Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Кауп, Интегрируемые системы и квадраты собственных функций, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 459–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:24:53

© 2009 г.

Д. Дж. Кауп*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И КВАДРАТЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Дан краткий обзор формализма Абловица–Каупа–Ньюэла–Сегуры для интегрируемых $(1D+1D)$ -систем начиная с пары Лакса, а далее рассмотрена интегрируемая теория возмущений и квадраты собственных функций. Основное внимание уделяется общим свойствам, обнаруженным в обратном преобразовании рассеяния для широкого класса известных $(1D+1D)$ -систем. Предпринят ряд шагов, выбранных таким образом, чтобы продвигаться вперед, как при анализе систем высшего порядка. Приведен краткий обзор прямой задачи рассеяния и обратных задач рассеяния, вслед за чем рассмотрены возмущения потенциалов и данных рассеяния. Для последней задачи исходный подход к возмущениям системы Абловица–Каупа–Ньюэла–Сегуры переформулирован так, чтобы подчеркнуть его единонаправленность с общими свойствами $(1D+1D)$ -систем. Для вывода возмущений потенциалов, вызванных возмущениями данных рассеяния в отсутствие солитонов, использован недавно разработанный подход. Наконец, показано, что последние результаты по нахождению квадратов собственных функций и их сопряженных в виде сумм произведений (а не просто произведений) функций Йоста определяются симметриями, наложенными на матрицу потенциалов.

Ключевые слова: солитон, обратное преобразование рассеяния, возмущение, квадрат собственной функции, замыкание, скалярное произведение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обратное преобразование рассеяния (ОПР) было введено Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [1] применительно к уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ); еще один пример подобного подхода возник в классической работе Захарова и Шабата [2] о нелинейном уравнении Шредингера (НУШ). Вскоре после этого Вадати [3] показал, что в ту же схему укладывается и модифицированное уравнение КдФ. Далее последовало решение уравнения синус-Гордон ОПР-методом, предложенное Абловицем, Каупом, Ньюэлом и Сегуром (АКНС) [4]. Вскоре после этого вышла классическая работа тех же авторов [5], в которой подчеркивалось, что ОПР похоже на нелинейное преобразование Фурье.

*Mathematics Department, PO Box 161364, University of Central Florida, Orlando, FL 32816-1364. E-mail: davidkaup@earthlink.net

Существует немало учебников и обзоров, подробно рассматривающих многие аспекты ОПР [6]–[8]. В 1976 г. появилась теория возмущений для солитонов [9], [10]. С тех пор знания об ОПР удалось значительно расширить. В частности, задачи на собственные значения высшего порядка потребовали более объемлющих методов, чем те, что исходно использовались в АКНС-подходе. При взгляде на весь спектр решаемых интегрируемых задач видны не только общие свойства, но и потребность в усовершенствовании методов построения соответствующих ОПР. В русле этого мы дадим краткий обзор АКНС-случая с точки зрения более свежих методов, имея целью представить указанный случай как руководство для исследования других нерешенных интегрируемых систем. При этом мы будем подчеркивать общие свойства. В частности, в общих терминах мы обсудим, что требуется для решения прямой задачи рассеяния, обратной задачи рассеяния и проблемы возмущений в интегрируемых системах.

Настоящая работа отчасти выросла из недавней статьи [11], где нам удалось упростить подход к возмущениям в уравнении Сасы–Сацумы [12] и понять, как описать этот процесс в более общих рамках. В результате появилась возможность сформулировать более простой подход к задаче поиска квадратов собственных функций, их сопряженных, их скалярных произведений и соотношений замыкания, а далее придать всему этому вид, который ранее подробно не рассматривался. В нашей работе мы претендуем на известную полноту, поэтому наш анализ будет полезен как приступающим к изучению интегрируемых систем студентам, так и другим исследователям, недавно заинтересовавшимся данным предметом. Симметрии, которые можно наложить на эти системы, мы проигнорируем, а потенциалы и данные рассеяния будут взяты в своем наиболее общем виде. Это позволит избежать погружения в методы алгебраических групп Ли [13], [14], которые исключительно полезны при использовании разнообразных симметрий в подобных задачах на собственные значения. Здесь мы рассматриваем только (1D+1D)-задачи. И, наконец, последнее предупреждение: поскольку данная статья представляет собой обзор, в ней естественна меньшая строгость изложения.

Мы предполагаем, что имеется пара Лакса [15], один член которой является задачей на собственные значения, содержащей “спектральный оператор”, а другой будет называться спектральным эволюционным уравнением. Чтобы получилась пара Лакса, коммутатор операторов этих двух задач должен приводить к интегрируемому эволюционному уравнению. Например, для уравнения КдФ

$$u_t + u_{xxx} + 6u_x u = 0 \quad (1)$$

пара Лакса имеет вид [1]

$$v_{xx} + (k^2 + u)v = 0, \quad (2)$$

$$v_t = (4k^2 - u)v_x + (u_x + \Delta)v. \quad (3)$$

Здесь нижние индексы обозначают частные производные, k^2 – спектральный параметр, $u(x, t)$ – волновая амплитуда КдФ, $v(x, t)$ – функция Йоста, а Δ – произвольная постоянная. Уравнение (2) представляет собой спектральную задачу на собственные значения, а (3) – спектральное эволюционное уравнение. Как легко проверить,

беря смешанные производные $\partial_t v_{xx} - \partial_x^2 v_t$, функция u является решением обоих уравнений (2) и (3), только если она удовлетворяет уравнению (1).

Анализ всех этих интегрируемых систем имеет определенные общие черты. Именно их мы и хотим выделить и описать. Различия между рассматриваемыми системами можно воспринимать как технические особенности задачи, но эти особенности могут быть весьма разнообразными с точки зрения необходимых подходов к решению и получающихся результатов. Разумеется, общие свойства проявляются даже в простейших случаях, так что эти случаи можно использовать как примеры универсальных аспектов ОПР.

