЕКОММУТАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ мКП

Рассматриваются матричные решения некоммутативного уравнения Кадомцева–Петвиашвили и некоммутативного модифицированного уравнения Кадомцева–Петвиашвили; эти решения можно выразить в виде квазидетерминантов. В частности, исследуется взаимодействие двухсолитонных решений.

Ключевые слова: бинарное преобразование Дарбу, квазидетерминант, матричное решение, некоммутативное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, некоммутативное модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует значительная по объему литература, посвященная некоммутативным интегрируемым системам. Она включает некоммутативные варианты уравнения Бюргерса, уравнение КдФ, уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) и модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (мКП), а также уравнение синус-Гордон [1]–[10]. Эти уравнения нередко можно получить просто отбрасывая допущение, что зависимые переменные и их производные в паре Лакса коммутируют.

В настоящей работе рассматриваются некоммутативное уравнение КП (нкКП) и некоммутативное уравнение мКП (нкмКП) [5], [11]. Пара Лакса для нкКП имеет вид

$$L_{\text{КП}} = \partial_x^2 + v_x - \partial_y, \quad (1)$$

$$M_{\text{КП}} = 4\partial_x^3 + 6v_x\partial_x + 3v_{xx} + 3v_y + \partial_t. \quad (2)$$

Как $L_{\text{КП}}$, так и $M_{\text{КП}}$ ковариантны относительно преобразования Дарбу $G_\theta = \theta\partial_x\theta^{-1}$, где θ – собственная функция операторов $L_{\text{КП}}$, $M_{\text{КП}}$. Из условия совместности $[L_{\text{КП}}, M_{\text{КП}}] = 0$ получаем некоммутативный вариант уравнения КП:

$$(v_t + 3v_xv_x + v_{xxx})_x + 3v_{yy} + 3[v_x, v_y] = 0, \quad (3)$$

где $u = v_x$. Для нкмКП пара Лакса [5] имеет вид

$$L_{\text{мКП}} = \partial_x^2 + 2w\partial_x - \partial_y, \quad (4)$$

$$M_{\text{мКП}} = 4\partial_x^3 + 12w\partial_x^2 + 6(w_x + w^2 + W)\partial_x + \partial_t. \quad (5)$$

*Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow G12 8QW, UK.
E-mail: cms@math.gla.ac.uk

Как $L_{\text{мкп}}$, так и $M_{\text{мкп}}$ ковариантны относительно преобразования Дарбу $G_\theta = ((\theta^{-1})_x)^{-1} \partial_x \theta^{-1}$, где θ – собственная функция операторов $L_{\text{мкп}}, M_{\text{мкп}}$. Условие совместности $[L_{\text{мкп}}, M_{\text{мкп}}] = 0$ дает

$$0 = w_t + w_{xxx} - 6w w_x w + 3W_y + 3[w_x, W]_+ - 3[w_{xx}, w] - 3[W, w^2], \quad (6)$$

$$0 = W_x - w_y + [w, W]. \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) образуют некоммутативный вариант уравнения мкп. Уравнение (7) выполнено тождественно, если сделать замену переменных [5]

$$w = -f_x f^{-1}, \quad W = -f_y f^{-1}. \quad (8)$$

Эта замена переменных использовалась в работах [1], [4] для изучения нкмкп-иерархии. И для уравнения нккп, и для уравнения нкмкп мы рассмотрим семейства решений, получающихся путем итерирования бинарных преобразований Дарбу. Эти решения можно выразить в виде квазидетерминантов, введенных в работе [12]. У $(n \times n)$ -матрицы $Z = (z_{ij})_{n \times n}$ над кольцом $\mathcal{R}$ (вообще говоря, некоммутативным) имеется n^2 квазидетерминантов, каждый из которых обозначается как $|Z|_{ij}$, где $1 \leq i, j \leq n$. Пусть r_i^j обозначает вектор-строку, получаемую из i -й строки матрицы Z удалением j -го элемента, а c_j^i – вектор-столбец, получаемый из j -го столбца матрицы Z удалением i -го элемента; пусть Z^{ij} – матрица, получаемая из Z удалением i -й строки и j -го столбца; будем предполагать, что Z^{ij} обратима. Тогда $|Z|_{ij}$ существует и

$$|Z|_{ij} = z_{ij} - r_i^j (Z^{ij})^{-1} c_j^i. \quad (9)$$

Для удобства обозначений поместим в квадрат главный элемент, относительно которого выполняется разложение:

$$|Z|_{ij} = \begin{vmatrix} Z^{ij} & c_j^i \\ r_i^j & \boxed{z_{ij}} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Квазидетерминантные решения, получаемые из бинарных преобразований Дарбу, в коммутативном пределе сводятся к отношениям детерминантов Грама, и мы будем называть их квазиграмианами.

