Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, В. Хуссен, Виртуальные многосолитонные решения в форме Хироты $N = 2$ суперсимметричных уравнений Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 490–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:13:23

© 2009 г.

А. В. Киселев*, В. Хуссен†

ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ФОРМЕ ХИРОТЫ $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Доказано, что $N = 2$ суперсимметричные уравнения Кортевега–де Фриза с параметром $a = 1$ или $a = 4$, полученные Матье, допускают n -суперсолитонные решения в форме Хироты, причем нелинейное взаимодействие солитонов не влечет сдвигов фаз. Для начальных данных, не отличимых от профиля односолитонного решения при $t \ll 0$, установлена возможность спонтанного распада и перехода в решение солитонного типа с другим волновым числом за конечное время. Указанный парадоксальный эффект для вполне интегрируемых $N = 2$ суперсимметричных уравнений Кортевега–де Фриза реализуется, если исходный солитон был нагружен дополнительными виртуальными солитонами, которые становятся наблюдаемыми через τ -функцию Хироты с течением времени.

Ключевые слова: солитоны Хироты, $N = 2$ суперсимметричное уравнение КдФ, система Красильщика–Керстена, сдвиг фаз, спонтанный распад.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $u(x, t; \theta_1, \theta_2)$ – скалярное комплексное бозонное $N = 2$ суперполе. Рассмотрим $N = 2$ суперсимметричные уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), полученные Матье [1], [2],

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2u)_x + \frac{a-1}{2}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2u^2)_x + 3au^2u_x, \quad \mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial\theta_i} + \theta_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1)$$

при $a = 4$ или $a = 1$. В настоящей работе мы построим n -суперсолитонные решения уравнения (1)

$$u = A\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 \ln \tau_{k_1, \dots, k_n}(x, t; \theta_1, \theta_2), \quad A(a) = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

*Mathematical Institute, University of Utrecht, P.O.Box 80.010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands; Institut des Hautes Études Scientifiques, Le Bois-Marie, 35 Route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France. E-mail: A.V.Kiselev@uu.nl

†Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succ. Centre-ville, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada. E-mail: hussin@dms.umontreal.ca

которые обладают следующими свойствами. Во-первых, линейные приближения

$$\tau = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\eta_i}, \quad \eta_i = k_i x + \omega(k_i)t + \lambda(k_i)\theta_1\theta_2, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

экспоненциальных рядов Хироты задают точные решения уравнения (1). Функции (3) не содержат ни парного взаимодействия ($A_{ij}(k_i, k_j) \equiv 0$, см. (9) ниже), ни членов взаимодействия высших порядков [3], т.е.

$$A_{i_1 \dots i_\ell}(k_{i_1}, \dots, k_{i_\ell}) = \prod_{i_\alpha < i_\beta} A_{i_\alpha i_\beta}(k_{i_\alpha}, k_{i_\beta}) \equiv 0.$$

Во-вторых, в процессе перекрытия n разных солитонов по формулам нелинейной суперпозиции и тем самым образования n -солитонного решения, отдельные солитоны не приобретают сдвига фаз, разойдясь один от другого достаточно далеко. Таким образом, пространственно-протяженные уединенные волны ведут себя как точечные частицы при упругих нелинейных соударениях. Напомним, что аналогичный пример представления точечных частиц полями был известен ранее, в частности для солитонных решений интегродифференциального уравнения Бенджамина–Оно [4].

В-третьих, мы показываем, что быстрый солитон, предшествующий набору волн, всегда спонтанно распадается и раньше или позже наблюдаемое решение превращается в самый медленный солитон из этого набора. Мы будем называть исходный солитон, который был видим при $t \ll 0$, нагруженным $n - 1$ виртуальными солитонами, находящимися впереди него. Мы показываем, каким образом наиболее быстрый солитон догоняет виртуальные солитоны и сам становится виртуальным, в то время как самый медленный солитон, возникая позади остальных, становится видимым. Безусловно, такие свойства новых решений $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ (1) существенно отличаются от правил суперпозиции и соответствующих сдвигов фаз для n -солитонных решений стандартного уравнения КдФ (см. (6) ниже) и для полученных из них суперсолитонных решений (7). Указанный эффект, насколько мы можем судить, является новым и может оказаться полезным в обосновании применимости нелинейного $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ (1) в теории поля и даже в описании физического смысла грассмановых переменных θ_1, θ_2 .

Работа построена следующим образом. Сначала мы перечисляем хорошо известные свойства n -солитонных решений уравнения КдФ и указываем, как из этих решений чисто бозонного уравнения КдФ получаются решения гамильтоновых $N = 2$ суперсистем (1) типа КдФ. Далее дана формулировка основного результата: описание τ -функций и дисперсионных соотношений для новых n -суперсолитонных решений уравнения (1). В случае $a = 1$ новые суперполя задают точные n -солитонные решения уравнения Красильщика–Керстена [5]. Затем мы описываем парадоксальные свойства n -солитонов для уравнения (1), в том числе спонтанный распад и последующий переход в виртуальные состояния.

