Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Хуснутдинова, А. М. Самсонов, А. С. Захаров,
Нелинейные длинноволновые модели для слоистых вол-
новодов с неидеальным контактом, *ТМФ*, 2009, том 159,
номер 3, 475–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:19:55

© 2009 г.

К. Р. Хуснутдинова*, А. М. Самсонов[†],
А. С. Захаров*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДОВ С НЕИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

Предложена композитная решеточная модель для описания нелинейных волн в волноводе, склеенном из двух слоев. Сначала рассматриваются волны в ангармонической цепочке осциллирующих диполей. Показано, что соответствующая асимптотическая модель для длинных продольных волн совпадает с уравнением типа уравнения Буссинеска, ранее полученным для макроскопического волновода в рамках нелинейной теории упругости. Кроме того, показано, что в рамках данной модели нет простой аналогии между длинными продольными и длинными изгибными волнами. Для композитной решетки получены две новые модельные системы связанных уравнений типа уравнения Буссинеска для длинных нелинейных продольных волн и высказано предположение, что аналогичное описание существует в рамках динамической нелинейной теории упругости.

Ключевые слова: решеточная модель, длинная нелинейная волна, уединенная волна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Слоистые структуры присутствуют повсюду в современной физике; особенно часто они используются в аэрокосмической промышленности и микроэлектронике. Наше исследование нелинейных волн в слоистых волноводах [1]–[3] побуждает к выводу новых модельных систем уравнений. В настоящей работе мы рассматриваем *композитную решеточную модель*, которая основана на сложной цепочке осциллирующих диполей [4]. Такая цепочка является естественным обобщением линейной модели, рассмотренной в работе [5] (см. также [6] и [7]), и нелинейной модели, рассмотренной в работе [8]. Введение этих моделей было мотивировано главным образом их применениями к описанию тонких пленок и твердых тел с микроструктурой. Модель, предложенная в работе [8], также была использована для описания некоторых квазиодномерных кристаллов [9]. Интерес к решеточным моделям возобновился

*Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough LE11 3TU, UK. E-mail: K.Khusnutdinova@lboro.ac.uk

[†]Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург 194021, Россия

в связи с современными применениями так называемых “решеточных материалов” (см., например, статью [10]).

Хотя разностно-дифференциальные уравнения, выведенные для нашей модели, представляют значительный интерес и сами по себе, здесь мы главным образом рассматриваем случаи, когда длинноволновое поведение системы в главном порядке можно описывать относительно простыми системами связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Можно ли вывести такие системы как *нелинейные асимптотические модели* из модели композитной решетки, обладающей всеми основными степенями свободы реальных слоистых упругих структур? Это сложная задача, которая рассматривается в нашей работе. Мы отвечаем на этот вопрос с помощью вывода двух новых модельных систем связанных уравнений типа уравнения Буссинеска. На основе установленного подобия между континуальными моделями для нашей базовой решетки и макроскопическим волноводом мы высказываем предположение, что аналогичное описание существует и в рамках динамической нелинейной теории упругости. Мы заканчиваем статью обсуждением важного отличия между решениями типа уединенных волн для производных u и w одной из этих новых систем,

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= u_x u_{xx} + u_{ttxx} - \delta(u - w), \\w_{tt} - c^2 w_{xx} &= \alpha w_x w_{xx} + \beta w_{ttxx} + \gamma(u - w),\end{aligned}$$

и ее редукцией к одному уравнению Буссинеска в симметричном случае.

2. РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОДА

Рассмотрим связанные цепочки типа Ферми–Паста–Улама [11], состоящие из взаимодействующих частиц массы m (см. рис. 1). Удобно рассматривать эту систему как ангармоническую цепочку осциллирующих диполей $(P_n, \bar{P}_n)$, каждый из которых имеет четыре степени свободы: горизонтальное (u_1^n) и вертикальное (u_2^n) смещения геометрического центра O_n диполя, вращение дипольной оси в плоскости (на угол $\Delta\varphi^n$) и изменение расстояния между двумя полюсами диполя ($2u_4^n$). Это симметричный вариант модели, предложенной и рассмотренной в линейном приближении в связи с динамикой тонких пленок в работе [4]. Данная модель обобщает более простую цепочку диполей (с фиксированным расстоянием между полюсами), изучавшуюся как линейная модель в работе [5] (см. также [6], [7]) и как нелинейная модель в работе [8].

Смещения полюсов (см. рис. 1) можно выразить в терминах координат диполей следующим образом:

$$\begin{aligned}U_1^n &= u_1^n - (l + u_4^n) \sin(\Delta\varphi^n), & U_2^n &= u_2^n + (l + u_4^n) \cos(\Delta\varphi^n) - l, \\ \bar{U}_1^n &= u_1^n + (l + u_4^n) \sin(\Delta\varphi^n), & \bar{U}_2^n &= u_2^n - (l + u_4^n) \cos(\Delta\varphi^n) + l.\end{aligned}$$

Предполагая вращения малыми, $\Delta\varphi^n = u_3^n/l \ll 1$, будем использовать частичные суммы ряда Тейлора для вывода уравнений движения с точностью до квадратичных членов:

$$U_1^n = u_1^n - u_3^n - \frac{u_3^n u_4^n}{l} + \dots, \quad U_2^n = u_2^n + u_4^n - \frac{(u_3^n)^2}{2l} + \dots \quad \text{и т.д.}$$

 Рис. 1. Цепочка осциллирующих диполей $(P_n, \bar{P}_n)$.

Кинетическая энергия n -го диполя имеет вид

$$T_n = \frac{M}{2} \left((\dot{u}_1^n)^2 + (\dot{u}_2^n)^2 + (\dot{u}_4^n)^2 + \left(1 + \frac{u_4^n}{l} \right)^2 (\dot{u}_3^n)^2 \right),$$

где $M = 2m$ – масса диполя. Потенциальная энергия n -го диполя определяется парными взаимодействиями между соседними частицами:

$$\Phi_n = \Phi_{n,n+1} + \Phi_{\overline{n},\overline{n+1}} + \Phi_{n,\overline{n+1}} + \Phi_{\overline{n},n+1} + \Phi_{n-1,n} + \Phi_{\overline{n-1},\overline{n}} + \Phi_{n-1,\overline{n}} + \Phi_{\overline{n-1},n} + \Phi_{n,\overline{n}}, \quad (1)$$