В настоящей работе рассмотрен случай, когда зависимые переменные в уравнениях нккп и нкмкп являются матрицами; при этом применяются методы из работ [6], [13]–[15]. На этой основе мы исследуем взаимодействие двухсолитонных решений матричных вариантов уравнений нккп и нкмкп.

2. КВАЗИГРАМИАНОВЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НККП

В данном разделе мы напомним конструкцию квазиграмиановых решений уравнения нккп из работы [7]. Сопряженная пара Лакса имеет вид

$$L_{\text{кп}}^\dagger = \partial_x^2 + v_x^\dagger + \partial_y, \quad (11)$$

$$M_{\text{кп}}^\dagger = -4\partial_x^3 - 6v_x^\dagger \partial_x - 3v_{xx}^\dagger + 3v_y^\dagger - \partial_t. \quad (12)$$

Следуя стандартной конструкции бинарного преобразования Дарбу (см. работу [16]), введем потенциал $\Omega(\phi, \psi)$, удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{aligned} \Omega(\phi, \psi)_x &= \psi^\dagger \phi, & \Omega(\phi, \psi)_y &= \psi^\dagger \phi_x - \psi_x^\dagger \phi, \\ \Omega(\phi, \psi)_t &= -4(\psi^\dagger \phi_{xx} - \psi_x^\dagger \phi_x + \psi_{xx}^\dagger \phi) - 6\psi^\dagger v_x \phi. \end{aligned}$$

Все эти уравнения совместны, если $L_{\text{КП}}[\phi] = M_{\text{КП}}[\phi] = 0$ и $L_{\text{КП}}^\dagger[\psi] = M_{\text{КП}}^\dagger[\psi] = 0$. Заметим, что можно определить $\Omega(\Phi, \Psi)$ для любых вектор-строк Φ и Ψ таких, что $L_{\text{КП}}[\Phi] = M_{\text{КП}}[\Phi] = 0$ и $L_{\text{КП}}^\dagger[\Psi] = M_{\text{КП}}^\dagger[\Psi] = 0$. Таким образом, если Φ является m -вектором, а Ψ — n -вектором, то Ω есть $(m \times n)$ -матрица.

Бинарное преобразование Дарбу определяется как

$$\begin{aligned}\phi_{[n+1]} &= \phi_{[n]} - \theta_{[n]} \Omega^{-1}(\theta_{[n]}, \rho_{[n]}) \Omega(\phi_{[n]}, \rho_{[n]}), \\ \psi_{[n+1]} &= \psi_{[n]} - \rho_{[n]} (\Omega^{-1}(\theta_{[n]}, \rho_{[n]}))^\dagger \Omega^\dagger(\theta_{[n]}, \psi_{[n]}),\end{aligned}$$

где

$$\theta_{[n]} = \phi_{[n]}|_{\phi \rightarrow \theta_n}, \quad \rho_{[n]} = \psi_{[n]}|_{\psi \rightarrow \rho_n}.$$

Используя обозначения $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ и $P = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, при $n \geq 1$ имеем

$$\phi_{[n+1]} = \begin{vmatrix} \Omega(\Theta, P) & \Omega(\phi, P) \\ \Theta & \boxed{\phi} \end{vmatrix}, \quad \psi_{[n+1]} = \begin{vmatrix} \Omega^\dagger(\Theta, P) & \Omega^\dagger(\Theta, \psi) \\ P & \boxed{\psi} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

а также

$$\Omega(\phi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}) = \begin{vmatrix} \Omega(\Theta, P) & \Omega(\phi, P) \\ \Omega(\Theta, \psi) & \boxed{\Omega(\phi, \psi)} \end{vmatrix}.$$

Действие бинарного преобразования Дарбу

$$\hat{L}_{\text{КП}} = G_{\theta, \phi} L_{\text{КП}} G_{\theta, \phi}^{-1}, \quad \widehat{M}_{\text{КП}} = G_{\theta, \phi} M_{\text{КП}} G_{\theta, \phi}^{-1}$$