2. ИЗВЕСТНЫЕ n -СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

Некоторые классы точных решений в виде бегущих волн $u(x + ct + i\theta_1\theta_2, \theta_1 + i\theta_2)$ для уравнения (1), $a = -2, \pm 1, \pm 4$, были получены в работе [6] при помощи симметричной редукции. Прежде всего выбиралась такая подгруппа Ли точечных симметрий уравнения (1) с $a \in \mathbb{R}$, что соответствующие инварианты действия группы задавали аргументы решений u , как указано выше. Тогда разложение в ряд Тейлора $u = \rho_0 + (\theta_1 + i\theta_2)\rho_1$ по второму аргументу, приводящее к зависимости обеих функций ρ_0 и ρ_1 от $x + ct + i\theta_1\theta_2$, превращает уравнение (1) в треугольную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно ρ_0 и ρ_1 . Второе предположение в работе [6] состоит в том, что решения первого из двух уравнений этой системы, $\rho_0'' - a\rho_0^3 + i(a+2)\rho_0\rho_0' + c\rho_0 + \text{const} = 0$, не имеют подвижных особых точек. Отсюда и вытекает, что допустимы значения $a = -2, \pm 1, \pm 4$. Частные решения $\rho_0(x + ct + i\theta_1\theta_2)$, $\rho_1 \equiv 0$, найденные в работе [6] (см. уравнение (3.15) в указанной работе), для уравнения (1) при $a = 1, 4$ близки по форме к односолитонным решениям (2) с константой $c = \omega/k$ (см. (3)). Следует отметить, что парное или коллективное взаимодействие бегущих волн в работе [6] не обсуждалось.

В то же время понятно, что $N = 2$ суперсимметричное уравнение КДФ допускает многосолитонные решения, причем не только с параметром $a = -2, 1, 4$, обеспечивающим полную интегрируемость. Действительно, разложим бозонное $N = 2$ суперполе u в ряд по θ_1 и θ_2 :

$$u = u_0 + \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 + \theta_1 \theta_2 u_{12} \quad (4)$$

и подставим (4) в (1). Тогда, в частности, четные компоненты u_0 и u_{12} удовлетворяют системе [1], [2], [5]

$$u_{0;t} + u_{0;xxx} - 3au_0^2 u_{0;x} + (a+2)(u_0 u_{12})_x - (a-1)(u_1 u_2)_x = 0, \quad (5a)$$

$$u_{12;t} + u_{12;xxx} + 6u_{12} u_{12;x} - (a+2)u_0 u_{0;xxx} - 3a(u_{0;x} u_{0;xx} + u_0^2 u_{12;x} + 2u_0 u_{0;x} u_{12}) - \\ - 3u_2 u_{2;xx} - (a+2)u_1 u_{1;xx} + 6a(u_0 u_1 u_{2;x} - u_0 u_{1;x} u_2 + u_{0;x} u_1 u_2) = 0. \quad (5b)$$

Пусть нечетные компоненты $u_1 = u_2 \equiv 0$. С одной стороны, если $a = -2$, то система (5) распадается на модифицированное уравнение КДФ (5a) относительно u_0 и на уравнение КДФ-типа (5b) с обратной связью. Ниже мы не будем рассматривать хорошо изученный случай $a = -2$. С другой стороны, если при $u_1 = u_2 = 0$ положить $a = 1$, то система (5) принимает вид связанных уравнений КДФ и модифицированного КДФ Красильщика–Керстена [5] (см. также [7]–[9]). В разделе 3 мы опишем новый класс многосолитонных решений в форме Хироты для этой системы.

Положим компоненты u_0 , u_1 и u_2 равными нулю. Тогда $N = 2$ суперсимметричное уравнение (1) при любом $a \in \mathbb{R}$ редуцируется к чисто бозонному скалярному уравнению КДФ

$$u_{12;t} + u_{12;xxx} + 6u_{12} u_{12;x} = 0. \quad (6)$$

Следовательно, суперфункция

$$u = \theta_1 \theta_2 u_{12}(x, t), \quad (7)$$

где u_{12} удовлетворяет (6), есть решение уравнения (1). Наоборот, любая функция (7) задает решение $u_{12} = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1(u)$ уравнения (6). Отметим, что для решений вида (7) формулы автопреобразований Беклунда для уравнения КдФ справедливы и для $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ (1).