Для всех задач общими являются четыре шага. Каждый из них будет рассмотрен в последующих разделах, а для их иллюстрации будут приведены примеры. Первый шаг состоит в определении и анализе так называемых “функций Йоста” и “матрицы рассеяния”. Этот шаг, известный как прямая задача рассеяния, рассматривается в разделе 2. За ним следует обратная задача рассеяния, рассматриваемая в разделе 3. В разделе 4 мы обратимся к возмущениям интегрируемых систем, в частности определим, как изменятся данные рассеяния при заданных возмущениях потенциалов, а также определим, как изменятся потенциалы при заданных возмущениях данных рассеяния. В этом же разделе мы рассмотрим так называемые квадраты собственных функций (КСФ) и квадраты сопряженных собственных функций (КССФ) (определение КСФ состоит в том, что они являются собственными состояниями линейных уравнений для возмущенных потенциалов, в силу чего потенциалы можно раскладывать по КСФ). От этих результатов мы далее перейдем к построению скалярных произведений КСФ на КССФ и к замыканию КСФ и КССФ. По большей части мы не будем рассматривать солитонную структуру, поскольку непрерывные спектры играют главную роль в конструкции интегрируемой теории возмущений. Обычно солитонная часть спектра получается после учета нулей различных миноров матрицы рассеяния и ее обратной. В конце раздела 4 показано, что недавние результаты, касающиеся поиска КСФ и ККСФ в виде сумм произведений (а не просто произведений) функций Йоста, получаются в силу симметрий, налагаемых на матрицу потенциалов. Итог мы подведем в разделе 5.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

В прямой задаче рассеяния мы имеем дело с решениями задачи на собственные значения и с их аналитическими свойствами, с сопряженными решениями и их свойствами, с матрицей рассеяния и ее свойствами, со свойствами связанных состояний, если таковые имеются, с эволюцией матрицы рассеяния, с фундаментальными аналитическими решениями и их сопряженными и т.д. Каждую из этих тем мы рассмотрим ниже, некоторые лишь кратко. Для объяснения терминов целесообразно рассмотреть пример задачи на собственные значения. Для этого будем следовать работе [16] и рассмотрим общую матричную задачу на собственные значения

$$\partial_x V + i\zeta J \cdot V = Q \cdot V \quad (4)$$

на интервале $-\infty < x < +\infty$. Здесь J – постоянная вещественная диагональная $(N \times N)$ -матрица, где N – некоторое положительное целое число. Мы предполагаем, что матрица J диагональна, причем диагональные элементы в общем случае убывают при движении в правый нижний угол матрицы ($J_i \geq J_{i+1}$, где J_i – i -й диагональный элемент). Далее, $Q(x, t, \zeta)$ – это матрица потенциалов, которая может зависеть от спектрального параметра ζ . Известно несколько примеров такой задачи на собственные значения (см. работы [17]–[21]), когда Q действительно зависит от ζ и соответствующие эволюционные уравнения имеют важный физический смысл. Мы также предполагаем, что $Q(x) = o(1/x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Матрица $V(x, t)$ является $(N \times N)$ -матрицей решений, содержащей “функции Йоста” в качестве своих столбцов. Простое определение “функции Йоста” таково: это подходящим образом нормированное решение задачи на собственные значения. Например, для задачи (4) мы зададим функции Йоста их асимптотиками при $x \rightarrow \pm\infty$. При вещественных ζ имеются два типичных набора, фиксированных условиями

$$\Phi(x)|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow e^{-i\zeta Jx}, \quad \Psi(x)|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow e^{-i\zeta Jx}. \quad (5)$$

Для каждой из этих матриц существуют N линейно независимых решений, поэтому столбцы в каждой из двух матриц должны линейно зависеть от столбцов другой. Это можно выразить как

$$\Phi = \Psi S, \quad \Psi = \Phi R, \quad (6)$$

и мы будем называть $S(\zeta, t)$ матрицей рассеяния, а $R(\zeta, t)$ – ее обратной.

Кроме спектральной задачи на собственные значения, пара Лакса должна также содержать спектральное эволюционное уравнение, которое определяет, как эволюционируют данные рассеяния из спектральной задачи. На всякий оператор спектральной эволюции следует наложить определенные связи, которые мы кратко рассмотрим. Удобно иметь дело с уравнениями, записанными в следующем виде:

$$\partial_t V = (B - i\Omega) \cdot V + V \cdot M, \quad \partial_x M = 0, \quad (7)$$

где $\Omega(\zeta)$ – постоянная $(N \times N)$ -матрица, $B(x, t, \zeta)$ – $(N \times N)$ -матрица, которая обычно выражается через компоненты матрицы $Q(x, t, \zeta)$ и их производные. Будем также считать, что B обращается в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. Далее, $M(t, \zeta)$ – это $(N \times N)$ -матрица, не зависящая от x . Ее значение определено асимптотиками матрицы решений V , а потому она является функцией этих асимптотик. Например, функция Йоста Φ не должна, очевидно, зависеть от времени при $x \rightarrow -\infty$. Отсюда, а также из соотношений (5) и (7) следует, что

$$M_\Phi = i \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{i\zeta Jx} \cdot \Omega \cdot e^{-i\zeta Jx}).$$

Аналогично можно было бы найти подходящую матрицу M для любой другой матрицы решений уравнения (4). Как мы увидим ниже, Ω и J должны коммутировать. В этом случае

$$M_\Phi = i\Omega = M_\Psi. \quad (8)$$

Из условия интегрируемости (основной теоремы анализа) следует, что $\partial_t \partial_x V - \partial_x \partial_t V = 0$. Тогда из уравнений (4) и (7) следует, что эволюция матрицы Q должна определяться уравнением

$$\partial_t Q = \partial_x B + [B - i\Omega, Q - i\zeta J], \quad (9)$$

где $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ есть коммутатор A и B . Следовательно, $[\Omega, J] = 0$, если $x \rightarrow \pm\infty$ в (9). Отсюда видим, что матрица Ω не является полностью произвольной или не зависящей от J .