где черта сверху обозначает частицу из второго (“нижнего”) ряда. Пусть потенциальная энергия взаимодействия между любыми двумя соседними частицами задается как

$$\Phi_*(\Delta r_*) = \frac{\tilde{\beta}}{2} \Delta r_*^2 + \frac{\tilde{\gamma}}{3} \Delta r_*^3 + \dots, \quad (2)$$

где $*$ обозначает некоторую пару индексов из (1), Δr_* – изменение расстояния между соответствующими частицами, а $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ обозначает одну из трех возможных пар констант взаимодействия, показанных на рис. 1. Изменение расстояния между одним из полюсов n -го диполя ($\tilde{P}_n$) и одним из полюсов $(n+1)$ -го диполя ($\tilde{P}_{n+1}$) выражается как (см. рис. 2)

$$\Delta r_{\widetilde{n},\widetilde{n+1}} = [(\tilde{U}_1^{n+1} - \tilde{U}_1^n + r_0 \cos \theta_0)^2 + (\tilde{U}_2^{n+1} - \tilde{U}_2^n + r_0 \sin \theta_0)^2]^{1/2} - r_0, \quad (3)$$

где $\tilde{U}_1^n$ ($\tilde{U}_2^n$) и $\tilde{U}_1^{n+1}$ ($\tilde{U}_2^{n+1}$) обозначают горизонтальные (вертикальные) смещения полюсов $\tilde{P}_n$ и $\tilde{P}_{n+1}$ соответственно. Изменение расстояния между полюсами n -го диполя равно $\Delta r_{n,\overline{n}} = 2u_4^n$.

Введем разности $\Delta x = \tilde{U}_1^{n+1} - \tilde{U}_1^n$, $\Delta y = \tilde{U}_2^{n+1} - \tilde{U}_2^n$ и предположим, что они малы по сравнению с r_0 : $\Delta x/r_0 \ll 1$, $\Delta y/r_0 \ll 1$. Тогда можно использовать разложение

$$\begin{aligned} \Delta r_{\widetilde{n},\widetilde{n+1}} &= \Delta x \cos \theta_0 + \Delta y \sin \theta_0 + \frac{1}{2r_0} (\Delta x \sin \theta_0 + \Delta y \cos \theta_0)^2 - \\ &- \frac{1}{2r_0^2} (\Delta x \cos \theta_0 + \Delta y \sin \theta_0)(\Delta x \sin \theta_0 + \Delta y \cos \theta_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

После этого мы выводим уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_n}{\partial \dot{u}_i^n} \right) - \frac{\partial T_n}{\partial u_i^n} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_i^n} = 0$$

Рис. 2. Изменение расстояния между частицами $\tilde{P}_n$ и $\tilde{P}_{n+1}$.

и получаем четыре разностно-дифференциальных уравнения, записанных в компактном виде

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_1^n + \frac{\partial\Phi_n}{\partial u_1^n} &= 0, & M\ddot{u}_2^n + \frac{\partial\Phi_n}{\partial u_2^n} &= 0, \\ M\left[\dot{u}_3^n\left(1 + \frac{u_4^n}{l}\right)^2 + 2\frac{\dot{u}_3^n\dot{u}_4^n}{l}\left(1 + \frac{u_4^n}{l}\right)\right] + \frac{\partial\Phi_n}{\partial u_3^n} &= 0, \\ M\left[\ddot{u}_4^n - \frac{(\dot{u}_3^n)^2}{l}\left(1 + \frac{u_4^n}{l}\right)\right] + \frac{\partial\Phi_n}{\partial u_4^n} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\Phi_n}{\partial u_i^n} &= b_{ij}\Delta_j^n + c_{ij}(\Delta^2)_j^n + d_{ij}u_j^n + g_{ijk}(\Delta^2)_j^n\Delta_k^n + h_{ijk}((\Delta^2)_j^n(\Delta^2)_k^n + \Delta_j^n\Delta_k^n) + \\ &+ (l_{ij}u_3^n + \tilde{l}_{ij}u_4^n)(\Delta^2)_j^n + (m_{ij}u_3^n + \tilde{m}_{ij}u_4^n)\Delta_j^n + p_{ijk}u_j^n u_k^n \end{aligned} \quad (5)$$

и $\Delta_j^n = u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$, $(\Delta^2)_j^n = u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}$. Здесь, как и в последующих формулах, предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Ненулевые коэффициенты в (5) выражаются через параметры решетки следующими явными формулами:

$$\begin{aligned} b_{14} &= -b_{23} = \beta_1 \sin(2\alpha), & b_{ij} &= -b_{ji}; \\ c_{11} &= 2(\beta + \beta_1 \cos^2 \alpha), & c_{22} &= -c_{44} = 2\beta_1 \sin^2 \alpha, & c_{33} &= 2(\beta - \beta_1 \cos^2 \alpha); \\ d_{33} &= -8\beta_1 \cos^2 \alpha, & d_{44} &= -8\beta_1 \sin^2 \alpha - 4\beta_\perp; \\ g_{111} &= 2(\gamma + \gamma_1 \cos^3 \alpha) + \frac{3\beta_1}{d} \cos \alpha \sin^2 \alpha, \\ g_{122} &= g_{212} = g_{144} = 2\gamma_1 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\beta}{d \cos \alpha} + \frac{\beta_1}{d} \cos^3 \alpha - \frac{2\beta_1}{d} \cos \alpha \sin^2 \alpha, \\ g_{133} &= g_{111} - \frac{2\beta_1}{d} \cos \alpha, & g_{234} &= -g_{122} - \frac{2\beta_1}{d} \cos \alpha, \\ g_{313} &= -g_{111} + 4\gamma, & g_{324} &= -g_{414} = g_{423} = g_{122} - \frac{2\beta}{d \cos \alpha}, & g_{ijk} &= g_{ikj}; \\ h_{123} &= -h_{114} = h_{213} = -h_{312} = h_{411} = -\gamma_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\beta_1}{d} \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{\beta_1}{2d} \sin^3 \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{224} &= -h_{422} = -h_{444} = \gamma_1 \sin^3 \alpha + \frac{3\beta_1}{2d} \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\
h_{334} &= h_{123} + \frac{\beta}{d \sin \alpha} - \frac{\beta_1}{d \sin \alpha} \cos^2 \alpha, \\
h_{433} &= h_{411} + \frac{\beta_1}{d} \sin \alpha, \quad h_{ijk} = h_{ikj}; \\
l_{12} &= -8\gamma_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{8\beta_1}{d} \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{4\beta_1}{d} \sin^3 \alpha, \\
l_{34} &= l_{12} + \frac{4\beta}{d \sin \alpha} - \frac{4\beta_1}{d \sin \alpha} \cos(2\alpha), \quad l_{ij} = l_{ji}; \\
\tilde{l}_{11} &= -l_{12}, \quad \tilde{l}_{22} = -\tilde{l}_{44} = 8\gamma_1 \sin^3 \alpha + \frac{12\beta_1}{d} \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\
\tilde{l}_{33} &= l_{12} + \frac{8\beta}{d \sin \alpha} - \frac{8\beta_1}{d \sin \alpha} \cos^2 \alpha; \\
m_{13} &= 8\gamma_1 \cos^3 \alpha - \frac{4\beta_1}{d} \cos \alpha + \frac{12\beta_1}{d} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\
m_{24} &= -8\gamma_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{4\beta_1}{d} \cos \alpha - \frac{4\beta_1}{d} \cos^3 \alpha + \frac{8\beta_1}{d} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad m_{ij} = -m_{ji}; \\
\tilde{m}_{14} &= -m_{24} - \frac{4\beta_1}{d} \cos \alpha, \quad \tilde{m}_{23} = m_{24}, \quad \tilde{m}_{ij} = -\tilde{m}_{ji}; \\
p_{334} &= p_{433} = 2l_{12} - \frac{16\beta_1}{d \sin \alpha} \cos^2 \alpha + \frac{8\beta_1}{d} \sin \alpha, \\
p_{444} &= -16\gamma_1 \sin^3 \alpha - \frac{24\beta_1}{d} \sin \alpha \cos^2 \alpha - 8\gamma_{\perp}, \quad p_{ijk} = p_{ikj}.
\end{aligned}$$