состоит в том, что

$$\hat{v} = v_0 + 2\theta \Omega^{-1}(\theta, \rho) \rho^\dagger.$$

После n бинарных преобразований Дарбу получаем

$$v_{[n+1]} = v_0 + 2 \sum_{k=1}^n \theta_{[k]} \Omega^{-1}(\theta_{[k]}, \rho_{[k]}) \rho_{[k]}^\dagger = v_0 - 2 \begin{vmatrix} \Omega(\Theta, P) & P^\dagger \\ \Theta & \boxed{0} \end{vmatrix}.$$

Двухсолитонное матричное решение. Теперь выведем матричные решения уравнения нкКП, используя методы, примененные в работе [6]. Тривиальное вакуумное решение $v_0 = 0$ дает

$$v = -2 \begin{vmatrix} \Omega(\Theta, P) & P^\dagger \\ \Theta & \boxed{0} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Собственные функции θ_i и сопряженные собственные функции ρ_i удовлетворяют соотношениям

$$\theta_{i,xx} = \theta_{i,y}, \quad \theta_{i,t} = -4\theta_{i,xxx}, \quad (15)$$

$$\rho_{i,xx} = -\rho_{i,y}, \quad \rho_{i,t} = -4\rho_{i,xxx}. \quad (16)$$

Выберем простейшие нетривиальные решения этих уравнений:

$$\theta_j = A_j e^{\eta_j}, \quad \rho_i = B_i e^{-\gamma_i}, \quad (17)$$

где $\eta_j = p_j(x + p_j y - 4p_j^2 t)$, $\gamma_i = q_i(x + q_i y - 4q_i^2 t)$, а A_j , B_i – $(d \times m)$ -матрицы. Тогда имеем

$$\Omega(\theta_j, \rho_i) = \frac{B_i^T A_j}{p_j - q_i} e^{\eta_j - \gamma_i} + \delta_{i,j} I.$$

Возьмем $A_j = r_j P_j$, где r_j – скаляр, а P_j – матрица оператора проектирования. При таком выборе A_j должно быть $m = d$. Выберем $B_i = I$; при этом решение u будет $(d \times d)$ -матрицей.

В случае $n = 1$ получаем односолитонное матричное решение. Разлагая (14), получаем

$$v = \frac{2rP}{e^{\gamma - \eta} + r/(p - q)}.$$

И в приведенных выше, и в предстоящих в дальнейшем вычислениях используется формула $(I - aP)^{-1} = I + aP(1 - a)^{-1}$, где a – скаляр, $a \neq 1$, а P – любая проекционная матрица. Теперь имеем

$$u = v_x = \frac{1}{2} (p - q)^2 P \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta - \gamma + \xi}{2} \right), \quad \xi = \ln \left(\frac{r}{p - q} \right). \quad (18)$$

В случае $n = d = 2$ получаем двухсолитонное (2×2) -матричное решение. Разлагая (14), имеем

$$\begin{aligned} v &= 2 \begin{pmatrix} A_1 e^{\eta_1} & A_2 e^{\eta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \frac{e^{\eta_j - \gamma_i}}{p_j - q_i} + \delta_{i,j} I \end{pmatrix}_{2 \times 2}^{-1} \begin{pmatrix} I e^{-\gamma_1} \\ I e^{-\gamma_2} \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} K_1 e^{\gamma_1} & K_2 e^{\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I e^{-\gamma_1} \\ I e^{-\gamma_2} \end{pmatrix} = 2(K_1 + K_2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_1 \left(I + \frac{r_1 e^{\eta_1 - \gamma_1}}{p_1 - q_1} P_1 \right) &= e^{\eta_1 - \gamma_1} A_1 - \frac{e^{\eta_1 - \gamma_1}}{p_1 - q_2} K_2 A_1, \\ K_2 \left(I + \frac{r_2 e^{\eta_2 - \gamma_2}}{p_2 - q_2} P_2 \right) &= e^{\eta_2 - \gamma_2} A_2 - \frac{e^{\eta_2 - \gamma_2}}{p_2 - q_1} K_1 A_2. \end{aligned}$$

Мы полагаем, что P_j – проекционные матрицы ранга 1:

$$P_j = \frac{\mu_j \otimes \nu_j}{(\mu_j, \nu_j)} = \frac{\mu_j \nu_j^T}{\mu_j^T \nu_j},$$

где 2-векторы μ_j , ν_j удовлетворяют условиям $(\mu_j, \nu_j) \neq 0$. Решение для K_1 и K_2 имеет вид

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{p_2 - q_1}{g} (g_2(p_1 - q_2)I - A_2)A_1, \\ K_2 &= \frac{p_1 - q_2}{g} (g_1(p_2 - q_1)I - A_1)A_2, \end{aligned}$$

