Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Непрерывно-дискретные интегрируемые уравнения и преобразования Дарбу как деформации ассоциативных алгебр, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 502–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 08:29:49

© 2009 г.

Б. Г. Конопельченко*

НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ КАК ДЕФОРМАЦИИ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Определяются и исследуются деформации структурных констант некоторого класса ассоциативных некоммутативных алгебр, порожденные алгебрами, вызывающими деформацию. Такие деформации управляются центральной системой. Подобная центральная система исследуется в случае, когда алгебра, вызывающая деформацию, представляет собой алгебру сдвигов. Представлены конкретные примеры деформаций трехмерных алгебр, управляемые дискретными и смешанными непрерывно-дискретными уравнением Буссинеска и уравнением ВДВВ. Показано, что теория преобразований Дарбу, по крайней мере для случая уравнения Буссинеска, полностью включается в предлагаемую схему деформаций.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, деформация, интегрируемое уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время благодаря открытию уравнения ВДВВ [1], [2], его изящной формулировке, предложенной Дубровиным [3], [4] в рамках теории фробениусовых многообразий, и последующим обобщениям (см., например, работы [5], [6]) установлена глубокая связь между интегрируемыми системами и деформациями структурных констант ассоциативных алгебр.

Новый подход к теории деформаций структурных констант ассоциативных алгебр был недавно предложен в работах [7]–[11]. В отличие от теории фробениусовых многообразий и F -многообразий [3]–[6], где действие алгебры определяется на касательном расслоении, подход работ [7]–[11] формулируется в основном в терминах классической и квантовой механики и приводит к коизотропным и квантовым деформациям структурных констант. Одно из преимуществ данного подхода состоит в том, что он естественным образом допускает различные обобщения. Чтобы сформулировать их, кратко напомним некоторые факты о квантовых деформациях [10]. Подход состоит по существу из трех шагов:

---

*Dipartimento di Fisica, Universita del Salento and INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: konopel@le.infn.it

1) возьмем таблицу умножения ассоциативной алгебры в базисе $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{N-1}$ со структурными константами C_{jk}^l , т.е.

$$\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k = C_{jk}^l \mathbf{P}_l, \quad (1)$$

и свяжем с ними набор операторов

$$f_{jk} = -p_j p_k + C_{jk}^l(x^0, x^1, \dots, x^{N-1}) p_l, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $x^0, x^1, \dots, x^{N-1}$ – параметры деформации, $\mathbf{P}_0$ обозначает единичный элемент базиса и предполагается суммирование по повторяющимся индексам (от 0 до $N-1$);

2) потребуем, чтобы операторы $p_0, p_1, \dots, p_{N-1}$ и $x^0, x^1, \dots, x^{N-1}$ были элементами алгебры Гейзенберга, т.е.

$$[p_j, p_k] = 0, \quad [x^j, x^k] = 0, \quad [p_j, x^k] = \hbar \delta_j^k, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

где $\hbar$ – константа, а δ_j^k – символ Кронекера;

3) наложим на функции $C_{jk}^l(x)$ следующее требование: система уравнений

$$f_{jk}|\Psi\rangle = 0, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4)$$

должна иметь нетривиальное общее решение (предписание Дирака), здесь $|\Psi\rangle$ принадлежит определенному линейному пространству.

Требование (4) приводит к системе уравнений

$$\hbar \frac{\partial C_{jk}^n}{\partial x^l} - \hbar \frac{\partial C_{kl}^n}{\partial x^j} + C_{jk}^m C_{lm}^n - C_{kl}^m C_{jm}^n = 0, \quad j, k, l, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

назовем ее *квантовой центральной системой* (КЦС) [10]. Эта система управляет квантовыми деформациями структурных констант $C_{jk}^l(x^0, \dots, x^{N-1})$. В качестве частных случаев КЦС (5) содержит ориентированное уравнение ассоциативности, уравнение ВДВВ, уравнение Буссинеска и иерархии Гельфанда–Дикого и Кадомцева–Петвиашвили (КП) [10].

В настоящей работе мы дадим обобщение описанного выше подхода. Основная идея состоит в рассмотрении вместо алгебры Гейзенберга других алгебр, образованных базисными элементами $p_0, \dots, p_{N-1}$ и параметрами деформации $x^0, \dots, x^{N-1}$. Мы будем называть такие алгебры *алгебрами, вызывающими деформацию* (АВД). Мы покажем, что при выборе АВД как алгебры разностей получается дискретная ЦС и далее дискретные интегрируемые уравнения и иерархии. АВД, которая содержит и подалгебру Гейзенберга, и подалгебру разностей, приводит к смешанным непрерывно-дискретным уравнениям и преобразованиям Дарбу для непрерывных систем.