Для проведения этих и последующих расчетов мы применяли символьные вычисления на компьютере с использованием пакета *Mathematica* [12]¹⁾.

3. ДЛИННОВОЛНОВЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ И ИЗГИБНЫХ ВОЛН

Широко распространен подход к выводу приближенных длинноволновых моделей для сложных систем на основе некоторых интуитивных физических предположений о динамике системы, использующихся для упрощения лагранжиана задачи. Однако этот подход всегда приводит к некоторому уравнению, которое может оказаться неправильной асимптотической моделью. Поэтому мы не делаем никаких априорных предположений для упрощения лагранжиана. Мы рассматриваем длинные волны, используя континуальное приближение (см., например, [6])

$$u_i^n(t) = u_i(x, t),$$

$$u_i(x \pm a, t) = u_i(x, t) \pm a u_{i_x}(x, t) + \frac{a^2}{2} u_{i_{xx}}(x, t) \pm \frac{a^3}{6} u_{i_{xxx}}(x, t) + \frac{a^4}{24} u_{i_{xxxx}}(x, t) + \dots$$

и асимптотический анализ возникающей сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

¹⁾По адресу http://www-staff.lboro.ac.uk/~makk/Math-Prog_TMP.tar.gz доступны основные программы этих вычислений.

Уравнения движения (4) принимают вид

$$\begin{aligned}
 Mu_{1tt} &= 2b_{14}a \left(u_{4x} + \frac{a^2}{6} u_{4xxx} \right) + c_{11}a^2 \left(u_{1xx} + \frac{a^2}{12} u_{1xxxx} \right) + N_1, \\
 Mu_{2tt} &= -2b_{14}a \left(u_{3x} + \frac{a^2}{6} u_{3xxx} \right) + c_{22}a^2 \left(u_{2xx} + \frac{a^2}{12} u_{2xxxx} \right) + N_2, \\
 M \left[u_{3tt} \left(1 + \frac{u_4}{l} \right)^2 + 2 \frac{u_{3t} u_{4t}}{l} \left(1 + \frac{u_4}{l} \right) \right] &= 2b_{14}a \left(u_{2x} + \frac{a^2}{6} u_{2xxx} \right) + \\
 &+ c_{33}a^2 \left(u_{3xx} + \frac{a^2}{12} u_{3xxxx} \right) + d_{33}u_3 + N_3, \\
 M \left[u_{4tt} - \frac{(u_{3t})^2}{l} \left(1 + \frac{u_4}{l} \right) \right] &= -2b_{14}a \left(u_{1x} + \frac{a^2}{6} u_{1xxx} \right) - \\
 &- c_{22}a^2 \left(u_{4xx} + \frac{a^2}{12} u_{4xxxx} \right) + d_{44}u_4 + N_4,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где нелинейные члены в правой части равны

$$\begin{aligned}
 N_i &= g_{ijk} \left(a^2 u_{jxx} + \frac{a^4}{12} u_{jxxxx} \right) \left(2au_{kx} + \frac{a^3}{3} u_{kxxx} \right) + \\
 &+ (l_{ij}u_3 + \tilde{l}_{ij}u_4) \left(a^2 u_{jxx} + \frac{a^4}{12} u_{jxxxx} \right) + \\
 &+ h_{ijk} \left[\left(a^2 u_{jxx} + \frac{a^4}{12} u_{jxxxx} \right) \left(a^2 u_{kxx} + \frac{a^4}{12} u_{kxxxx} \right) + \right. \\
 &+ \left. \left(2au_{jx} + \frac{a^3}{3} u_{jxxx} \right) \left(2au_{kx} + \frac{a^3}{3} u_{kxxx} \right) \right] + \\
 &+ \left(m_{ij}u_3 + \tilde{m}_{ij}u_4 \right) \left(2au_{jx} + \frac{a^3}{3} u_{jxxx} \right) + p_{ijk}u_j u_k + \dots, \quad i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что в линейном приближении система (6) распадается на две подсистемы, одна из которых описывает взаимодействие между продольными и дипольными (или осевыми) колебаниями, а вторая – взаимодействие между поперечными и вращательными колебаниями [8]. Это позволяет вывести асимптотические длинноволновые модели для преимущественно *продольных* или *изгибных* волн, как показано ниже. Введем безразмерные переменные

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{A_i}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{X}. \tag{7}$$

Имея в виду преимущественно продольные волны, положим $X/T = v = O(1)$ и найдем масштабирование

$$\frac{A_1}{a} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{A_2}{a} \sim \varepsilon^{3/2}, \quad \frac{A_3}{a} \sim \varepsilon^2, \quad \frac{A_4}{a} \sim \varepsilon, \quad \frac{a}{X} \sim \varepsilon^{1/2}, \tag{8}$$