где

$$g_i = e^{\gamma_i - \eta_i} + \frac{r_i}{p_i - q_i}, \quad g = g_1 g_2 (p_1 - q_2)(p_2 - q_1) - \alpha r_1 r_2, \quad \alpha = \frac{(\mu_1, \nu_2)(\mu_2, \nu_1)}{(\mu_1, \nu_1)(\mu_2, \nu_2)}.$$

Исследуем теперь поведение $v_{[3]}$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Это позволит увидеть, что каждый солитон возникает из взаимодействия, претерпевающего фазовый сдвиг, и что амплитуда каждого солитона также может изменяться за счет взаимодействия. Сначала фиксируем $\gamma_1 - \eta_1$ и предположим, без ограничения общности, что $0 > p_2 > q_2 > p_1 > q_1$. При $t \rightarrow -\infty$ имеем $v \sim 2r_1 P_1 / g_1$ и поэтому

$$u = v_x \sim \frac{1}{2} (p_1 - q_1)^2 P_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_1 - \gamma_1 + \xi_1^-}{2} \right), \quad \xi_1^- = \ln \left(\frac{r_1}{p_1 - q_1} \right). \quad (19)$$

Матрица $u = v_x$ инвариантна относительно преобразования $v \rightarrow v + C$, где C — постоянная матрица. При $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$v \sim \frac{2}{r_2(p_1 - q_2)(p_2 - q_1) \left(g_1 - \frac{\alpha r_1(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)} \right)} \left((r_2(p_1 - q_2) - (p_2 - q_2)A_2)(p_2 - q_1)A_1 - \right. \\ \left. - ((p_1 - q_2)A_1 - \alpha r_1(p_2 - q_2))(p_2 - q_2)A_2 \right) \sim 2 \frac{\hat{r}_1 \hat{P}_1}{e^{\gamma_1 - \eta_1} + \hat{r}_1 / (p_1 - q_1)},$$

где

$$\hat{r}_1 = r_1 \left(1 - \frac{\alpha(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)} \right) = \frac{r_1(\hat{\mu}_1, \hat{\nu}_1)}{(\mu_1, \nu_1)}, \\ \hat{\mu}_1 = \mu_1 - \frac{(p_2 - q_2)(\mu_1, \nu_2)\mu_2}{(p_1 - q_2)(\mu_2, \nu_2)}, \\ \hat{\nu}_1 = \nu_1 - \frac{(p_2 - q_2)(\mu_2, \nu_1)\nu_2}{(p_2 - q_1)(\mu_2, \nu_2)}$$

и $\hat{P}_1 = \frac{\hat{\mu}_1 \otimes \hat{\nu}_1}{(\hat{\mu}_1, \hat{\nu}_1)}$. Поэтому

$$u = v_x \sim \frac{1}{2} (p_1 - q_1)^2 \hat{P}_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_1 - \gamma_1 + \xi_1^+}{2} \right), \quad \xi_1^+ = \ln \left(\frac{\hat{r}_1}{p_1 - q_1} \right). \quad (20)$$

Аналогично при фиксированном $\gamma_2 - \eta_2$ получаем

$$u \sim \frac{1}{2} (p_2 - q_2)^2 \begin{cases} \hat{P}_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2 + \xi_2^-}{2} \right), & t \rightarrow -\infty, \\ P_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2 + \xi_2^+}{2} \right), & t \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\hat{r}_2 = r_2 \left(1 - \frac{\alpha(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)} \right) = \frac{r_2(\hat{\mu}_2, \hat{\nu}_2)}{(\mu_2, \nu_2)}, \\ \hat{\mu}_2 = \mu_2 - \frac{(p_1 - q_1)(\mu_2, \nu_1)\mu_1}{(p_2 - q_1)(\mu_1, \nu_1)}, \\ \hat{\nu}_2 = \nu_2 - \frac{(p_1 - q_1)(\mu_1, \nu_2)\nu_1}{(p_1 - q_2)(\mu_1, \nu_1)}, \\ \xi_2^- = \ln \left(\frac{\hat{r}_2}{p_2 - q_2} \right), \quad \xi_2^+ = \ln \left(\frac{r_2}{p_2 - q_2} \right)$$

и $\hat{P}_2 = \frac{\hat{\mu}_2 \otimes \hat{\nu}_2}{(\hat{\mu}_2, \hat{\nu}_2)}$.

Рис. 1. График взаимодействия матричных КП-солитонов при $t = 0$, $p_1 = -1/4$, $q_1 = -39/4$, $p_2 = 19/2$, $q_2 = 1/2$, $r_1 = 2$ и $r_2 = 1$.