Но довольно про оператор спектральной эволюции! Обратимся к спектральной задаче на собственные значения (4) и рассмотрим некоторые другие ее свойства. Для всякой задачи типа (4) всегда можно построить эквивалентную сопряженную задачу. Для этого надо просто умножить (4) слева на сопряженную матричную функцию $V^A(x, t, \zeta)$, после чего проинтегрировать по частям. Таким образом из уравнения

$$V^A \cdot (\partial_x V + i\zeta J \cdot V - Q \cdot V) = 0 \quad (10)$$

мы получаем сопряженную задачу

$$\partial_x V^A - i\zeta V^A \cdot J = -V^A \cdot Q \quad (11)$$

и в итоге уравнение

$$\partial_x (V^A \cdot V) = 0. \quad (12)$$

Решения сопряженной задачи называются сопряженными функциями Йоста – они являются строками матрицы V^A . Как и функции Йоста, они должны иметь некоторую стандартную нормировку, которую мы выберем в виде

$$\Phi^A(x) \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow e^{i\zeta Jx}, \quad \Psi^A(x) \Big|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow e^{i\zeta Jx}. \quad (13)$$

Тогда из (5), (12) и (13) имеем

$$\Phi^A \cdot \Phi = I = \Psi^A \cdot \Psi \quad \text{для любого } x \text{ и при вещественных } \zeta. \quad (14)$$

Таким образом, в качестве матрицы решений для сопряженных функций Йоста можно взять обратную к регулярной матрице решений. Как следствие формул (6), (12) и (14), имеем также $\Psi^A \Phi = S$ и $\partial_x S = 0$.

Зависимость матриц R и S от времени можно получить из (5) и (7). Полагая $V = \Phi$ и беря предел при $x \rightarrow +\infty$, получаем

$$\partial_t \Phi = e^{-i\zeta Jx} \cdot \partial_t \cdot S = -i\Omega e^{-i\zeta Jx} \cdot S + e^{-i\zeta Jx} \cdot S \cdot M_\Phi. \quad (15)$$

Тогда из (8), а также из того, что J и Ω коммутируют и $RS = I$, следует

$$\partial_t S = i[S, \Omega], \quad \partial_t R = i[R, \Omega]. \quad (16)$$

Отметим для дальнейшего использования, что если в задачах на собственные значения типа (4) параметр ζ вещественный, то всегда можно определить и вычислить скалярное произведение между функциями Йоста и их сопряженными. Для

этого спектральный параметр сопряженных решений выбирают не таким, как для регулярных решений. Исходя из этого мы заменяем (11) на

$$\partial_x V^A - i\zeta^A V^A \cdot J = V^A \cdot Q(\zeta^A), \quad (17)$$

где ζ^A – спектральный параметр для сопряженных состояний. Из (4) и (17) получаем

$$\partial_x [V^A(\zeta^A) \cdot V(\zeta)] = V^A(\zeta^A) \cdot [-i(\zeta - \zeta^A)J + Q(\zeta) - Q(\zeta^A)] \cdot V(\zeta). \quad (18)$$

Положим

$$\mathcal{J}(\zeta^A, \zeta) = \frac{Q(\zeta^A) - Q(\zeta)}{\zeta^A - \zeta} - iJ, \quad (19)$$

тогда скалярное произведение можно определить как

$$\langle V^A(\zeta^A) | V(\zeta) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx V^A(\zeta^A) \cdot \mathcal{J}(\zeta^A, \zeta) V(\zeta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{V^A(\zeta^A) \cdot V(\zeta)}{\zeta - \zeta^A} \right) \Big|_{x=-L}^L. \quad (20)$$

Если Q не зависит от ζ , то $\mathcal{J} = -iJ$, и больше говорить не о чем. С другой стороны, когда в Q имеются зависящие от ζ члены, как это случается в нескольких хорошо известных случаях [17]–[22], не очевидно, что всегда можно разбить правую часть (20) на произведение функции от ζ^A и функции от ζ . Но без этого непонятно, как для этих состояний можно было бы сформулировать соотношение замыкания даже при наличии скалярного произведения. Хотя имеется один пример успешного решения этой проблемы [22], для общего случая этот вопрос остается открытым.

Примем пока, что Q не зависит от ζ . Тогда положим $V = \Phi$, а сопряженное решение возьмем в виде Ψ^A , после чего правая часть равенства (20) примет вид

$$\langle \Psi^A(\zeta^A) | \Phi(\zeta) \rangle = i \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{iJ(\zeta^A - \zeta)L} \cdot S(\zeta) - S(\zeta^A) \cdot e^{-iJ(\zeta^A - \zeta)L}}{\zeta - \zeta^A} \right]. \quad (21)$$

Если ни один из диагональных элементов матрицы J не равен нулю, то для отдельных матричных элементов мы имеем

$$\langle \Psi^A(\zeta^A) | \Phi(\zeta) \rangle_{mn} = \pi S_{mn}(\zeta) [\text{sgn}(J_n) + \text{sgn}(J_m)] \delta(\zeta - \zeta^A), \quad (22)$$

где J_n – n -й диагональный элемент матрицы J , $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, а $\text{sgn}(x)$ – знаковая функция. Заметим, что приведенное выражение не инвариантно относительно изменений в следе матрицы J , которые возникают при замене J на $J + \alpha I_N$, где α – постоянная, а I_N – единичная $(N \times N)$ -матрица.

Ключом к решению обратной задачи рассеяния являются аналитические свойства функций Ёюста и их сопряженных [2], [5]. Как найти эти свойства, к настоящему моменту хорошо известно и подробно описано в учебниках (см., например, книгу [23]). Отметим, что (2×2) -случай задачи (4) детально исследовался в работах [24] и [2], [5]; в работе Захарова и Манакова [25] и статьях автора [26], [27] детально изучался (3×3) -случай задачи (4) при условии, что диагональные элементы матрицы J различны, а (3×3) -случай задачи (4), когда два диагональных элемента матрицы J совпадают, исследовался в работе [28].