при котором поведение системы в главном порядке описывается следующей подсистемой уравнений для $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_4$:

$$\begin{aligned}
 & Mv^2\tilde{u}_{1\bar{i}\bar{i}} - a^2(2b_{14}\tilde{u}_{4\bar{x}} + c_{11}\tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}}) + \\
 & + \varepsilon a^3(2m_{41}\tilde{u}_4\tilde{u}_{4\bar{x}} + 8h_{123}\tilde{u}_{1\bar{x}}\tilde{u}_{4\bar{x}} + l_{12}\tilde{u}_4\tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}} - 2g_{111}\tilde{u}_{1\bar{x}}\tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}}) - \\
 & - \varepsilon a^2\left(\frac{b_{14}}{3}\tilde{u}_{4\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{c_{11}}{12}\tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) + O(\varepsilon^2) = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{14}\tilde{u}_{1\bar{x}} - d_{44}\tilde{u}_4 + \varepsilon\left[\frac{Mv^2}{a^2}\tilde{u}_{4\bar{i}\bar{i}} + c_{22}\tilde{u}_{4\bar{x}\bar{x}} + \frac{b_{14}}{3}\tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \right. \\
 & \left. - a(p_{444}\tilde{u}_4^2 + 2m_{41}\tilde{u}_4\tilde{u}_{1\bar{x}} + 4h_{123}(\tilde{u}_{1\bar{x}})^2)\right] + O(\varepsilon^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $m_{41} = -m_{14} = m_{24} + (4\beta_1/d)\cos\alpha$. Из (10) можно выразить $\tilde{u}_4$ в терминах $\tilde{u}_1$ с помощью асимптотической реитерации:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_4 = & \frac{2b_{14}}{d_{44}}\tilde{u}_{1\bar{x}} + \varepsilon\left[4a\left(\frac{b_{14}m_{41}}{d_{44}^2} - \frac{h_{123}}{d_{44}} - \frac{b_{14}^2p_{444}}{d_{44}^3}\right)(\tilde{u}_{1\bar{x}})^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{2b_{14}Mv^2}{a^2d_{44}^2}\tilde{u}_{1\bar{i}\bar{i}\bar{x}} + \left(\frac{2b_{14}c_{22}}{d_{44}^2} + \frac{b_{14}}{3d_{44}}\right)\tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right] + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), возвращаясь к исходным размерным переменным и обозначая $u_1 = u$, с точностью до $O(\varepsilon^2)$ получаем уравнение для длинных нелинейных продольных волн в виде

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = E_1 u_x u_{xx} + E_2 u_{ttxx} + E_3 u_{xxxx}, \tag{12}$$

где коэффициенты c_0 , E_1 , E_2 , E_3 выражаются через параметры решетки:

$$\begin{aligned}
 c_0^2 &= \frac{a^2}{M}(2\beta + \beta_\perp\nu), \quad \nu = \frac{2\beta_1\cos^2\alpha}{\beta_\perp + 2\beta_1\sin^2\alpha}, \\
 E_1 &= \frac{a^2}{M}\left[3\beta_\perp\nu(\nu+1)^2\sin^2\alpha + a\left(4\gamma - 2\nu^3\gamma_\perp\tg^3\alpha + \frac{\gamma_1}{2}\left(\frac{\beta_\perp\nu}{\beta_1\cos\alpha}\right)^3\right)\right], \\
 E_2 &= l^2\nu^2, \quad E_3 = \frac{a^4}{12M}(2\beta + \beta_\perp\nu(1 - 3\nu\tg^2\alpha)).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (12) совпадает с так называемым *уравнением с двумя дисперсиями*, выведенным ранее для макроскопического волновода с использованием подхода нелинейной теории упругости [13] (см. также [14], [15]). Заметим, что, в частности, этот факт является аргументом (на уровне асимптотического анализа) в обсуждаемом вопросе о применимости континуальных моделей к описанию динамики тонких пленок, а также устанавливает связь между параметрами нашей решеточной модели и макроскопическими параметрами континуальной модели. Данный подход требует использования символьных вычислений; его можно применять и к другим решеточным моделям, используемым, например, в численных расчетах молекулярной динамики.

Для рассматриваемых движений приведенное выше уравнение асимптотически эквивалентно как интегрируемому уравнению нелинейной струны [16], [17]

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = E_1 u_x u_{xx} + E_{23} u_{xxx}, \quad (14)$$

где

$$E_{23} = E_2 c_0^2 + E_3 = \frac{a^4}{4M} \left[2\beta\nu \operatorname{tg}^2 \alpha + (2\beta + \beta_\perp \nu) \left(\frac{1}{3} + \nu(\nu - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \right],$$

так и неинтегрируемому регуляризованному уравнению Буссинеска

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = E_1 u_x u_{xx} + \tilde{E}_{23} u_{ttx}, \quad (15)$$

где $\tilde{E}_{23} = E_{23}/c_0^2$. Последнее уравнение более предпочтительно с точки зрения численного моделирования (см., например, [18], [19]).

В главном порядке соотношение между осевым смещением и горизонтальной деформацией имеет вид $u_4 = -\nu u_{1x} + \dots$, что можно рассматривать как решеточный аналог эффекта Пуассона в теории упругости [20], причем параметр ν соответствует коэффициенту Пуассона, тогда как члены высшего порядка в (11) дают поправки к этому соотношению (ср. [14], [15]).

Слабые (т.е. высшего порядка по ε) поперечные и вращательные движения подчинены продольным волнам и описываются следующей подсистемой уравнений на $\tilde{u}_2$ и $\tilde{u}_3$:

$$\begin{aligned} & Mv^2 \tilde{u}_{2\bar{i}\bar{i}} + a^2 (2b_{14} \tilde{u}_{3\bar{x}} - c_{22} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}}) - \varepsilon a^3 (2m_{24} (\tilde{u}_3 \tilde{u}_{4\bar{x}} + \tilde{u}_{3\bar{x}} \tilde{u}_4) + 8h_{123} \tilde{u}_{1\bar{x}} \tilde{u}_{3\bar{x}} + \\ & + 8h_{224} \tilde{u}_{2\bar{x}} \tilde{u}_{4\bar{x}} + l_{12} \tilde{u}_3 \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}} + \hat{l}_{22} \tilde{u}_4 \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}} + 2g_{122} (\tilde{u}_{1\bar{x}} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}} + \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}} \tilde{u}_{2\bar{x}})) + \\ & + \varepsilon a^2 \left(\frac{b_{14}}{3} \tilde{u}_{3\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \frac{c_{22}}{12} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) + O(\varepsilon^2) = 0, \\ & 2b_{14} \tilde{u}_{2\bar{x}} + d_{33} \tilde{u}_3 + \varepsilon \left[-\frac{Mv^2}{a^2} \tilde{u}_{3\bar{i}\bar{i}} + c_{33} \tilde{u}_{3\bar{x}\bar{x}} + \frac{b_{14}}{3} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + 2a(p_{334} \tilde{u}_3 \tilde{u}_4 - \right. \\ & \left. - m_{13} \tilde{u}_3 \tilde{u}_{1\bar{x}} - m_{24} \tilde{u}_4 \tilde{u}_{2\bar{x}} - 4h_{123} \tilde{u}_{1\bar{x}} \tilde{u}_{2\bar{x}}) \right] + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Исключая $\tilde{u}_3$, получаем уравнение для $\tilde{u}_2$, которое в размерных переменных имеет вид

$$u_{2tt} - c_0^2 (u_{2x} u_{1xx} + u_{2xx} u_{1x}) - l^2 u_{2ttxx} + \frac{2a^2 l^2}{M} \beta u_{2xxxx} = 0.$$