Фазовые сдвиги солитона $\Delta_j = \xi_j^+ - \xi_j^-$ равны

$$\Delta_1 = \ln\left(\frac{\hat{r}_1}{r_1}\right) = \ln \beta, \quad \Delta_2 = \ln\left(\frac{r_2}{\hat{r}_2}\right) = -\ln \beta, \quad \beta = 1 - \frac{\alpha(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)}.$$

Когда t меняется от $-\infty$ до $+\infty$, матричная амплитуда первого солитона изменяется от $\frac{1}{2}(p_1 - q_1)^2 P_1$ до $\frac{1}{2}(p_1 - q_1)^2 \hat{P}_1$, а матричная амплитуда второго солитона — от $\frac{1}{2}(p_2 - q_2)^2 \hat{P}_2$ до $\frac{1}{2}(p_2 - q_2)^2 P_2$. Если $(\mu_1, \nu_2) = 0$ ($P_2 P_1 = 0$) или $(\mu_2, \nu_1) = 0$ ($P_1 \hat{P}_2 = 0$), то $\alpha = 0$ и поэтому $\beta = 1$, так что фазового сдвига нет, но матричные амплитуды могут тем не менее меняться. Если $(\mu_1, \nu_2) = 0$ и $(\mu_2, \nu_1) = 0$ (что дает $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$), то фазового сдвига и изменения амплитуды не происходит, поэтому взаимодействие солитонов тривиально. На рис. 1 показан график взаимодействия для

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{1}{121} \begin{bmatrix} 96 & -16 \\ -150 & -25 \end{bmatrix}.$$

3. КВАЗИГРАМИАНОВЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НКМКП

Конструкция этого бинарного преобразования Дарбу приведена в работе [17], а также в работе [18] (для операторов Лакса с матричными коэффициентами). Сопряженная пара Лакса имеет вид

$$L_{\text{МКП}}^\dagger = \partial_x^2 - 2w_x^\dagger - 2w^\dagger \partial_x + \partial_y,$$

$$M_{\text{МКП}}^\dagger = -4\partial_x^3 + 12w_x^\dagger \partial_x^2 + 6(3w_x^\dagger - w^{\dagger 2} - W^\dagger) \partial_x + 6(w_{xx}^\dagger - [w_x^\dagger, w^\dagger]_+ - W_x^\dagger) - \partial_t.$$

Для удобства обозначим элемент из пространства $\ker L_{\text{МКП}}^\dagger \cap \ker M_{\text{МКП}}^\dagger$ как ϕ_x . Введем потенциал $\Omega(\phi, \psi)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}\Omega(\phi, \psi)_x &= \psi^\dagger \phi_x, & \Omega(\phi, \psi)_y &= 2\psi^\dagger w \phi_x + \psi^\dagger \phi_{xx} - \psi_x^\dagger \phi_x, \\ \Omega(\phi, \psi)_t &= 2(-2\psi_{xx}^\dagger \phi_x - 2\psi^\dagger \phi_{xxx} + 2\psi_x^\dagger \phi_{xx} - 3\psi^\dagger w^2 \phi_x - 3\psi^\dagger W \phi_x - \\ &\quad - 3\psi^\dagger w_x \phi_x + 6\psi_x^\dagger w \phi_x - 6\psi^\dagger w \phi_{xx}).\end{aligned}$$

Бинарное преобразование Дарбу определяется как

$$\begin{aligned}\phi_{[n+1]} &= \phi_{[n]} - \theta_{[n]} \Omega^{-1}(\rho_{[n]}, \theta_{[n]}) \Omega(\rho_{[n]}, \phi_{[n]}), \\ \psi_{[n+1]} &= \psi_{[n]} - \rho_{[n]} (\Omega^{-1}(\rho_{[n]}, \theta_{[n]})^\dagger \Omega^\dagger(\psi_{[n]}, \theta_{[n]}),\end{aligned}$$

где вновь

$$\theta_{[n]} = \phi_{[n]}|_{\phi \rightarrow \theta_n}, \quad \rho_{[n]} = \psi_{[n]}|_{\psi \rightarrow \rho_n}.$$

Используя обозначения $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ и $P = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, при $n \geq 1$ имеем соотношения (13).