В работе [29] впервые успешно продемонстрировано, как провести анализ общего $(N \times N)$ -случая задачи (4), когда Q не зависит от ζ . Мы дадим простой и выразительный пример этих результатов в применении к задаче (4). Во-первых, заметим, что первый столбец в $\Phi e^{i\zeta Jx}$ всегда аналитичен в верхней полуплоскости (ВПП) переменной ζ , а последний столбец всегда аналитичен в нижней полуплоскости (НПП) переменной ζ . Чтобы построить N решений, аналитичных в ВПП, и N других решений, аналитичных в НПП, рассмотрим первый и второй столбцы в $\Phi e^{i\zeta Jx}$, считая, что два первых диагональных элемента матрицы J не совпадают. При $x \rightarrow +\infty$ эти столбцы ведут себя следующим образом:

$$\Phi_1 \cdot e^{i\zeta J_1 x} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} e^{i\zeta(J_1 - J_2)x} \\ S_{31} e^{i\zeta(J_1 - J_3)x} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 \cdot e^{i\zeta J_2 x} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{12} e^{i\zeta(J_2 - J_1)x} \\ S_{22} \\ S_{32} e^{i\zeta(J_2 - J_3)x} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где Φ_j – вектор, составленный из элементов j -го столбца, $j = 1, 2$. В этом пределе первая компонента столбца $\Phi_2 e^{i\zeta J_2 x}$ расходится при ζ из ВПП, а и третья, и все младшие компоненты экспоненциально обращаются в нуль. Тем временем все компоненты столбца $\Phi_1 e^{i\zeta J_1 x}$, кроме первой, экспоненциально обращаются в нуль. В комбинации $(S_{11}\Phi_2 - S_{12}\Phi_1)e^{i\zeta J_2 x}$ обращается в нуль первая компонента, а вторая компонента стремится к постоянному значению $S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$, тогда как все младшие компоненты экспоненциально обращаются в нуль. Кроме того, при $x \rightarrow -\infty$ первая компонента обращается в нуль экспоненциально, вторая стремится к единице, а все младшие компоненты – нули. Таким образом, мы получаем вторую функцию, аналитичную в ВПП. Аналогичное продолжение позволяет получить набор из N линейно независимых функций, которые все аналитичны в ВПП (см., например, работу [8] по поводу всех подробностей доказательства). Сходным образом, начиная с последнего столбца, можно построить набор функций, аналитичных в НПП. Эти два набора решений называются фундаментальными аналитическими решениями (ФАР).

В итоге в ВПП эти ФАР (столбцы) можно собрать в матрицу χ^+ такую, что

$$\chi^+ \cdot e^{i\zeta Jx} = (\Phi_1 e^{i\zeta J_1 x}, (S_{11}\Phi_2 - S_{12}\Phi_1)e^{i\zeta J_2 x}, \dots), \quad (24)$$

причем $\chi^+ \cdot e^{i\zeta Jx}$ аналитична в ВПП. Аналогично можно построить матрицу χ^- такую, что $\chi^- \cdot e^{i\zeta Jx}$ аналитична в НПП.

Заметим по поводу обозначений, что мы пишем верхний индекс $\pm$ для указания на полуплоскость, в которой величина аналитична (с точностью до возможного фазового множителя типа $e^{i\zeta Jx}$).

И χ^+ , и χ^- можно выразить как линейные комбинации функций Йоста, например

$$\chi^+ = \Phi \cdot A_1, \quad (25)$$

где A_1 – некоторая несингулярная матрица. То же можно проделать для сопряженных состояний только с учетом того, что вместо столбцов надо брать строки.

Для систем из работ [17]–[21], где Q является функцией от ζ , структура комплексной плоскости становится, вообще говоря, многостранный. Часто удается отобразить много листов на один, и тогда непрерывный спектр существует вдоль лучей, окружностей и т.д., причем комплексная плоскость нового спектрального параметра в итоге делится на более чем две области. Однако в каждой из этих областей необходимо провести изложенный выше анализ и построить набор из N линейно независимых решений для χ и их сопряженных χ^A , которые (с точностью до известного фазового множителя) будут аналитичны внутри данной области.

До сих пор обсуждалась прямая задача рассеяния для (1D+1D)-пары Лакса, в том числе структура спектрального эволюционного уравнения, в особенности такого, которое представляет интерес с точки зрения ОПР. Многие вопросы не обязательно ограничены рамками ОПР, но могут найти, вообще говоря, применение к дифференциальным задачам на собственные значения. Мы здесь проделали следующее: задали процедуру выбора потенциала Q и преобразования его в данные рассеяния. Данные рассеяния содержатся в матрице рассеяния S и ее обратной R . Разумеется, потенциал Q должен удовлетворять некоторым условиям локализации, для того чтобы предлагаемые решения для S и R существовали, обсуждение этих условий можно найти в других работах (см., например, статьи [8], [23]). Далее мы рассмотрим обратную задачу рассеяния, решение которой определяет, какие части матрицы рассеяния S составляют данные рассеяния.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

В данном разделе мы покажем, что из ФАР (χ^+ и χ^-) и матрицы рассеяния S можно получить набор сингулярных интегральных уравнений для матриц χ^+ и χ^- в терминах ключевой части матрицы S , называемой “данными рассеяния.” Эту задачу можно сформулировать как задачу Римана–Гильберта (РГ). Мы рассмотрим только случай, когда Q не зависит от ζ . Такая задача РГ, вообще говоря, всегда разрешима, если заданы Φ и Ψ вдоль всех границ, а также χ внутри каждой области аналитичности и матрица A_1 из (25), которая связывает χ с Φ вдоль границ между областями аналитичности.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере (2×2) -системы АКС [5], представляющей собой задачу (4), в которой $N = 2$ и

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Перепишем эту систему в других обозначениях – таких, которые применяются при анализе интегрируемых систем высшего порядка, связанных с данной.