Наличие подстановки (7) влечет также, что уравнения (1) имеют в качестве решений классические n -солитоны Хироты (2) из решений

$$u_{12} = A(a) \frac{d^2}{dx^2} \ln \tau \quad (8)$$

уравнения КдФ (6) (см. [3]), для которых τ -функция имеет вид

$$\tau = \sum_{\substack{\mu_\ell=0,1 \\ 1 \leq \ell \leq n}} \exp \left[\sum_{\ell=1}^n \mu_\ell (\eta_\ell + \ln \alpha_\ell) + \sum_{1 \leq \ell < m \leq n} \mu_\ell \mu_m \ln A_{\ell m} \right], \quad (9)$$

а дисперсия и взаимодействие (в данном случае $\lambda \equiv 0$) заданы формулами

$$A(a) \equiv 2, \quad \omega = -k^3, \quad A_{\ell m} = \frac{(k_\ell - k_m)^2}{(k_\ell + k_m)^2}, \quad \alpha_\ell \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

ЛЕММА. В результате попарного взаимодействия, обусловленного множителями $A_{\ell m}(k_\ell, k_m)$ в формуле (10), солитоны для уравнения КдФ (6) приобретают сдвиги фаз, абсолютные величины которых зависят от волновых чисел k_ℓ, k_m :

$$\Delta \varphi_{\ell m} = 2 \ln \frac{|k_\ell - k_m|}{|k_\ell + k_m|} \quad (11)$$

(сами сдвиги для ℓ -го и m -го солитонов противоположны по знаку). Например, в частном случае $k_\ell > k_m > 0$ быстрый солитон с волновым числом k_ℓ смещается вперед, в то время как медленный солитон, соответствующий k_m , запаздывает. При $t \rightarrow -\infty$ оба солитона движутся свободно, все еще оставаясь (при $t \rightarrow +\infty$ уже став) далеко отстоящими друг от друга.

Знание этого эффекта следует отнести к началу “кортевевского бума” в конце 60-х гг. (см. [3] и приведенные там ссылки). Мы введем формулу (11) повторно, чтобы сравнить два рассуждения: это и аналогичное, но по отношению к новым решениям (17) (см. ниже) $N = 2$ суперсимметричного уравнения (1). Окажется, что поведение новых суперсолитонов существенно отличается и с аналитической, и с физической точки зрения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (11) просто доказывается на уровне τ -функции (9). Без ограничения общности, положим $n = 2$, и тогда при $\ell = 1, m = 2$ двухсолитонное решение уравнения (6) задано волновыми числами $k_1 > k_2 > 0$. Обозначим через $x_1(t)$ и $x_2(t)$ координаты вершин первого и второго солитонов соответственно при тех значениях времени t , когда они отстоят один от другого достаточно далеко. Для удобства введем нормировку $\alpha_i := 1$, тогда в силу (9) τ -функция будет иметь вид

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}(k_1, k_2) e^{\eta_1 + \eta_2}.$$

Пусть $t \ll 0$ исходно фиксировано. Рассмотрим быстрый первый солитон, еще не догнавший медленный второй. В окрестности вершины, расположенной в точке $x_1(t)$, имеет место оценка $\eta_1 \approx 0$ и, поскольку вершина второго солитона пока находится далеко впереди, в точке $x_2(t) \gg x_1(t)$ при $t \ll 0$, справедливо $\eta_2(x) \ll 0$ для $x \approx x_1(t)$. Отсюда следует¹⁾

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}(1 + A_{12}e^{\eta_1}) \Rightarrow 1 + e^{\eta_1} = \tau_{k_1}(\eta_1), \quad (12)$$

поскольку $e^{\eta_2(x)} \Downarrow 0$ равномерно при $t \rightarrow -\infty$ на любом ограниченном интервале, содержащем $x_1(t)$. Соответствующая асимптота – это быстрый солитон в чистом виде (8), но пока без какого-либо сдвига фазы.

Далее, рассмотрим окрестность $\{x \approx x_2(t)\}$ вершины медленного солитона, пока еще расположенного впереди быстрого. Мы имеем $\eta_2 \approx 0$ и, поскольку $x_2(t) \gg x_1(t)$ при $t \ll 0$, для всех $x \approx x_2(t)$ верно, что $\eta_1(x) \gg 0$. Следовательно,

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t) = e^{\eta_1}(1 + e^{\eta_2 + \ln A_{12}} + e^{-\eta_1}(1 + e^{\eta_2})).$$

Применяя к этому равенству оператор $2d^2/dx^2 \circ \ln$ и замечая, что фаза η_1 линейна по x (и не содержит старших степеней x), мы делаем вывод, что

$$\begin{aligned} u_{k_1 k_2}(x, t) &= 2 \frac{d^2}{dx^2} \left[(k_1 x + \omega_1 t) + \ln \left(1 + \exp \left(\eta_2 + 2 \ln \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) + e^{-\eta_1}(1 + e^{\eta_2}) \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_{k_2} \left(\eta_2 + 2 \ln \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right), \end{aligned}$$

так как $e^{-\eta_1} \Downarrow 0$ в конечной окрестности точки $x_2(t)$ при $t \rightarrow -\infty$. Отрицательное смещение фазы в точности равно (11); при переходе к $t \rightarrow +\infty$ оно исчезнет, и потому итоговый сдвиг фазы медленного солитона окажется положительным.