В главном порядке вращательные движения определяются из соотношения $u_3 = lu_{2x} + \dots$.

Интересно также рассмотреть случай преимущественно изгибных волн, вводя другое масштабирование:

$$\frac{A_1}{a} \sim \varepsilon^{3/2}, \quad \frac{A_2}{a} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{A_3}{a} \sim \varepsilon, \quad \frac{A_4}{a} \sim \varepsilon^2, \quad \frac{a}{X} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{X}{T} = v \sim 1. \quad (16)$$

С точностью до $O(\varepsilon^2)$ это приводит к следующей подсистеме уравнений на $\tilde{u}_2$ и $\tilde{u}_3$:

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{2\bar{i}\bar{i}} + \frac{a^2}{Mv^2} \left[(2b_{14} \tilde{u}_{3\bar{x}} - c_{22} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}}) + \varepsilon \left(\frac{b_{14}}{3} \tilde{u}_{3\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \frac{c_{22}}{12} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) \right] = 0, \\ & \tilde{u}_{2\bar{x}} + \frac{d_{33}}{2b_{14}} \tilde{u}_3 + \frac{\varepsilon}{2b_{14}} \left(-\frac{Mv^2}{a^2} \tilde{u}_{3\bar{i}\bar{i}} + c_{33} \tilde{u}_{3\bar{x}\bar{x}} + \frac{b_{14}}{3} \tilde{u}_{2\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Рис. 3. Композитная решетка с идеальным контактом.

Как и выше, исключая $\tilde{u}_3$ из второго уравнения с помощью асимптотической реитерации (в главном порядке $\tilde{u}_3 = l\tilde{u}_{2x} + \dots$) и возвращаясь к исходным переменным, получаем линейное уравнение на u_2 :

$$u_{2tt} = l^2 u_{2ttxx} - \frac{2a^2 l^2}{M} \beta u_{2xxx},$$

которое является аналогом уравнения для изгибных волн в упругих волноводах, когда учитывают эффект вращательной инерции, но пренебрегают эффектом сдвиговых деформаций (см., например, [21]).

4. КОМПОЗИТНАЯ РЕШЕТКА С ИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

Рассмотрим симметричную решетку, изображенную на рис. 3, для двух идентичных волноводов, спаянных друг с другом таким образом, что смещения и напряжения непрерывны при переходе через контакт (так называемый *идеальный* контакт, см., например, [22]). Переменные $u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$, соответствующие смещениям граничных частиц P_n и $\bar{P}_n$, определяются, как в разделе 2. Горизонтальные и вертикальные смещения центральных частиц O_n описываются переменными u_5^n и u_6^n соответственно (см. рис. 3). Выводя дискретные и непрерывные уравнения, как и выше, и вводя безразмерные переменные (7), мы находим масштабирование для преимущественно *продольных* волн в виде

$$\frac{A_1}{a} \sim \frac{A_5}{a} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{A_2}{a} \sim \frac{A_6}{a} \sim \varepsilon^{3/2}, \quad \frac{A_3}{a} \sim \varepsilon^2, \quad \frac{A_4}{a} \sim \varepsilon, \\ \frac{a}{X} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{X}{T} = v \sim 1.$$

Предполагая, что центральные частицы не сдвигаются слишком далеко от геометрического центра диполя, запишем

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_5 + \varepsilon \tilde{w}_1 + \dots, \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_6 + \varepsilon \tilde{w}_2 + \dots,$$

где $\tilde{w}_{1,2}$ – неизвестные функции. Это предположение является аналогом гипотезы о почти плоском поперечном сечении в теории упругих стержней и балок (см. монографии [14], [15]).

Далее мы асимптотически выводим независимую асимптотическую подсистему уравнений для преимущественно продольных волн. Она следует из уравнений на $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_4$ и $\tilde{u}_5$ и имеет вид

$$Mv^2\tilde{u}_{5\bar{t}\bar{t}} = 3a^2((\beta + \beta_1 \cos^2 \alpha)\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}} - 2\beta_1(\cos^2 \alpha)\tilde{w}_1) - \varepsilon(Mv^2w_{1\bar{t}\bar{t}} + a^3(D_3\tilde{w}_1\tilde{u}_4 + D_4\tilde{w}_1\tilde{u}_{5\bar{x}} + D_5\tilde{u}_4\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}} + D_6\tilde{u}_{5\bar{x}}\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}})) + \varepsilon a^2(D_7\tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}} + D_8\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

$$0 = (3\beta_{\perp} + 6\beta_1 \sin^2 \alpha)\tilde{u}_4 + 3\beta_1 \sin(2\alpha) \cdot \tilde{u}_{5\bar{x}} + \varepsilon\left(\frac{Mv^2}{a^2}\tilde{u}_{4\bar{t}\bar{t}} + D_9\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + a(D_{10}\tilde{u}_4^2 + D_{11}\tilde{u}_4\tilde{u}_{5\bar{x}} + D_{12}(\tilde{u}_{5\bar{x}})^2)\right) + O(\varepsilon^2), \quad (18)$$

$$Mv^2\tilde{u}_{5\bar{t}\bar{t}} = 3a^2(4\beta_1(\cos^2 \alpha)\tilde{w}_1 + 2\beta_1 \sin(2\alpha)\tilde{u}_{4\bar{x}} + (\beta + 2\beta_1 \cos^2 \alpha)\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}}) - \varepsilon a^3(D_{13}\tilde{w}_1\tilde{u}_4 + D_{14}\tilde{w}_1\tilde{u}_{5\bar{x}} + D_{15}\tilde{u}_4\tilde{u}_{4\bar{x}} + D_{16}\tilde{u}_{4\bar{x}}\tilde{u}_{5\bar{x}} + D_{17}\tilde{u}_4\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}} + D_{18}\tilde{u}_{5\bar{x}}\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}}) + \varepsilon a^2(D_{19}\tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}} + D_{20}\tilde{u}_{4\bar{x}\bar{x}} + D_{21}\tilde{u}_{5\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