Действие бинарного преобразования Дарбу

$$\hat{L}_{\text{МКП}} = G_{\theta, \phi_x} L_{\text{МКП}} G_{\theta, \phi_x}^{-1}, \quad \widehat{M}_{\text{МКП}} = G_{\theta, \phi_x} M_{\text{МКП}} G_{\theta, \phi_x}^{-1}$$

состоит в том, что

$$\hat{f} = \begin{vmatrix} \Omega & \rho^\dagger \\ \theta & \boxed{1} \end{vmatrix} f,$$

где f задается в (8). После n преобразований Дарбу получаем

$$f_{[n+1]} = \begin{vmatrix} \Omega(P, \Theta) & P^\dagger \\ \Theta & \boxed{I} \end{vmatrix} f.$$

Двухсолитонное матричное решение. Тривиальное вакуумное решение $f = I$ (приводящее к $w = W = 0$) дает

$$F = \begin{vmatrix} \Omega(P, \Theta) & P^\dagger \\ \Theta & \boxed{I} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Собственные функции θ_i и сопряженные собственные функции ρ_i удовлетворяют условиям (15) и (16) соответственно. Снова выбираем решения для собственных функций вида (17). Тогда имеем

$$\Omega(\theta_j, \rho_i) = \delta_{i,j} I - \frac{p_j B_i^T A_j}{q_i (p_j - q_i)} e^{\eta_j - \gamma_i}.$$

Как и в предыдущем разделе, возьмем $A_j = r_j P_j$ и $B_i = I$, при этом решения w и W будут $(d \times d)$ -матрицами.

В случае $n = 1$ получаем односолитонное матричное решение. Разлагая (22), находим

$$F = I + \frac{r/q \cdot P}{e^{\gamma - \eta} - rp/q(p - q)}.$$

Если $r > 0$ и при этом либо $q > p > 0$, либо $0 > q > p$ или же если, наоборот, $r < 0$ и либо $p > q > 0$, либо $0 > p > q$, то

$$w = -F_x F^{-1} = -\frac{1}{4} (pq)^{-1/2} (p-q)^2 P \operatorname{sech}\left(\frac{\eta - \gamma + \varphi}{2}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\eta - \gamma + \chi}{2}\right),$$

$$W = -F_y F^{-1} = (p+q)w,$$

где

$$\varphi = \ln\left(-\frac{pr}{q(p-q)}\right), \quad \chi = \ln\left(-\frac{r}{p-q}\right).$$

Как w , так и W имеют единственный максимум, в котором

$$\eta - \gamma = -\ln\left(-\frac{(pq^{-1})^{1/2}r}{p-q}\right) = \lambda.$$

В случае $n = d = 2$ получаем двухсолитонное (2×2) -матричное решение. Разлагая (22), находим

$$F = I + \begin{pmatrix} A_1 e^{\eta_1} & A_2 e^{\eta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{i,j} I - \frac{p_j A_j}{q_i (p_j - q_i)} e^{\eta_j - \gamma_i} \end{pmatrix}_{2 \times 2}^{-1} \begin{pmatrix} I \frac{e^{-\gamma_1}}{q_1} \\ I \frac{e^{-\gamma_2}}{q_2} \end{pmatrix} =$$

$$= I + \begin{pmatrix} L_1 e^{\gamma_1} & L_2 e^{\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \frac{e^{-\gamma_1}}{q_1} \\ I \frac{e^{-\gamma_2}}{q_2} \end{pmatrix} = I + \frac{1}{q_1} L_1 + \frac{1}{q_2} L_2.$$

Решая относительно L_1 и L_2 , получаем

$$L_1 = \frac{(p_2 - q_1)q_1}{h} ((p_1 - q_2)q_2 h_2 I + p_1 A_2) A_1,$$

$$L_2 = \frac{(p_1 - q_2)q_2}{h} ((p_2 - q_1)q_1 h_1 I + p_2 A_1) A_2,$$

где

$$h_i = e^{\gamma_i - \eta_i} - \frac{p_i r_i}{(p_i - q_i)q_i}, \quad h = h_1 h_2 q_1 q_2 (p_1 - q_2)(p_2 - q_1) - \alpha p_1 p_2 r_1 r_2$$

и α определено в предыдущем разделе.