Обратим внимание, что медленный солитон первоначально был смещен вперед на $|\Delta\varphi_{k_1 k_2}|$ по отношению к точно такому же солитону (8) с таким же волновым числом k_2 , который достиг бы начала координат $x_2(t) = 0$ в момент времени $t = 0$. Тем самым система координат (x, t) , используемая в методе Хироты, такова, что центр масс двух солитонов достигает точки $x = 0$ при некотором $t < 0$.

При $t \rightarrow +\infty$ имеем следующее: быстрый солитон уже давно оставил медленный солитон далеко позади, и потому в окрестности $\{x \approx x_2(t)\}$ вершины медленного солитона, на которой выполнено $\eta_2(x) \approx 0$, справедлива оценка $\eta_1(x) \ll 0$ в любой фиксированный момент времени t . Получаем

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t) = 1 + e^{\eta_2} + e^{\eta_1}(1 + A_{12}e^{\eta_2}) \Rightarrow 1 + e^{\eta_2} = \tau_{k_2}(\eta_2),$$

так как $e^{\eta_1(x)} \Downarrow 0$ вблизи $x_2(t)$ по мере роста времени $t \rightarrow +\infty$.

¹⁾Здесь и всюду далее стандартное обозначение $\Rightarrow$ означает равномерную сходимость функциональной последовательности на конечном отрезке. Обозначение $\Downarrow$ означает равномерную сходимость сверху (в нашем случае к тождественному нулю).

Быстрый солитон, сосредоточенный в окрестности точки $x_1(t)$, в которой $\eta_1 = 0$, уходит вперед, используя энергию и импульс медленно движущегося солитона. В самом деле, поскольку $\eta_2(x_1(t)) \gg 0$,

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t) = e^{\eta_2} (1 + e^{\eta_1 + \ln A_{12}} + e^{-\eta_2} (1 + e^{\eta_1})),$$

откуда

$$\begin{aligned} u_{k_1 k_2}(x, t) &= 2 \frac{d^2}{dx^2} \left[(k_2 x + \omega_2 t) + \ln \left(1 + \exp \left(\eta_1 + 2 \ln \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) + e^{-\eta_2} (1 + e^{\eta_1}) \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_{k_1} \left(\eta_1 + 2 \ln \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

в окрестности $\{x \approx x_1(t)\}$ при $t \rightarrow +\infty$ (отметим, что при этом $e^{-\eta_2} \Downarrow 0$). Сравнивая состояния обоих солитонов на входе и на выходе, мы видим, что накопленные сдвиги фаз в точности равны $\pm \Delta \varphi_{k_1 k_2}$ для первого и второго солитона соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Закон дисперсии в решении (10) определяется билинейным представлением Хироты для уравнения КдФ (6) (см. [3]):

$$D_x(D_t + D_x^3)\tau \cdot \tau = 0,$$

где D_x и D_t – производные Хироты. Напомним, что билинейное представление $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ (1) Манина–Радула, соответствующего $a = -2$ (см. [10]), было построено в работе [11] с помощью записи этой системы в переменных Инаи–Канно [12]. Это билинейное представление для случая $a = -2$ в суперсимметричном уравнении КдФ (1) такое, что τ -функция n -солитонных решений, описываемых волновыми числами $k_1, \dots, k_n$, содержит антикоммутирующие константы $\zeta_1, \dots, \zeta_n$.

3. НОВЫЕ (ВИРТУАЛЬНЫЕ) n -СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

Без учета антикоммутирующих констант (см. замечание 1) наиболее общая допустимая форма показателей Хироты следующая:

$$\eta = kx + \omega t + \lambda \theta_1 \theta_2, \quad (14)$$

где $k \in \mathbb{R}$ – волновые числа, ω – частоты, а параметры $\lambda \in \mathbb{C}$ ответственны за зависимость n -суперсолитона $u_{k_1 \dots k_n}(x, t; \theta_1, \theta_2)$ от грассмановых переменных θ_1, θ_2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Решения типа бегущих волн с экспонентами Хироты (14) $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ (1) при $a = 1$ или $a = 4$ имеют вид

$$u = A \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \ln(1 + \alpha e^\eta), \quad (15)$$