где $D_1, \dots, D_{21}$ – некоторые промежуточные коэффициенты. Из уравнения (17), используя асимптотическую реитерацию, выразим $\tilde{w}_1$ через $\tilde{u}_4$ и $\tilde{u}_5$. Тогда $\tilde{u}_4$ можно найти из уравнения (18) в терминах $\tilde{u}_5$, снова используя асимптотическую реитерацию. Затем из уравнения (19) выводится уравнение на $\tilde{u}_5$, которое имеет следующий размерный вид:

$$u_{5\bar{t}\bar{t}} - c_0^2 u_{5\bar{x}\bar{x}} = F_1 u_{5\bar{x}} u_{5\bar{x}\bar{x}} + F_2 u_{5\bar{t}\bar{t}\bar{x}\bar{x}} + F_3 u_{5\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + F_4 u_{5\bar{t}\bar{t}\bar{t}\bar{t}},$$

где

$$c_0^2 = \frac{a^2}{M} (3\beta + 2\beta_{\perp} \nu), \quad \nu = \frac{2\beta_1 \cos^2 \alpha}{\beta_{\perp} + 2\beta_1 \sin^2 \alpha},$$

$$F_1 = \frac{a^2}{M} \left[6\beta_{\perp} \nu (1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha + a \left(6\gamma - 4\nu^3 \gamma_{\perp} \operatorname{tg}^3 \alpha + \gamma_1 \left(\frac{\beta_{\perp} \nu}{\beta_1 \cos \alpha} \right)^3 \right) \right],$$

$$F_2 = \frac{2}{3} \left[l^2 \nu^2 - a^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta_1 \cos^2 \alpha} \right) \right],$$

$$F_3 = \frac{a^4}{M} \left(\frac{9}{4} \beta + \frac{2}{3} \beta_{\perp} \nu + \frac{\beta^2}{\beta_1 \cos^2 \alpha} \right), \quad F_4 = \frac{M}{9\beta_1 \cos^2 \alpha}$$

и $u_4 = -l\nu u'_5 + \dots$. Заметим, что это также уравнение типа уравнения Буссинеска. Для рассматриваемых движений слабо поперечные и вращательные движения подчинены продольным волнам аналогично предыдущему разделу.

Случай преимущественно изгибных волн можно также рассмотреть, вводя масштабирование

$$\frac{A_1}{a} \sim \frac{A_5}{a} \sim \varepsilon^{3/2}, \quad \frac{A_2}{a} \sim \frac{A_6}{a} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{A_3}{a} \sim \varepsilon, \quad \frac{A_4}{a} \sim \varepsilon^2,$$

$$\frac{a}{X} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{X}{T} = v \sim 1.$$

Рис. 4. Композитная решетка с неидеальным контактом.

Повторяя те же шаги, что и для продольных волн, получаем более точное уравнение для изгибных волн по сравнению со случаем однослойной решетки:

$$u_{6tt} = \frac{2}{3} l^2 (1 - \nu) u_{6ttxx} - \frac{2a^2 l^2}{3M} \left(3\beta + \frac{3}{4} \beta_{\perp} \nu \right) u_{6xxxx} + \frac{\nu M}{9\beta_1 \cos^2 \alpha} u_{6tttt}.$$

Это аналог более точного уравнения для изгибных волн в упругом волноводе, когда учитывается отклонение, возникающее из-за сдвига (см., например, книгу [21]).

5. КОМПОЗИТНАЯ РЕШЕТКА С НЕИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

Для двух волноводов со слоем более мягкого материала (“клея”) между ними (что обычно моделируется как *неидеальный* контакт, см., например, [22]) мы предлагаем композитную решеточную модель, изображенную на рис. 4; для нее мы выводим асимптотическую модель длинных нелинейных *продольных* волн. Существует много исследований линейных волн в слоистых структурах с различными типами неидеального контакта (см., например, работы [22], [23] и приведенную в них библиографию), однако нам не известны какие-либо исследования, приводящие к системе связанных нелинейных волновых уравнений для слоистого волновода с неидеальным контактом. В настоящей работе мы асимптотически выводим такие системы из нашей композитной решеточной модели. Обозначения для решеточных параметров и переменных показаны на рис. 4.

Чтобы получить уравнения Эйлера–Лагранжа для композитной решетки, мы введем полную потенциальную энергию n -го элемента решетки:

$$\Phi_n^{\text{total}} = \Phi_n + \hat{\Phi}_n + \Phi_n^g,$$

где Φ_n – потенциальная энергия n -го диполя верхнего слоя (см. формулы (1)–(3)), $\hat{\Phi}_n$ выражается аналогичными формулами для потенциальной энергии n -го диполя нижнего слоя, а Φ_n^g – энергия взаимодействия между слоями (т.е. энергия связывающего слоя, или “клея”):

$$\Phi_n^g = \Phi_{\bar{n}, n+1}^g + \Phi_{n, n+1}^g + \Phi_{n-1, n}^g + \Phi_{n-1, \bar{n}}^g + \Phi_{n, \bar{n}}^g. \quad (20)$$

Соответствующие формулы подобны формулам (1)–(3), но относятся к частицам, взаимодействующим через связывающий слой.

Предположим, что связывающий слой является мягким, и введем масштабирование

$$\beta_g = \varepsilon^2 \tilde{\beta}_g, \quad \beta_{g\perp} = \varepsilon^2 \tilde{\beta}_{g\perp}, \quad \gamma_g = \varepsilon^2 \tilde{\gamma}_g, \quad \gamma_{g\perp} = \varepsilon^2 \tilde{\gamma}_{g\perp}.$$