Теперь исследуем поведение F при $t \rightarrow \pm\infty$. Сначала фиксируем $\eta_1 - \gamma_1$ и будем полагать, без потери общности, что $0 > p_2 > q_2 > p_1 > q_1$. Тогда при $t \rightarrow -\infty$,

$$F \sim I + \frac{\frac{r_1}{q_1} P_1}{h_1}$$

и поэтому

$$w = -F_x F^{-1} \sim -\frac{1}{4} (p_1 q_1)^{-1/2} (p_1 - q_1)^2 P_1 \operatorname{sech}\left(\frac{\eta_1 - \gamma_1 + \varphi_1^-}{2}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\eta_1 - \gamma_1 + \chi_1^-}{2}\right), \quad (23)$$

где

$$\varphi_1^- = \ln\left(-\frac{p_1 r_1}{q_1 (p_1 - q_1)}\right), \quad \chi_1^- = \ln\left(-\frac{r_1}{p_1 - q_1}\right).$$

Заметим, что $w = -F_x F^{-1}$ и $W = -F_y F^{-1}$ инвариантны относительно преобразования $F \rightarrow FC$, где C – несингулярная постоянная матрица. При $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} F &\sim I + (h_1 r_2 p_2 q_1 (p_1 - q_2)(p_2 - q_1) + \alpha p_1 p_2 r_1 r_2 (p_2 - q_2))^{-1} \times \\ &\times ((r_2 p_2 (p_1 - q_2) - p_1 (p_2 - q_2) A_2)(p_2 - q_1) A_1 - \\ &- (p_2 (p_1 - q_2) A_1 - \alpha p_1 r_1 (p_2 - q_2))) (p_2 - q_2) \times \\ &\times A_2 \left(I + \frac{(p_2 - q_2) A_2}{q_2 r_2} \right) \sim I + \frac{\tilde{r}_1 / q_1 \cdot \tilde{P}_1}{e^{\gamma_1 - \eta_1} - p_1 \tilde{r}_1 / q_1 (p_1 - q_1)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= r_1 \left(1 - \frac{\alpha(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)} \right) = \frac{r_1(\tilde{\mu}_1, \tilde{\nu}_1)}{(\mu_1, \nu_1)}, \\ \tilde{\mu}_1 &= \mu_1 - \frac{p_1(p_2 - q_2)(\mu_1, \nu_2)\mu_2}{p_2(p_1 - q_2)(\mu_2, \nu_2)}, \\ \tilde{\nu}_1 &= \nu_1 - \frac{q_1(p_2 - q_2)(\mu_2, \nu_1)\nu_2}{q_2(p_2 - q_1)(\mu_2, \nu_2)} \end{aligned}$$

и $\tilde{P}_1 = \frac{\tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu}_1}{(\tilde{\mu}_1, \tilde{\nu}_1)}$. Поэтому

$$w = -F_x F^{-1} \sim -\frac{1}{4} (p_1 q_1)^{-1/2} (p_1 - q_1)^2 \tilde{P}_1 \operatorname{sech} \left(\frac{\eta_1 - \gamma_1 + \varphi_1^+}{2} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\eta_1 - \gamma_1 + \chi_1^+}{2} \right), \quad (24)$$

где

$$\varphi_1^+ = \ln \left(-\frac{p_1 \tilde{r}_1}{q_1 (p_1 - q_1)} \right), \quad \chi_1^+ = \ln \left(-\frac{\tilde{r}_1}{p_1 - q_1} \right).$$

Аналогично, фиксируя $\gamma_2 - \eta_2$, будем иметь

$$w \sim -\frac{1}{4} (p_2 q_2)^{-1/2} (p_2 - q_2)^2 \begin{cases} \tilde{P}_2 \operatorname{sech} \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2 + \varphi_2^-}{2} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2 + \chi_2^-}{2} \right), & t \rightarrow -\infty, \\ P_2 \operatorname{sech} \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2 + \varphi_2^+}{2} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2 + \chi_2^+}{2} \right), & t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{r}_2 &= r_2 \left(1 - \frac{\alpha(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)} \right) = \frac{r_2(\tilde{\mu}_2, \tilde{\nu}_2)}{(\mu_2, \nu_2)}, \\ \tilde{\mu}_2 &= \mu_2 - \frac{p_2(p_1 - q_1)(\mu_2, \nu_1)\mu_1}{p_1(p_2 - q_1)(\mu_1, \nu_1)}, \\ \tilde{\nu}_2 &= \nu_2 - \frac{q_2(p_1 - q_1)(\mu_1, \nu_2)\nu_1}{q_1(p_1 - q_2)(\mu_1, \nu_1)}, \\ \varphi_2^- &= \ln \left(-\frac{p_2 \tilde{r}_2}{q_2 (p_2 - q_2)} \right), \quad \chi_2^- = \ln \left(-\frac{\tilde{r}_2}{p_2 - q_2} \right), \\ \varphi_2^+ &= \ln \left(-\frac{p_2 r_2}{q_2 (p_2 - q_2)} \right), \quad \chi_2^+ = \ln \left(-\frac{r_2}{p_2 - q_2} \right). \end{aligned}$$

и $\tilde{P}_2 = \frac{\tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu}_2}{(\tilde{\mu}_2, \tilde{\nu}_2)}$.