После применения процедуры из раздела 2 функции Йоста, как хорошо известно, оказываются аналитическими или в ВПП, или в НПП. Они имеют вид

$$\Phi = (\Phi_1^+, \Phi_2^-), \quad \Psi = (\Psi_1^-, \Psi_2^+), \quad \Phi^A = \begin{pmatrix} \Phi_1^{A-} \\ \Phi_2^{A+} \end{pmatrix}, \quad \Psi^A = \begin{pmatrix} \Psi_1^{A+} \\ \Psi_2^{A-} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Аналитические свойства компонент матриц S и R , первое из которых есть $\text{Det } S = 1$, следуют из функций Йоста, и тогда

$$S = \Psi^A \cdot \Phi = \begin{pmatrix} S_{11}^+ & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}^- \end{pmatrix}, \quad R = S^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^- & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{22}^- & -S_{12} \\ -S_{21} & S_{11}^+ \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где компоненты без верхнего индекса существуют, вообще говоря, только на вещественной оси ζ . Определим теперь χ^+ , χ^- , χ^{A+} и χ^{A-} :

$$\chi^+ = (\Phi_1^+, \Psi_2^+), \quad \chi^- = (\Psi_1^-, \Phi_2^-), \quad \chi^{A+} = \begin{pmatrix} \Psi_1^{A+} \\ \Phi_2^{A+} \end{pmatrix}, \quad \chi^{A-} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{A-} \\ \Psi_2^{A-} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

На вещественной оси χ^+ и χ^- линейно связаны следующим образом:

$$\chi^+ = \chi^- \cdot T, \quad \chi^- = \chi^+ \cdot T^{-1}, \quad (30)$$

где матрицы T и T^{-1} имеют вид

$$T = \frac{1}{S_{22}} \begin{pmatrix} 1 & -S_{12} \\ S_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{R_{22}} \begin{pmatrix} 1 & S_{12} \\ -S_{21} & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Эти матрицы удобно разложить на две части:

$$T = P^- + \bar{\Gamma}, \quad T^{-1} = P^+ + \Gamma, \quad \text{где} \quad P^- = \frac{1}{S_{22}} I, \quad P^+ = \frac{1}{R_{22}} I, \quad (32)$$

а $\bar{\Gamma}$ и Γ содержат коэффициенты отражения, необходимые для инверсии. Заметим, что $P^\pm$ аналитичны в соответствующих полуплоскостях, за исключением тех точек, где или S_{22} , или, в зависимости от ситуации, R_{22} имеют нули. В случае задач высшего порядка для матрицы T возникает то же самое разложение. Определим ρ , $\bar{\rho}$, σ и $\bar{\sigma}$ формулами

$$\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где ρ – коэффициент отражения для инверсии относительно $+\infty$, а σ – коэффициент отражения для инверсии относительно $-\infty$.

Теперь рассмотрим обратную задачу рассеяния. Уравнение (30) можно решить, как задачу РГ. Не вдаваясь в подробности, в случае без солитонов и при ζ из ВПП имеем

$$\chi^+(\zeta) \cdot e^{i\zeta Jx} = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \chi^-(\zeta') \cdot \bar{\Gamma}_1 \cdot (\zeta') e^{i\zeta' Jx}, \quad (34)$$

а при ζ из НПП –

$$\chi^-(\zeta) \cdot e^{i\zeta Jx} = I - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \chi^+(\zeta') \cdot \Gamma_2(\zeta') \cdot e^{i\zeta' Jx}, \quad (35)$$

где $\mathbb{R}$ указывает путь интегрирования – интегралы берутся вдоль вещественной оси. Коль скоро функция Йоста построена из данных рассеяния с использованием формул (34) и (35), потенциал можно восстановить из асимптотик функций Йоста. Под

данными рассеяния мы понимаем те части матриц S и R , которые требуются в (34) и (35), а именно коэффициенты отражения ρ и $\bar{\rho}$ на вещественной оси или коэффициенты отражения σ и $\bar{\sigma}$ на вещественной оси.

Ключевую роль в обратных уравнениях рассеяния (34) и (35) играют ФАР и соотношение (30). Важно и то, как матрица T и ее обратная разлагаются на различные аналитические части в (32). Также следует отметить, что если записать уравнения (34) и (35) по отдельным столбцам, то окажется, что эти линейные дисперсионные соотношения в действительности содержат обе процедуры инверсии: относительно $+\infty$, куда входит только Ψ , и относительно $-\infty$, куда входит только Φ . Это свойство не ограничено рамками (2×2) -случая.

4. ВОЗМУЩЕНИЯ И КВАДРАТЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущих разделах мы описали, как решить прямую и обратную задачи рассеяния. Теперь рассмотрим возмущения этих задач. Сначала получим возмущения данных рассеяния при заданных возмущениях потенциалов, а затем возмущения потенциалов при заданных возмущениях данных рассеяния. Из этого мы затем выведем КСФ, КССФ, их скалярное произведение и соотношение их замыкания. Подход, который мы развивали в работах [11], [30], отличается от исходного подхода работ [9], [10], [31].

Как мы видели в разделе 2, данные рассеяния получаются в результате решения задачи на собственные значения. Таким образом, возмущение задачи на собственные значения даст нам наш первый результат. Как хорошо известно,

$$\partial_x(V^A \cdot \delta V) = V^A \cdot \delta Q \cdot V, \quad (36)$$

где V – любое решение, а δV – его возмущение, возникающее вследствие возмущения δQ , V^A – сопряженное решение. Интегрируя это соотношение и полагая $V = \Phi$ и $V^A = \Psi^A$, в силу того, что $\delta V(-\infty) = 0$ и $\delta V(+\infty) = e^{i\zeta Jx} \cdot \delta S$, получим

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^A \cdot \delta Q \cdot \Phi, \quad (37)$$

откуда можно перейти к вычислению возмущений в данных рассеяния. Заметим, что подынтегральное выражение содержит произведение сопряженной и регулярной компонент. Это произведение является КССФ, а само выражение (37) дает простое объяснение билинейной природы квадрата сопряженных собственных функций.

Применяя описанный подход к (2×2) -системе АКНС (26), получаем [9]

$$\begin{aligned} \delta \rho &= \frac{1}{S_{11}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi_{22}^A \phi_{11} \delta Q_{21} + \phi_{21}^A \phi_{21} \delta Q_{12}), \\ \delta \bar{\rho} &= -\frac{1}{S_{22}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi_{12}^A \phi_{12} \delta Q_{21} + \phi_{11}^A \phi_{22} \delta Q_{12}), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= -\frac{1}{S_{11}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\psi_{12}^A \psi_{12} \delta Q_{21} + \psi_{11}^A \psi_{22} \delta Q_{12}), \\ \delta\bar{\sigma} &= \frac{1}{S_{22}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\psi_{22}^A \psi_{11} \delta Q_{21} + \psi_{21}^A \psi_{12} \delta Q_{12}).\end{aligned}\tag{39}$$

Уравнения (38) – это условие, отвечающее инверсии относительно $+\infty$, а уравнения (39) – инверсии относительно $-\infty$. Соответствующие коэффициенты при δQ_{12} и δQ_{21} под интегралами являются компонентами соответствующих КССФ.