Мы выводим уравнения движения, их континуальную аппроксимацию и далее используем масштабирование, найденное в разделе 2 для случая преимущественно продольных волн, для асимптотического вывода подсистемы из четырех уравнений на $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_4$, $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_4$, которые подобны паре связанных однослойных подсистем:

$$\begin{aligned} & M_1 v^2 \tilde{u}_{1\bar{t}\bar{t}} - a^2 (2b_{14} \tilde{u}_{4\bar{x}} + c_{11} \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}}) + \\ & + \varepsilon a^3 (2m_{41} \tilde{u}_4 \tilde{u}_{4\bar{x}} + 8h_{123} \tilde{u}_{1\bar{x}} \tilde{u}_{4\bar{x}} + l_{12} \tilde{u}_4 \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}} - 2g_{111} \tilde{u}_{1\bar{x}} \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}}) - \\ & - \varepsilon a^2 \left(\frac{b_{14}}{3} \tilde{u}_{4\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{c_{11}}{12} \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - 2\tilde{\beta}_g (\cos^2 \alpha_g) (\tilde{u}_1 - \tilde{w}_1) \right) + O(\varepsilon^2) = 0, \\ & 2b_{14} \tilde{u}_{1\bar{x}} - d_{44} \tilde{u}_4 + \varepsilon \left(\frac{M_1 v^2}{a^2} \tilde{u}_{4\bar{t}\bar{t}} + c_{22} \tilde{u}_{4\bar{x}\bar{x}} + \frac{b_{14}}{3} \tilde{u}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \right. \\ & \left. - a(p_{444} \tilde{u}_4^2 + 2m_{41} \tilde{u}_4 \tilde{u}_{1\bar{x}} + 4h_{123} (\tilde{u}_{1\bar{x}})^2) \right) + O(\varepsilon^2) = 0, \\ & M_2 v^2 \tilde{w}_{1\bar{t}\bar{t}} - a^2 (2\hat{b}_{14} \tilde{w}_{4\bar{x}} + \hat{c}_{11} \tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}}) + \\ & + \varepsilon a^3 (2\hat{m}_{41} \tilde{w}_4 \tilde{w}_{4\bar{x}} + 8\hat{h}_{123} \tilde{w}_{1\bar{x}} \tilde{w}_{4\bar{x}} + \hat{l}_{12} \tilde{w}_4 \tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}} - 2\hat{g}_{111} \tilde{w}_{1\bar{x}} \tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}}) - \\ & - \varepsilon a^2 \left(\frac{\hat{b}_{14}}{3} \tilde{w}_{4\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{\hat{c}_{11}}{12} \tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - 2\tilde{\beta}_g (\cos^2 \alpha_g) (\tilde{w}_1 - \tilde{u}_1) \right) + O(\varepsilon^2) = 0, \\ & 2\hat{b}_{14} \tilde{w}_{1\bar{x}} - \hat{d}_{44} \tilde{w}_4 + \varepsilon \left(\frac{M_2 v^2}{a^2} \tilde{w}_{4\bar{t}\bar{t}} + \hat{c}_{22} \tilde{w}_{4\bar{x}\bar{x}} + \frac{\hat{b}_{14}}{3} \tilde{w}_{1\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \right. \\ & \left. - a(\hat{p}_{444} \tilde{w}_4^2 + 2\hat{m}_{41} \tilde{w}_4 \tilde{w}_{1\bar{x}} + 4\hat{h}_{123} (\tilde{w}_{1\bar{x}})^2) \right) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Исключая $\tilde{u}_4$ и $\tilde{w}_4$ из приведенных уравнений, в главном порядке поведение системы можно описать в терминах $\tilde{u}_1$ и $\tilde{w}_1$ системой *связанных уравнений с двумя дисперсиями*, которые в исходных размерных переменных принимают вид (в обозначениях $u_1 = u$ и $w_1 = w$)

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_0^2 u_{xx} &= E_1 u_x u_{xx} + E_2 u_{ttxx} + E_3 u_{xxxx} - E_4 (u - w), \\ w_{tt} - \hat{c}_0^2 w_{xx} &= \hat{E}_1 w_x w_{xx} + \hat{E}_2 w_{ttxx} + \hat{E}_3 w_{xxxx} - \hat{E}_4 (w - u). \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты c_0 , E_1 , E_2 , E_3 определены в (13), где нужно заменить M на M_1 и положить $E_4 = (2\beta_g/M_1) \cos^2 \alpha_g$. Аналогичные коэффициенты во втором уравнении получаются заменой постоянных верхнего слоя на их аналоги для нижнего слоя. Как и раньше, для рассматриваемых движений эта система асимптотически эквивалентна различным типам связанных уравнений Буссинеска. В следующем

разделе, имея в виду преимущества с точки зрения численных расчетов, мы подробнее рассмотрим *связанные регуляризованные уравнения Буссинеска*:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_0^2 u_{xx} &= E_1 u_x u_{xx} + \left(E_2 + \frac{E_3}{c_0^2} \right) u_{ttxx} - E_4(u - w), \\ w_{tt} - \hat{c}_0^2 w_{xx} &= \hat{E}_1 w_x w_{xx} + \left(\hat{E}_2 + \frac{\hat{E}_3}{\hat{c}_0^2} \right) w_{ttxx} - \hat{E}_4(w - u). \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично, ослабляя условия на коэффициенты склеивающего слоя до

$$\beta_g = \varepsilon \tilde{\beta}_g, \quad \beta_{g\perp} = \varepsilon \tilde{\beta}_{g\perp}, \quad \gamma_g = \varepsilon \tilde{\gamma}_g, \quad \gamma_{g\perp} = \varepsilon \tilde{\gamma}_{g\perp}$$

и повторяя сделанные выше шаги, получаем вторую асимптотическую длинноволновую модель, которая в размерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} - (c_0^2 + c_g^2) u_{xx} &= E_1 u_x u_{xx} + E_2 u_{ttxx} + E_3 u_{xxxx} - (E_4 + E_5 w_x)(u - w) - E_6 w_{xx}, \\ w_{tt} - (\hat{c}_0^2 + \hat{c}_g^2) w_{xx} &= \hat{E}_1 w_x w_{xx} + \hat{E}_2 w_{ttxx} + \hat{E}_3 w_{xxxx} - (\hat{E}_4 + \hat{E}_5 u_x)(w - u) - \hat{E}_6 u_{xx}, \end{aligned}$$

где коэффициенты такие же, как в (21), и, кроме того,

$$\begin{aligned} c_g^2 &= \frac{l^2 \nu^2}{M_1} (\beta_{g\perp} + 2\beta_g \sin^2 \alpha_g), \\ E_5 &= \frac{1}{M_1} \left[\beta_g (-6 \sin^2 \alpha_g \cos^2 \alpha_g + (\nu + \hat{\nu})(3 \cos^2 \alpha_1 - 1) \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_{g\perp} \frac{a}{2h} (\nu + \hat{\nu}) \operatorname{tg} \alpha - 2a \gamma_g (2 \cos \alpha_g + (\nu + \hat{\nu}) \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha_1) \cos^2 \alpha_g \right], \\ E_6 &= \frac{a^2}{4M_1} [2\beta_g (2 \cos^2 \alpha_g + (\nu + \hat{\nu}) \operatorname{tg} \alpha \sin(2\alpha_g) + \nu \hat{\nu} \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha_g) + \beta_{g\perp} \nu \hat{\nu} \operatorname{tg}^2 \alpha], \end{aligned}$$