где дисперсия и связь между волновым числом k и ненулевым множителем λ заданы соотношениями

$$\omega = -k^3, \quad \lambda = \pm ik, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad A = \begin{cases} 1, & a = 1, \\ 1/2, & a = 4. \end{cases} \quad (16)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Двухсолитонное решение Хироты уравнения (1) при $a = 1, 4$ и $\lambda \neq 0$ с показателями (14) т.е. суперфункция вида

$$u = A\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 \ln(1 + \alpha_1 e^{\eta_1} + \alpha_2 e^{\eta_2} + A_{12}\alpha_1\alpha_2 e^{\eta_1+\eta_2}),$$

существует тогда и только тогда, когда, во-первых, для каждого из соответствующих показателей (14) выполнены соотношения (16) и, во-вторых, отсутствует взаимодействие между отдельными показателями односолитонных решений (15): $A_{12}(k_1, k_2) \equiv 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Точное n -суперсолитонное решение $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ (1) при $a = 1, 4$ и $\lambda_i \neq 0$ следующее:

$$u = -A \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}} + A\theta_1\theta_2 \frac{d}{dx} \left[\frac{\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}} \right], \quad (17)$$

где $n \in \mathbb{N}$ произвольно и для укороченной фазы введено обозначение

$$\tilde{\eta} = kx + \omega t. \quad (18)$$

Таким образом, подставив указанные в (16) значения $A(a)$, $\omega(k)$ и $\lambda(k)$, мы разложили суперсолитон (2) с τ -функцией

$$\tau_{k_1 \dots k_n}(x, t; \theta_1, \theta_2) = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i} (1 + \lambda_i \theta_1 \theta_2)$$

в ряд по величине $\theta_1 \theta_2$, квадрат которой равен нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Суперсимметричное уравнение (1), соответствующее параметру $a = -2$, не допускает решений в виде бегущих волн (15), отличных от решений (10) с $\lambda \equiv 0$, поэтому оно не имеет n -суперсолитонов вида (17) ни при каком $n \geq 1$. То же самое справедливо по отношению ко всем остальным значениям $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, при этом соответствующие им уравнения по-прежнему допускают n -солитоны, описываемые формулами (7)–(10), но не имеют решений вида (15), (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом выражений (15)–(17) утверждения 1–3 проверяются прямым вычислением. Справедливость исчерпывающего утверждения 4 установлена с помощью среды аналитических преобразований [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [14] был построен интересный класс точных решений $N = 2$ суперуравнения КП Манина–Радуга и тем самым описаны его редукции к $N = 2$ суперсимметричному уравнению КдФ (1), $a = -2$. Компоненты таких решений (названных солитино в работе [14]) не более чем квадратичны относительно экспонент Хироты e^{η_i} при любом числе $n \geq 2$ взаимодействующих солитино ([14], уравнения (39), (40)).

Мы получаем этот результат для интегрируемого гамильтонового суперсимметричного уравнения (1) при всех $a = -2, 1, 4$ в том смысле, что для $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ, $a = 1$ или $a = 4$, найдены n -солитонные решения (17),

τ -функции которых остаются линейными по e^{η_i} при всех $n \geq 1$. Подчеркнем, что необычные n -солитоны (17) для $N = 2$ суперсимметричного уравнения КдФ объяснены также быть решениями тех $N = 2$ суперсимметричных уравнений КП, для которых существует редукция к уравнению (1), $a = 1, 4$. Со всей определенностью можно сказать, что допустимые суперсистемы окажутся отличными от $N = 2$ суперуравнения КП Манина–Радула [10], для которого верно равенство $a = -2$.

Отметим еще, что ограничение $u_1 = u_2 \equiv 0$ выполнено для компонент суперполей (17). Итак, утверждение 1 задает точные решения уравнения Красильщика–Керстена (см. (5)), если положить $a = 1$. По той же причине это утверждение дает n -солитоны для бозонного предела уравнения (1) при $a = 4$.

Подчиняясь правилам нелинейной суперпозиции n солитонов, точные решения (17) суперсимметричного уравнения (1), заданные линейными частями (3) τ -функций Хироты, демонстрируют свойства, существенно отличающиеся от стандартных свойств (11) для КдФ (6), причем как по отношению к временным асимптотам при $t \rightarrow \pm\infty$, так и к сдвигу фазы каждого из n солитонов в отдельности. Правило их взаимодействия следующее.