Теперь возмутим соотношения (30) и выразим возмущения потенциалов через возмущения данных рассеяния. Следуя подходу из работ [11], [30] и опуская подробности, получаем

$$\delta Q_{12} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta (\psi_{12}^A \psi_{12} \delta\rho + \psi_{22}^A \psi_{11} \delta\bar{\rho}),\tag{40}$$

$$\delta Q_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta (\psi_{11}^A \psi_{22} \delta\rho + \psi_{21}^A \psi_{21} \delta\bar{\rho}),$$

$$\delta Q_{12} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta (\phi_{12}^A \phi_{12} \delta\bar{\sigma} + \phi_{22}^A \phi_{11} \delta\sigma),\tag{41}$$

$$\delta Q_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta (\phi_{11}^A \phi_{22} \delta\bar{\sigma} + \phi_{21}^A \phi_{21} \delta\sigma).$$

Мы имеем два эквивалентных выражения для δQ , поскольку имеются два различных направления инверсии. Уравнения (40) описывают инверсию относительно $+\infty$, а уравнения (41) – инверсию относительно $-\infty$. Коэффициенты при $\delta\rho$ или $\delta\sigma$ под интегралами являются компонентами соответствующих КСФ.

Анализируя компоненты КСФ и КССФ в приведенных выражениях, мы видим, что простая нумерация КСФ и КССФ с помощью номеров компонент функций Йоста оказалась довольно непрактичной. Для систем высшего порядка ситуация еще хуже. Отметим, что это “нерегулярное” индексирование отчасти обязано своим происхождением появлению нулей на диагонали матрицы потенциалов Q .

Прежде чем двигаться дальше, введем более простую систему нумерации, причем сделаем это только для набора, который связан с инверсией относительно $+\infty$. Тогда подходящими уравнениями будут уравнения (38) и (40). Определим КСФ как векторы

$$Z^+(x, \zeta) = \begin{pmatrix} -\psi_{12}^A \psi_{12} \\ \psi_{11}^A \psi_{22} \end{pmatrix}, \quad Z^-(x, \zeta) = \begin{pmatrix} -\psi_{22}^A \psi_{11} \\ \psi_{21}^A \psi_{21} \end{pmatrix},\tag{42}$$

тогда соотношения (40) переписываются как

$$\delta Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\pi} [Z^+(x, \zeta) \delta\rho(\zeta) + Z^-(x, \zeta) \delta\bar{\rho}(\zeta)],\tag{43}$$

где

$$\delta Q(x) = \begin{pmatrix} \delta Q_{12}(x) \\ \delta Q_{21}(x) \end{pmatrix}.\tag{44}$$

Определим также КССФ как векторы-строки

$$Z^{A+}(x, \zeta) = \frac{1}{S_{11}^2} (\phi_{21}^A \phi_{21}, \phi_{22}^A \phi_{11}), \quad Z^{A-}(x, \zeta) = \frac{1}{S_{22}^2} (-\phi_{11}^A \phi_{22}, -\phi_{12}^A \phi_{12}), \quad (45)$$

тогда уравнения (38) принимают вид

$$\delta\rho(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A+}(x, \zeta) \cdot \delta Q(x), \quad \delta\bar{\rho}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A-}(x, \zeta) \cdot \delta Q(x). \quad (46)$$

Далее мы получим скалярное произведение между КСФ и КССФ. Заметим, что в силу (43) для любых заданных линейных возмущений данных рассеяния (без солитонов) можно получить возмущения потенциалов. С учетом (46) при любых заданных линейных возмущениях потенциалов можно получить результирующие возмущения данных рассеяния (без солитонов). Подставим (43) в (46), получим

$$\begin{aligned} \delta\rho(\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{\pi} [Z^{A+}(x, \zeta) \cdot Z^+(x, \zeta') \delta\rho(\zeta') + Z^{A+}(x, \zeta) \cdot Z^-(x, \zeta') \delta\bar{\rho}(\zeta')], \\ \delta\bar{\rho}(\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{\pi} [Z^{A-}(x, \zeta) \cdot Z^+(x, \zeta') \delta\rho(\zeta') + Z^{A-}(x, \zeta) \cdot Z^-(x, \zeta') \delta\bar{\rho}(\zeta')]. \end{aligned} \quad (47)$$

Поскольку $\delta\rho(\zeta)$ и $\delta\bar{\rho}(\zeta)$ линейно независимы при всех ζ и произвольны, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A\pm}(x, \zeta) \cdot Z^{\pm}(x, \zeta') &= \pi\delta(\zeta - \zeta'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A\pm}(x, \zeta) \cdot Z^{\mp}(x, \zeta') &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Приведенные выражения являются скалярными произведениями КСФ с их сопряженными.

Аналогично, если взять уравнения (46) и подставить их в (43), то, поскольку $\delta Q_{12}(x)$ и $\delta Q_{21}(x)$ линейно независимы при всех x , получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\pi} [Z^+(x, \zeta) \cdot Z^{A+}(x', \zeta) + Z^-(x, \zeta) \cdot Z^{A-}(x', \zeta)] = I_2 \delta(x' - x). \quad (49)$$

Последнее равенство есть соотношение замыкания.