а аналогичные коэффициенты во втором уравнении получаются заменой постоянных для верхнего слоя на их аналоги для нижнего слоя. На основе установленного подобия между континуальными моделями для нашей основной решеточной модели и макроскопического волновода (см. раздел 3) мы предполагаем, что подобное описание можно получить и в рамках динамической нелинейной теории упругости, используя примерно те же идеи, что и для композитной решетки.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение сравним численные решения связанных регуляризованных уравнений Буссинеска (22) (здесь мы запишем их в канонически масштабированном виде)

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= u_x u_{xx} + u_{ttxx} - \delta(u - w), \\ w_{tt} - c^2 w_{xx} &= \alpha w_x w_{xx} + \beta w_{ttxx} + \gamma(u - w) \end{aligned} \quad (23)$$

для двух наборов параметров. В симметричном случае, когда $c = \alpha = \beta = 1$, уравнения (23) допускают редукцию $w = u$, где u удовлетворяет регуляризованному уравнению Буссинеска

$$u_{tt} - u_{xx} = u_x u_{xx} + u_{ttxx}. \quad (24)$$

Рис. 5. Классическая уединенная волна при $t = 100$ ($c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0.1$, $v = 1.2$).

Рис. 6. Обобщенная уединенная волна при $t = 100$ ($c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1.1$, $\gamma = \delta = 0.1$, $v = 1.2$).

Заметим, что данное уравнение появляется как асимптотическая модель для однородного волновода (см. раздел 2) и для симметричного двуслойного волновода с идеальной границей раздела (см. раздел 4).

Уравнение (24) имеет частные решения в виде *классических* (или *чистых*) уединенных волн для производной от u :

$$u_x = A \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - vt}{\Lambda}\right), \quad A = 3(v^2 - 1), \quad \Lambda = \frac{2v}{\sqrt{v^2 - 1}}. \quad (25)$$

Численный анализ показывает, что когда симметрия нарушена, основная уединенная волна сопровождается рябью малой амплитуды, распространяющейся со скоростью уединенной волны. Таким образом, из-за резонанса между уединенной волной и распространяющейся вместе с ней периодической волной образуется *обобщенная* уединенная волна (см., например, работу [24] и приведенную там библиографию) вместо чистой уединенной волны. Численные решения уравнений (23) в виде классических и обобщенных уединенных волн показаны на рис. 5 и 6. В обоих случаях начальные условия были взяты как решение (25) в виде чистой уединенной волны и для u_x , и для w_x .

Полученные результаты указывают на важное различие в поведении нелинейных волн в слоистых структурах с неидеальным контактом по сравнению с предельным случаем идеального контакта и побуждают к исследованию выведенных нами новых модельных систем, а также к получению аналогичных систем в рамках

нелинейной теории упругости. Отмеченный эффект может быть связан с недавно наблюдавшимся отличием в скорости затухания уединенной волны деформации в таких структурах [3].

Благодарности. Данное исследование было поддержано UK EPSRC (грант № EP/D035570/1).

Список литературы

- [1] K. R. Khusnutdinova, A. M. Samsonov, *Phys. Rev. E*, **77**:6 (2008), 066603.
- [2] G. V. Dreiden, K. R. Khusnutdinova, A. M. Samsonov, I. V. Semenova, *J. Appl. Phys.*, **104**:8 (2008), 086106.
- [3] G. V. Dreiden, K. R. Khusnutdinova, A. M. Samsonov, I. V. Semenova, *Strain*, 2009.
- [4] К. Р. Хуснутдинова, “Волновая динамика среды, построенной на основе двухрядной системы частиц”, *Глубокая переработка углеводородного сырья*, 2, ЦНИИТЭнефтехим, М., 1993, 136–145.
- [5] A. Askar, *Lattice Dynamical Foundations of Continuum Theories*, Ser. Theoret. Appl. Mech., **2**, World Sci., Singapore, 1985.
- [6] G. A. Maugin, *Nonlinear Waves in Elastic Crystals*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- [7] Е. А. Ильюшина, *К построению теории упругости неоднородных твердых тел с микроструктурой*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1976.
- [8] К. Р. Хуснутдинова, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1992, № 2, 71–76.
- [9] T. N. Dragunov, I. S. Pavlov, A. I. Potapov, *Phys. Solid State*, **39**:1 (1997), 118–124.
- [10] F. Côté, V. S. Deshpande, N. A. Fleck, A. G. Evans, *Internat. J. Solids Structures*, **43**:20 (2006), 6220–6242.
- [11] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, “Studies on nonlinear problems, I”, *Nonlinear Wave Motion*, Lecture Appl. Math., **15**, ed. A. C. Newell, AMS, Providence, RI, 1974, 143–156.
- [12] *Mathematica*, *Wolfram Mathematica*, <http://www.wolfram.com>, Wolfram Research Inc.
- [13] А. М. Самсонов, *Докл. АН СССР*, **277**:2 (1984), 332–335.
- [14] A. M. Samsonov, *Strain Solitons in Solids and How to Construct Them*, Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **117**, CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [15] A. V. Porubov, *Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids*, Ser. Stab. Vib. Control Syst. Ser. A, **9**, World Scientific, Singapore, 2003.
- [16] В. Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **65**:1 (1973), 219–225.
- [17] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [18] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, **272**:1220 (1972), 47–78.
- [19] C. I. Christov, G. A. Maugin, M. G. Velarde, *Phys. Rev. E*, **54**:4 (1996), 3621–3638.
- [20] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- [21] E. Volterra, E. C. Zachmanoglou, *Dynamics of Vibrations*, Charles E. Merrill Books, Columbus, 1965.
- [22] P. A. Martin, “Thin interface layers: adhesives, approximations and analysis”, *Elastic Waves and Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, eds. S. K. Datta, J. D. Achenbach, Y. S. Rajapakse, North-Holland, Amsterdam, 1990, 217–222.
- [23] O. Avila-Pozos, A. B. Movchan, *J. Engrg. Math.*, **45**:2 (2003), 155–168.
- [24] C. Fochesato, F. Dias, R. Grimshaw, *Phys. D*, **210**:1–2 (2005), 96–117.