В качестве иллюстрации общего подхода мы рассмотрим деформации трех- и четырехмерных ассоциативных алгебр. Соответствующая ЦС содержит, в частности, непрерывное уравнение Буссинеска, дискретное и смешанное непрерывно-дискретное уравнения Буссинеска и соответствующее преобразование Дарбу. Мы покажем,

что преобразования Дарбу для уравнения Буссинеска полностью включаются в схему деформаций ассоциативных алгебр, представленную в настоящей работе. Еще одним показательным примером является уравнение ВДВВ в его дискретном и смешанном, т.е. непрерывно-дискретном, вариантах.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 дается определение деформаций, порожденных АД, и выводится общая ЦС. Непрерывные, дискретные и общие смешанные деформации Буссинеска рассматриваются в разделе 3. Раздел 4 посвящен исследованию уравнения ВДВВ, дискретному и смешанному уравнениям ВДВВ и их деформациям. Смешанные АД и соответствующие преобразования Дарбу исследуются в разделе 5. Преобразования Дарбу для уравнения Буссинеска и деформации четырехмерной алгебры обсуждаются в разделе 6.

2. ДЕФОРМАЦИИ СТРУКТУРНЫХ КОНСТАНТ, ПОРОЖДЕННЫЕ АД

Рассмотрим конечномерную ассоциативную алгебру A с единичным элементом $\mathbf{P}_0$ (или без него). Выберем базис $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{N-1}$ и введем структурные константы согласно таблице умножения (1). Чтобы определить деформации $C_{jk}^l(x^0, x^1, \dots, x^{N-1})$ структурных констант, сначала отождествим элементы базиса P_j и параметры деформации x^j с элементами АД. Далее введем операторы f_{jk} , заданные в (2), и, наконец, потребуем, чтобы функции $C_{jk}^l(x)$ были таковы, чтобы эти операторы имели общее нетривиальное ядро или, эквивалентно, чтобы уравнения (4) имели нетривиальные общие решения (предписание Дирака). Если структурные константы $C_{jk}^l(x)$ таковы, что это требование выполнено, то будем говорить, что они определяют деформации, порожденные АД. Требование (4) можно превратить в систему уравнений для $C_{jk}^l(x)$, которую мы будем называть ЦС для деформаций. Конкретный вид ЦС зависит от АД. Например, для АД Гейзенберга (3) ЦС есть КЦС (5).

В настоящей работе мы ограничимся ассоциативными алгебрами, которые имеют коммутативный базис, т.е. такими, в которых $C_{jk}^l(x) = C_{kj}^l(x)$. Для таких алгебр АД должна иметь коммутативную подалгебру, порожденную элементами $p_0, \dots, p_{N-1}$, т.е. $[p_j, p_k] = 0$. Примерами алгебр, близких к АД Гейзенберга (3), являются хорошо известные алгебра сдвигов

$$[p_j, p_k] = 0, \quad [x^j, x^k] = 0, \quad [p_j, x^k] = \delta_j^k p_j, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

алгебра разностей

$$[p_j, p_k] = 0, \quad [x^j, x^k] = 0, \quad [p_j, x^k] = \delta_j^k (\hat{I} + p_j), \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

алгебра q -разностей

$$[p_j, p_k] = 0, \quad [x^j, x^k] = 0, \quad [p_j, x^k] = \delta_j^k (\hat{I} + qx^j p_j), \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

и их смеси. Здесь $\hat{I}$ обозначает тождественный оператор.

Мы сконцентрируемся на алгебрах типов (3), (6), (7) и на АД, содержащей их как подалгебры. Все эти алгебры можно представить единообразно как алгебры со

следующими определяющими коммутационными соотношениями:

$$[p_j, p_k] = 0, \quad [x^j, x^k] = 0, \quad [p_j, x^k] = \delta_j^k (\hat{I} + \varepsilon_j p_j), \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (9)$$

где ε_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, произвольны. При $\varepsilon_j \rightarrow 0$ мы имеем подалгебру Гейзенберга, а при $\varepsilon_j = 1$ – алгебру (7). Одна из реализаций такой АВД имеет вид алгебры разностей $p_j = \Delta_j$, где $\Delta_j = (T_j - 1)/\varepsilon_j$ и $T_j(x^k) = x^k + \delta_j^k \varepsilon_j$, $j, k = 0, 1, \dots, N-1$. При $\varepsilon_j \rightarrow 0$, очевидно, $\Delta_j \rightarrow \partial/\partial x^j$.