Изложенные выше рассуждения приведены для случая, когда нет связанных состояний ($S_{22}(\zeta) \neq 0$ в НПП и $S_{11}(\zeta) \neq 0$ в ВПП). Однако легко распространить формулы (48) и (49) на случай произвольных связанных состояний. Для уравнений (48) надо вернуться к (42) и (45) и аналогично определить связанные состояния. Их также можно получить из обобщения соотношения (49) на случай, когда имеются связанные состояния. Это обобщение имеет вид

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\zeta}{\pi} Z^+(x, \zeta) \cdot Z^{A+}(x', \zeta) + \int_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{d\zeta}{\pi} Z^-(x, \zeta) \cdot Z^{A-}(x', \zeta) = I_2 \delta(x' - x), \quad (50)$$

где $\mathcal{C}$ – контур из $-\infty$ в $+\infty$, проходящий выше всех нулей компоненты S_{11} в ВПП, а $\bar{\mathcal{C}}$ – контур из $-\infty$ в $+\infty$, проходящий ниже всех нулей компоненты S_{22} в НПП. Это

выражение тождественно выражению (49) в случае, когда нет связанных состояний, но при этом дает его правильное обобщение, если такие состояния имеются. Последнее утверждение следует из асимптотик при больших $|\zeta|$. Обобщение предлагаемого метода на случай со связанными состояниями в настоящее время разрабатывается.

Теперь можно ответить на вопрос, возникший в работах [11], [30], где было обнаружено, что и КСФ, и КССФ даются *суммами* произведений сопряженных функций Йоста и функций Йоста. Такая ситуация несколько необычна, и было не вполне ясно, почему возникают суммы таких произведений. Однако с учетом приведенного выше результата для случая АКНС, когда r и q в (26) не связаны друг с другом, на этот вопрос теперь можно ответить. Ответ состоит в том, что всегда, когда матрица потенциалов в задаче на собственные значения имеет симметрию, КСФ и КССФ в общем случае выражаются суммами. Такая ситуация естественным образом возникает, если по крайней мере одна ненулевая компонента матрицы потенциалов зависит от другой ненулевой компоненты. Это все равно что сказать, что в наличии имеется некоторая симметрия. Заметим, что если выводить КСФ и КССФ в общем случае без симметрий, то сумм не возникает, когда каждая ненулевая компонента матрицы потенциалов не зависит от остальных. Это становится очевидным из выражения (37), которое в действительности представляет собой сумму по всем компонентам возмущения δQ .

Выше мы разобрали простейший возможный случай, для которого можно наблюдать такой результат. Теперь наложим симметрию. Пусть симметрия имеет вид $r = q$ или, что то же самое, $Q_{12} = Q_{21}$. Согласно работе [5] при наличии этой симметрии имеем $\bar{\rho}(\zeta) = -\rho(-\zeta)$ и $S_{22}(\zeta) = S_{11}(-\zeta)$. При этих условиях находим, что

$$Z^{-}(\zeta) = -U \cdot Z^{+}(-\zeta), \quad Z^{A-}(\zeta) = -Z^{A+}(-\zeta) \cdot U, \quad \text{где} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Теперь рассмотрим соотношение (43) при наличии этой симметрии. Заменяя $-\zeta$ на ζ в интеграле, сведем (43) к

$$\delta Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\pi} (I_2 + U) \cdot Z^{+}(x, \zeta) \delta \rho(\zeta). \quad (52)$$

Аналогично, для уравнений (46) получаем

$$\begin{aligned} \delta \rho(\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A+}(x, \zeta) \cdot \delta Q(x), \\ \delta \bar{\rho}(\zeta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A+}(x, -\zeta) \cdot U \cdot \delta Q(x). \end{aligned} \quad (53)$$

Заметим, что $I_2 + U$ — это матрица, все компоненты которой равны 1. Отсюда видим, что равенство (52) редуцируется к

$$\delta q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\pi} K \cdot Z^{+}(x, \zeta) \delta \rho(\zeta), \quad (54)$$

где K – матрица-строка $(1, 1)$. С другой стороны, второе уравнение в (53) редуцируется к тому же, что и первое, а именно к

$$\delta\rho(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx Z^{A+}(x, \zeta) \cdot K^T \delta q(x), \quad (55)$$

где верхний индекс T обозначает транспонирование. Соотношения (54) и (55) в случае с симметрией $r = q$ эквивалентны соотношениям (43) и (46). При наличии данной симметрии новый эквивалентный КСФ есть $K \cdot Z^+(x, \zeta)$, а новый эквивалентный КССФ есть $Z^{A+}(x, \zeta) \cdot K^T$. Они являются суммами и дают верные представления КСФ и КССФ, но только для данной симметрии.

Если бы мы подставили (54) в (55), то получили бы скалярные произведения, что в точности является первым соотношением в (48) в случае верхних знаков. Для соотношения замыкания при наличии данной симметрии мы будем исходить из уравнения (49): умножим его слева на K , а справа – на K^T . Тогда из уравнения (51) в силу равенства $K \cdot U = K$ мы получаем, что оба слагаемых в левой части (50) становятся равными друг другу, откуда следует, что каждое есть половина полной величины интеграла. Далее вернемся к (54) и подставим туда (55). Результат этих двух действий дает

$$K \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\pi} Z^+(x, \zeta) \cdot Z^{A+}(x', \zeta) \right] \cdot K^T = \frac{1}{2} K \cdot I_2 \cdot K^T \delta(x' - x) = \delta(x' - x) \quad (56)$$

– соотношение замыкания для симметричного случая.

5. ИТОГИ

Мы представили краткий обзор ОПР для интегрируемых (1D+1D)-систем, начав с основ метода пар Лакса и далее перейдя к интегрируемой теории возмущений и к КСФ. В разделе 2 пара Лакса и прямая задача рассеяния рассматривались в большей общности, чем в последующих разделах, чтобы подчеркнуть общие свойства, которые обнаруживаются в ОПР по всему спектру известных (1D+1D)-систем. Для обратной задачи рассеяния в разделе 3 общность уменьшилась, но в то же время акцент все равно делался на общих свойствах. В этом разделе мы рассмотрели классический хорошо известный АКНС-случай и на его примере усовершенствовали обозначения, приспособив их к текущим рассуждениям. Солитонная структура при этом не рассматривалась, но на основе сказанного читателю будет несложно включить эффекты связанных состояний в линейные дисперсионные соотношения (34) и (35). Различные шаги наших рассуждений были “скроены” по образцу того, как надо было бы действовать при рассмотрении систем высшего порядка. В разделе 4 мы занялись рассмотрением интегрируемых возмущений в (1D+1D)-системах. Вновь и наш подход в целом, и отдельные его шаги были реализованы так, как это делается в случае систем высшего порядка.