Асимптотическое поведение при $t \rightarrow \pm\infty$ произвольного n -солитонного решения (17) уравнения (1) полностью определяется солитоном, который движется позади всех остальных; по мере того, как время t пробегает от $-\infty$ до $+\infty$, никаких сдвигов фаз не накапливается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично рассуждениям, приведенным между (12) и (13), при всех $n \geq 2$, что позволяет зафиксировать $n = 2$ и для определенности предположить $k_{\max} = k_1 > k_2 = k_{\min} > 0$. Без ограничения общности для нормировки положим $\alpha_i = 1$ для всех i . Напомним, что $\tau_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}$, где полные фазы η_i имеют вид (14) и дисперсия задана соотношениями (16). Это определяет решения (17) уравнения (1); зависимость $A(a)$ также приведена в формуле (16) для допустимых значений $a = 1$ и $a = 4$.

Заметим, что существенно непостоянная часть солитона (15), как обычно, сосредоточена вблизи нуля укороченной фазы (18), однако первое чисто мнимое слагаемое в разложении (17) не имеет экстремума в области $\tilde{\eta} \approx 0$. В то же время вещественный коэффициент при величине $\theta_1 \theta_2$ в односолитонном решении все-таки имеет экстремум в окрестности $\tilde{\eta} \approx 0$. Этот коэффициент есть не что иное, как половина (для $a = 1$) или четверть (для $a = 4$) односолитонного решения (8) уравнения КдФ (см. (10)). Ниже мы используем это наблюдение, чтобы выделять существенные для рассуждений точки прямой $x \in \mathbb{R}$.

Итак, пусть $t \rightarrow -\infty$. В окрестности вершины $x_1(t)$ быстрого солитона, соответствующего наибольшему волновому числу $k_1 = k_{\max}$, укороченная фаза (18) невелика, $\tilde{\eta}_1 \approx 0$, но $\tilde{\eta}_2 \ll 0$. Пока солитоны отстоят достаточно далеко друг от друга $e^{\tilde{\eta}_2} \Downarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ на любом ограниченном интервале $\{x \approx x_1(t)\}$. Поэтому справедливо соотношение

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \Rightarrow 1 + e^{\eta_1} = \tau_{k_1}(\eta_1). \quad (19)$$

Данное выражение описывает быстрый солитон с несмещенной полной фазой $\eta_1(x, t)$.

С другой стороны, вблизи вершины $x_2(t)$ медленного солитона выполнены соотношения $\tilde{\eta}_2 \approx 0$ и $\tilde{\eta}_1 \gg 0$, откуда

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) = e^{\eta_1} (1 + e^{-\eta_1} (1 + e^{\eta_2})).$$

Действуя на τ -функцию оператором $A(a)\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 \circ \ln$, мы получаем асимптоту двухсолитонного решения на конечном интервале, содержащем точку $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} u_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) &= A\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[(k_1 x + \omega_1 t) + \ln(1 + \lambda_1 \theta_1 \theta_2) + \ln(1 + e^{-\eta_1} (1 + e^{\eta_2}))] \Rightarrow \\ &\Rightarrow -A\lambda_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Иными словами, в окрестности точки $x_2(t)$ решение не изменяется вообще при небольших (ограниченных) смещениях влево или вправо по x при времени $t \ll 0$, поэтому будем говорить, что медленный солитон пока еще не обнаружил свое присутствие, оставаясь *виртуальным*. Будем говорить также, что видимый быстрый солитон, находящийся позади (быть может, нескольких) солитонов в начале процесса упругого рассеяния, был *нагружен* виртуальными солитонами. Отметим, что асимптотическое поведение решения $u_{k_1 \dots k_n}(x, t; \theta_1, \theta_2)$ на раннем этапе движения, $t \ll 0$, аналогично при любых $n \geq 2$.

Рассмотрим теперь предел при $t \rightarrow +\infty$. Медленный солитон с волновым числом $k_2 = k_{\min}$ становится видимым. Вблизи его вершины, координата которой $x_2(t)$, выполнены соотношения $\tilde{\eta}_2 \approx 0$ и $\tilde{\eta}_1 \ll 0$, если быстрый солитон ушел достаточно далеко вперед. Следовательно,

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \Rightarrow 1 + e^{\eta_2} = \tau_{k_2}(\eta_2),$$

так как $e^{\tilde{\eta}_1} \Downarrow 0$ в окрестности $x_2(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Быстрый солитон теперь становится виртуальным. В самом деле, вблизи его вершины, т.е. в окрестности $\tilde{\eta}_1 \approx 0$ точки $x_1(t)$ имеет место оценка $\tilde{\eta}_2 \gg 0$, и тем самым $e^{-\tilde{\eta}_2} \Downarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, откуда

$$\tau_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) = e^{\eta_2} (1 + e^{-\eta_2} (1 + e^{\eta_1})).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{k_1 k_2}(x, t; \theta_1, \theta_2) &= A\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[(k_2 x + \omega_2 t) + \ln(1 + \lambda_2 \theta_1 \theta_2) + \ln(1 + e^{-\eta_2} (1 + e^{\eta_1}))] \Rightarrow \\ &\Rightarrow -A\lambda_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полученная величина – это предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{k_2}(x, t)$, обусловленный медленным солитоном, теперь уже движущимся позади быстрого. Указанная константа не меняется при малых (конечных) смещениях влево или вправо от точки $\tilde{\eta}_1 = 0$, в которой должна была бы находиться вершина быстрого солитона при любом $t \gg 0$.