Для АВД (9) вывод ЦС основан на следующих тождествах. Первое имеет вид

$$[p_j, \varphi(x)] = \Delta_j \varphi(x) \cdot (\hat{I} + \varepsilon_j p_j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (10)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция,

$$\begin{aligned} \Delta_j \varphi(x^0, x^1, \dots, x^{N-1}) &= (T_j - 1) \varphi(x^0, x^1, \dots, x^{N-1}), \\ T_j \varphi(x^0, \dots, x^j, \dots, x^{N-1}) &= \varphi(x^0, \dots, x^j + \varepsilon_j, \dots, x^{N-1}). \end{aligned}$$

Второе тождество есть

$$\begin{aligned} (p_j p_k) p_l - p_j (p_k p_l) &= -p_l f_{jk} + p_j f_{kl} - T_l C_{jk}^m \cdot f_{lm} + T_j C_{kl}^m \cdot f_{jm} + \\ &+ (\Delta_l C_{jk}^n - \Delta_j C_{kl}^n + T_l C_{jk}^m \cdot C_{lm}^n - T_j C_{kl}^m \cdot C_{jm}^n) p_n, \quad (11) \\ j, k, l &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Из этого тождества следует, что

$$\begin{aligned} \{(p_j p_k) p_l - p_j (p_k p_l)\} |\Psi\rangle &= A_{klj}^n(x) p_n |\Psi\rangle = \\ &= (\Delta_l C_{jk}^n - \Delta_j C_{kl}^n + T_l C_{jk}^m \cdot C_{lm}^n - T_j C_{kl}^m \cdot C_{jm}^n) p_n |\Psi\rangle, \quad (12) \end{aligned}$$

где $|\Psi\rangle$ принадлежит линейному подпространству H_Γ , определяемому уравнениями (4), а A_{klj}^n – ассоциатор в алгебре A . Для ассоциативной алгебры левая часть уравнения (12) обращается в нуль; при условии, что подпространство H_Γ не содержит элементов, линейных по $p_j |\Psi\rangle$, уравнение (12) выполнено, если и только если

$$\Delta_l C_{jk}^n - \Delta_j C_{kl}^n + T_l C_{jk}^m \cdot C_{lm}^n - T_j C_{kl}^m \cdot C_{jm}^n = 0, \quad j, k, l, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

Таким образом, имеем следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Структурные константы $C_{jk}^l(x)$ определяют деформации, порожденные АВД (9), если они подчиняются ЦС (13).

Подчеркнем, что ЦС (13) в действительности является следствием условий слабой ассоциативности

$$\{(p_j p_k) p_l - p_j (p_k p_l)\} |\Psi\rangle = 0. \quad (14)$$

В стандартных матричных обозначениях для матриц C_j , A_{lj} , задаваемых равенствами $(C_j)_k^l = C_{jk}^l$, $(A_{lj})_k^n = A_{klj}^n$, ЦС (13) принимает вид

$$A_{lj}^d := \Delta_l C_j - \Delta_j C_l + C_l T_l C_j - C_j T_j C_l = 0 \quad (15)$$

или

$$A_{ij}^d := (1 + \varepsilon_l C_l) T_l (1 + \varepsilon_j C_j) - (1 + \varepsilon_j C_j) T_j (1 + \varepsilon_l C_l) = 0$$

(в этих формулах нет суммирования по повторяющимся индексам).

В случае, когда все $\varepsilon_j = 0$, имеем $T_j = 1$, $\Delta_j = \partial/\partial x^j$, и ЦС (13) совпадает с КЦС (5). Если все $\varepsilon_j = 1$, то получается чисто дискретная ЦС, рассмотренная в работе [11]. Здесь же мы имеем общую смешанную ЦС, которая будет весьма полезна при изучении соотношений между непрерывными и дискретными уравнениями, а также преобразований Дарбу. Заметим, что результаты работы [11], которые касаются соотношения между ассоциатором и дискретным тензором кривизны, верны и в общем случае.