Получение возмущения данных рассеяния из возмущений потенциалов всегда было тривиальным, в то время как центральная проблема нахождения возмущений потенциалов из возмущений данных рассеяния оставалась трудной задачей. В исходном подходе к этой задаче [9], [10] требовалось найти КССФ, из выражений для

возмущений данных рассеяния в терминах возмущений потенциалов. Тогда КССФ выражаются в терминах функций Йоста, и далее из задачи на собственные значения для функций Йоста уже несложно построить задачу на собственные значения для КССФ. С учетом этого можно найти соответствующую сопряженную задачу на собственные значения, которая представляет собой задачу на собственные значения для КСФ. После этого методом проб и ошибок предстоит найти комбинации функций Йоста и сопряженных функций Йоста, которые были бы решениями задачи на собственные значения для КСФ. Далее можно построить скалярные произведения КССФ и КСФ, из которых, наконец, получить, каким же должно быть соотношение замыкания. Всю эту процедуру вполне можно исполнить, но она, вообще говоря, достаточно длинна и трудна для реализации. Более простой метод долгое время использовался и пропагандировался Герджиковым и Христовым [31], которые основывались на методе функций Грина. Более поздний подход, предложенный в работе [30], выглядит более прямым и даже имеет шансы оказаться более простым. Однако на настоящий момент его нельзя полностью реализовать при наличии связанных состояний [11], [30]. Это, однако, не отвращает от использования этого подхода применительно к непрерывному спектру, что мы здесь и сделали в АKNС-случае. С учетом этого мы далее указали на возможность обобщения данного подхода на ситуацию, при которой имеются солитоны и связанные состояния. Как и в предшествующих разделах, наш анализ проводился по образцу того, как это делается при рассмотрении систем высшего порядка.

В результате переформулировки АKNС-случая мы нашли, что интегрируемые возмущения можно рассматривать в новом свете. Нам удалось показать, что когда в интегрируемой системе имеется некоторая симметрия, из-за которой не каждая ненулевая компонента матрицы потенциалов независима от остальных, КСФ и КССФ выражаются в общем случае суммами произведений. Мы также указали, что такие КСФ и КССФ, однако, являются верными только для данной симметрии или какой-либо ее подсимметрии. С другой стороны, если начать с наиболее общей матрицы потенциалов, у которой каждая ненулевая компонента независима от остальных, то получится набор, “накрывающий” КСФ и КССФ – набор, который был бы пригоден в случае без симметрий, равно как и при любой из всех возможных симметрий. В соотношениях (43) и (45) мы представили накрывающий набор КСФ и КССФ для АKNС-системы. Он верен в случае без симметрий, равно как и в случае наличия любой из всех возможных симметрий между r и q . Равенства (54) и (55) дают верный набор КСФ и КССФ, но только при $r = q$.

Благодарности. Я хочу поблагодарить проф. Дж. Янга и проф. В. Герджикова за многочисленные обсуждения, которыми мы обменивались по данному вопросу. Я высоко ценю их терпение и предложения. Данная работа была частично поддержана со стороны NSF (грант № DMS-0505566).

Список литературы

- [1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.

- [3] M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **32**:6 (1972), 1681–1687.
- [4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:25 (1973), 1262–1264.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [6] A. C. Newell, “The inverse scattering transform”, *Solitons*, Topics in Current Physics, **17**, eds. R. K. Bullough, P. J. Caudrey, Springer, New York, 1980, 177–242.
- [7] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Rev. Modern Phys.*, **61**:4 (1989), 763–915.
- [8] V. S. Gerdjikov, “Basic aspects of soliton theory”, *Geometry, Integrability and Quantization*, eds. I. M. Mladenov, A. C. Hirshfeld, Softex, Sofia, 2005, 78–125.
- [9] D. J. Kaup, *J. Appl. Math.*, **31**:1 (1976), 121–133.
- [10] D. J. Kaup, *J. Math. Anal. Appl.*, **54**:3 (1976), 849–864.
- [11] J. Yang, D. J. Kaup, *J. Math. Phys.*, **50**:2 (2009), 023507.
- [12] N. Sasa, J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**:2 (1991), 409–417.
- [13] A. P. Fordy, P. P. Kulish, *Comm. Math. Phys.*, **89**:3 (1983), 427–443.
- [14] V. S. Gerdjikov, “Algebraic and analytic aspects of soliton type equations”, *The Legacy of the Inverse Scattering Transform in Applied Mathematics*, Contemp. Math., **301**, eds. J. Bona, R. Choudhury, D. Kaup, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 35–68.
- [15] P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.
- [16] V. S. Gerdjikov, P. P. Kulish, *Phys. D*, **3**:3 (1981), 549–564.
- [17] D. J. Kaup, A. C. Newell, *J. Math. Phys.*, **19**:4 (1978), 798–801.
- [18] D. J. Kaup, *Phys. D*, **6**:2 (1983), 143–154.
- [19] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **62**:3 (1980), 189–216.
- [20] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **21**:2 (1974), 160–174.
- [21] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **54**:2 (1975), 165–179.
- [22] D. J. Kaup, *J. Math. Phys.*, **25**:8 (1984), 2467–2471.
- [23] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [24] В. А. Марченко, *Докл. АН СССР*, **104**:5 (1955), 695–698.
- [25] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *Письма в ЖЭТФ*, **18**:7 (1973), 413–417.
- [26] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **55**:1 (1976), 9–44.
- [27] D. J. Kaup, A. Reiman, A. Bers, *Rev. Modern Phys.*, **51**:2 (1979), 275–310.
- [28] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **65** (1973), 248–253.
- [29] А. Б. Шабат, *Функц. анализ и прил.*, **9**:3 (1975), 75–78; *Дифференц. уравнения*, **15**:10 (1979), 1824–1834.
- [30] D. J. Kaup, T. I. Lakoba, *J. Math. Phys.*, **37**:1 (1996), 308–323.
- [31] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, *Bulgar. J. Phys.*, **7**:1 (1980), 28–41.