Тем самым мы продемонстрировали “исчезновение” быстрого солитона. В результате видимый медленный солитон оказывается нагружен виртуальным быстрым солитоном.

В завершение доказательства осталось заметить, что в силу рассуждений, приведенных между (19) и (20), ни один из солитонов – ни видимый быстрый, ставший виртуальным, ни виртуальный медленный, ставший видимым, – не приобретает сдвига фазы.

Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА. 1. *На начальном этапе движения, $t \rightarrow -\infty$, временная асимптота n -солитона (17) для суперсимметричного уравнения КдФ (1) определена самым быстрым солитоном с наибольшим волновым числом $k_{\max}$, который нагружен виртуальными солитонами, движущимися медленнее его, и соответствующими числами $k_2, \dots, k_{\min} < k_{\max}$. Все эти виртуальные солитоны невидимы при $t \ll 0$.*

2. При $t \rightarrow +\infty$ асимптота того же самого решения $u_{k_1 \dots k_n}(x, t; \theta_1, \theta_2)$ уравнения (1) – это самый медленный солитон с наименьшим волновым числом $k_{\min}$. Он нагружен более быстрыми солитонами, которые заданы числами $k_{\max}, \dots, k_{n-1} > k_{\min}$. Эти $n - 1$ виртуальных солитонов остаются (для $k_2, \dots, k_{n-1}$) или становятся (для $k_{\max}$) невидимыми при $t \gg 0$.

3. Ни один из солитонов – ни видимый, который движется позади остальных, ни расположенные перед ним виртуальные солитоны, – не приобретают сдвига фаз в процессе эволюции во времени $t \in (-\infty, +\infty)$.

Отметим, что повторные пространственный и временной пределы от чисто мнимого первого слагаемого в решении (17) неперестановочны: при $x, t \rightarrow +\infty$, имеем²⁾

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}} = \lambda(k_{\max}) \neq \lambda(k_{\min}) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \gg x_n(t)}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\tilde{\eta}_i}}.$$

Отсюда следует также, что решение $u_{k_1 \dots k_n}(x, t; \theta_1, \theta_2)$ не является функцией Шварца по x . Очевидно, что при $x \rightarrow -\infty$ и любом t предел первого слагаемого в разложении (17) равен нулю (всюду в настоящей работе мы предполагаем $k_i > 0$). Вещественный коэффициент при $\theta_1 \theta_2$ в решении (17) стремится к $A(a)d(\text{const})/dx = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и любом t .

Исходный предел при $x \rightarrow +\infty$ при любом конечном t определен видимым быстрым солитоном с наибольшим волновым числом $k_{\max}$. Этот солитон нагружен одним или несколькими виртуальными медленными солитонами. Пространственный предел ($x \rightarrow +\infty$) состояния на выходе системы при достаточно больших временах $t \gg 0$ определяется самым медленным солитоном, который, в свою очередь, теперь нагружен более быстрыми виртуальными солитонами и последовательно занимает всю ось x .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соответствующее параметру $a = 4$ суперсимметричное уравнение КдФ (1) допускает вдвое больше гамильтонианов и, следовательно, вдвое больше симметрий, чем в двух других случаях $a = -2, 1$. По этой причине в иерархии данного уравнения вдвое больше коммутирующих потоков, чем в иерархиях

²⁾ Уточним, что предел по x в правой части неравенства берется раньше, чем вершина $x_n(t)$ самого медленного (n -го) солитона пройдет через точку x , или, иными словами, когда экспоненциально малый хвост всех солитонов еще не оказался в этой точке.