Рис. 2. График взаимодействия матричных мКП-солитонов при $t = 0$, $p_1 = 1/4$, $q_1 = 3/4$, $p_2 = -1/4$, $q_2 = -3/4$, $r_1 = 1$ и $r_2 = -1$.

Фазовые сдвиги солитонов $\Lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$ равны

$$\Lambda_1 = \ln\left(\frac{r_1}{\tilde{r}_1}\right) = -\ln \beta, \quad \Lambda_2 = \ln\left(\frac{\tilde{r}_2}{r_2}\right) = \ln \beta.$$

Когда t меняется от $-\infty$ до $+\infty$, матричная амплитуда первого солитона изменяется от $-\frac{1}{4}(p_1q_1)^{-1/2}(p_1 - q_1)^2P_1$ до $-\frac{1}{4}(p_1q_1)^{-1/2}(p_1 - q_1)^2\tilde{P}_1$, а матричная амплитуда второго солитона — от $-\frac{1}{4}(p_2q_2)^{-1/2}(p_2 - q_2)^2\tilde{P}_2$ до $-\frac{1}{4}(p_2q_2)^{-1/2}(p_2 - q_2)^2P_2$. На рис. 2 показан график взаимодействия для

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены некоммутативное уравнение КП и некоммутативное модифицированное уравнение КП. Показано, что решения последнего уравнения, полученные из бинарного преобразования Дарбу, могут выражаться в виде одного квазидетерминанта. Кроме того, использованы методы, аналогичные тем, что использовались в работе [6], и получены матричные варианты обоих рассмотренных уравнений. Исследованы свойства взаимодействия двухсолитонного решения этих уравнений. Показано, что наряду с наличием фазового сдвига амплитуда каждого солитона также может меняться, что дает более изящную картину, чем в коммутативном случае.

Список литературы

- [1] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, C. M. Sooman, *J. Phys. A*, **41**:8 (2008), 085202.
- [2] O. Lechtenfeld, L. Mazzanti, S. Penati, A. D. Popov, L. Tamassia, *Nucl. Phys. B*, **705**:3 (2005), 477–503.
- [3] C. X. Li, J. J. C. Nimmo, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **464**:2092 (2008), 951–966.
- [4] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *J. Phys. A*, **39**:29 (2006), 9169–9186.
- [5] N. Wang, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **73**:7 (2004), 1689–1698.
- [6] В. М. Гончаренко, *ТМФ*, **126**:1 (2001), 102–114.
- [7] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, *J. Phys. A*, **40**:14 (2007), 3839–3850.
- [8] M. Hamanaka, K. Toda, *J. Phys. A*, **36**:48 (2003), 11981–11998.
- [9] M. Hamanaka, “Noncommutative solitons and integrable systems”, *Noncommutative Geometry and Physics*, eds. Y. Maeda, N. Tose, N. Miyazaki, S. Watamura D. Sternheimer, World Sci., Hackensack, NJ, 2005, 175–198.
- [10] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *Phys. Lett. A*, **278**:3 (2000), 139–145.
- [11] B. A. Kupershmidt, *KP or mKP. Noncommutative Mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable Systems*, Math. Surveys Monogr., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [12] I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, V. S. Retakh, R. L. Wilson, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 56–141.
- [13] V. M. Goncharenko, A. P. Veselov, *J. Phys. A*, **31**:23 (1998), 5315–5326.
- [14] V. M. Goncharenko, A. P. Veselov, “Yang–Baxter maps and matrix solitons”, *New Trends in Integrability and Partial Solvability*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **132**, eds. A. B. Shabat, A. González-López, M. Mañas, L. Martínez Alonso M. A. Rodríguez, Kluwer, Dordrecht, 2004, 191–197.
- [15] В. М. Гончаренко, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 175–176.
- [16] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [17] W. Oevel, C. Rogers, *Rev. Math. Phys.*, **5**:2 (1993), 299–330.
- [18] J. J. C. Nimmo, “Darboux transformations from reductions of the KP hierarchy”, *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems: NEEDS’94* (Los Alamos, NM), eds. V. G. Makhanov, A. R. Bishop, D. D. Holm, World Sci., River Edge, NJ, 1995, 168–177.