с $a = -2$ или $a = 1$. В частности, между генератором пространственных сдвигов $\partial/\partial x$ и сдвигом по времени $\partial/\partial t$, определенным уравнением (1) – элементом иерархии суперсимметричного уравнения КдФ при $a = 4$, находится дополнительный поток: $N = 2$ суперсимметричное уравнение Бюргерса [15]

$$\dot{u} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 u_x + 4uu_x. \quad (21)$$

Утверждения 1–4 и теорема формулируются для уравнения (21) аналогично. Так, n -суперсолитоны суть (17) со следующими дисперсионными соотношениями для τ -функции (3) Хироты:

$$A = \frac{1}{2}, \quad \omega = -ik^2, \quad \lambda = ik, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новые n -солитонные решения (17) удовлетворяют $N = 2$ суперсимметричному уравнению (1) с параметром $a = 1, 4$ или, еще более точно, его бозонному пределу (в случае $a = 1$ это система Красильщика–Керстена). Было показано, что асимптота наших решений (17) при $t \rightarrow -\infty$ задана самым быстрым солитоном с наибольшим волновым числом $k_{\max}$. Он нагружен $n - 1$ виртуальными солитонами, которые медленнее его и первоначально расположены перед ним. Мы доказали, что, наблюдая начальный график и идентифицируя исходный профиль как односолитонное решение, невозможно предсказать ни состояние системы на выходе, ни даже его асимптоту $-iAk_{\min}$ при $x \rightarrow +\infty$ для $t \gg 0$.

С точки зрения наблюдателя быстрый солитон ($k_1 = k_{\max}$) подвержен спонтанному распаду. График решения преобразуется в набор нелинейно перекрывающихся волн ($k_1 > k_2 > \dots > k_n$). В итоге наблюдатель вновь регистрирует единственный (причем другой) солитон с иным волновым числом $k_n = k_{\min}$. При фиксированном числе солитонов $n \geq 2$ и заранее заданных волновых числах $k_{\min}$ и $k_{\max}$ это может произойти для любой траектории – точки конфигурационного пространства

$$\mathbb{R}_+^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (k_2, k_2 - k_3, \dots, k_{n-2} - k_{n-1}) \times (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

(над полем $\mathbb{C}$ всегда можно нормировать $\alpha_1 = 1$).

Отсутствие сдвигов фаз вместе с иерархиями интегралов движения для гамильтоновых $N = 2$ суперсимметричных уравнений КдФ (1) позволяет заключить, что пространственно-протяженные уединенные волны ведут себя в процессе упругих соударений как безразмерные частицы (как массивные материальные точки). В настоящей работе мы обосновали возможность их спонтанного распада и сформулировали правила перехода наблюдаемых частиц в виртуальные состояния и наоборот.

Благодарности. Авторы благодарны П. Винтерницу, А. С. Сорину, М. А. Нестеренко и Й. Ван де Лёру за плодотворные обсуждения, а также признательны рецензенту за сделанные замечания. Исследование выполнено при поддержке NWO

(А. В. Киселев) и NSERC (В. Хуссен), а также при частичной финансовой поддержке со стороны оргкомитета конференции “Нелинейная физика: теория и эксперимент”. А. В. Киселев благодарит IHÉS, кафедру математики и статистики (Montreal University) за финансовую поддержку и гостеприимство.

Список литературы

- [1] C.-A. Laberge, P. Mathieu, *Phys. Lett. B*, **215**:4 (1988), 718–722.
- [2] P. Labelle, P. Mathieu, *J. Math. Phys.*, **32**:4 (1991), 923–927.
- [3] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge Tracts in Math., **135**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [4] M. Błaszak, *J. Phys. A*, **22**:5 (1989), 451–457.
- [5] P. Kersten, J. Krasil'shchik, “Complete integrability of the coupled KdV–mKdV system”, *Lie Groups, Geometric Structures and Differential Equations—One Hundred Years After Sophus Lie*, Adv. Stud. Pure Math., **37**, eds. T. Morimoto, H. Sato, K. Yamaguchi, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, 151–171.
- [6] M. A. Ayari, V. Hussin, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **40**:4 (1999), 1951–1965.
- [7] A. Karasu, S. Yu. Sakovich, Í. Yurduşen, *J. Math. Phys.*, **44**:4 (2003), 1703–1708.
- [8] Y. C. Hon, E. G. Fan, *Chaos Solitons Fractals*, **19**:5 (2004), 1141–1146.
- [9] W.-P. Hong, *Z. Naturforsch.*, **61a** (2006), 125–132.
- [10] Yu. I. Manin, A. O. Radul, *Comm. Math. Phys.*, **98**:1 (1985), 65–77.
- [11] S. Ghosh, D. Sarma, *Phys. Lett. B*, **522**:1–2 (2001), 189–193.
- [12] T. Inami, H. Kanno, *Nucl. Phys. B*, **359**:1 (1991), 201–217.
- [13] A. V. Kiselev, T. Wolf, *Comput. Phys. Comm.*, **177**:3 (2007), 315–328; [arXiv: nlin.SI/0609065](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0609065).
- [14] A. Ibort, L. A. Martínez Alonso, E. Medina Reus, *J. Math. Phys.*, **37**:12 (1996), 6157–6172.
- [15] A. V. Kiselev, T. Wolf, *SIGMA*, **2**:30 (2006), Paper 030.