3. НЕПРЕРЫВНОЕ И ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Простой нетривиальный пример предложенной схемы отвечает трехмерной алгебре с единичным элементом и базисом $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$. Таблица умножения содержит тривиальную часть $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j$, $j = 0, 1, 2$, а также соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^2 &= A\mathbf{P}_0 + B\mathbf{P}_1 + C\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 &= D\mathbf{P}_0 + E\mathbf{P}_1 + G\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_2^2 &= L\mathbf{P}_0 + M\mathbf{P}_1 + N\mathbf{P}_2, \end{aligned} \tag{16}$$

где структурные константы $A, B, \dots, N$ зависят только от параметров деформации x^1, x^2 вследствие цикличности переменной x^0 , соответствующей единичному элементу $\mathbf{P}_0$. Из ЦС при $l = 0$ легко получить, что $C_{j0}^l = \delta_j^l$. В данном случае ЦС (13), порожденная АВД (9), имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 D - \Delta_2 A + AE_1 + DG_1 - DB_2 - LC_2 &= 0, \\ \Delta_1 E - \Delta_2 B + D_1 + BE_1 + EG_1 - EB_2 - MC_2 &= 0, \\ \Delta_1 G - \Delta_2 C + CE_1 + GG_1 - A_2 - GB_2 - NC_2 &= 0, \\ \Delta_1 L - \Delta_2 D + AM_1 + DN_1 - DE_2 - LG_2 &= 0, \\ \Delta_1 M - \Delta_2 E + L_1 + BM_1 + EN_1 - EE_2 - MG_2 &= 0, \\ \Delta_1 N - \Delta_2 G + CM_1 + GN_1 - D_2 - GE_2 - NG_2 &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

где $A_j := T_j A$, $B_j := T_j B$ и т.д. Данная ЦС, которая задает деформации структурных констант $A, B, \dots, N$, является недоопределенной, а потому допускает калибровочный произвол.

Одна из калибровок, а именно $B = 0$, $C = 1$, $G = 0$, обсуждалась в работе [10] в случае квантовых деформаций; было показано, что при этом КЦС редуцируется к уравнению Буссинеска. Рассмотрим здесь именно эту калибровку. Первые три уравнения в (17) дают

$$L = \Delta_1 D - \Delta_2 A + AE_1, \quad M = \Delta_1 E + D_1, \quad N = E_1 - A_2, \tag{18}$$

а оставшаяся часть системы принимает вид

$$\begin{aligned} (\Delta_1^2 - \Delta_2 + E_{11} - E_2 - A_{12})E + 2\Delta_1 D_1 - \Delta_2 A_1 + A_1 E_{11} &= 0, \\ (\Delta_1^2 - \Delta_2 + E_{11} - E_2 - A_{12})E + (-\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_1 E_1 + D_{11})A + \Delta_1 (A E_{11}) &= 0, \\ \Delta_1 (2E_1 - A_2) + D_{11} - D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Эта ЦС определяет деформации Буссинеска структурных констант (16), порожденные АД (9). Действительно, в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, т.е. для АД Гейзенберга, ЦС (19) принимает вид $(A_{x_j} = \partial A / \partial x^j$ и т.д.)

$$\begin{aligned} E_{x_1 x_1} - E_{x_2} + 2D_{x_1} - A_{x_2} &= 0, \\ D_{x_1 x_1} - D_{x_2} - A_{x_1 x_2} + A E_{x_1} + (A E)_{x_1} &= 0, \quad 2E - A = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где все константы интегрирования выбраны равными нулю. Таким образом, имеем систему

$$\frac{1}{2} A_{x_1 x_1} - \frac{3}{2} A_{x_2} + 2D_{x_1} = 0, \quad D_{x_1 x_1} - D_{x_2} - A_{x_1 x_2} + \frac{3}{4} (A^2)_{x_1} = 0. \quad (21)$$

Исключая D , получаем уравнение Буссинеска

$$A_{x_2 x_2} + \frac{1}{3} A_{x_1 x_1 x_1 x_1} - (A^2)_{x_1 x_1} = 0. \quad (22)$$

Это уравнение определяет квантовые деформации структурных констант (16) при

$$\begin{aligned} B &= 0, \quad C = 1, \quad G = 0, \\ L &= D_{x_1} - A_{x_2} + \frac{A^2}{2}, \quad M = \frac{1}{2} A_{x_1} + D, \quad N = -\frac{1}{2} A, \end{aligned}$$

где A и D находятся из (21). В чисто дискретном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ЦС (19) представляет собой дискретный вариант системы Буссинеска (21). Она определяет дискретные деформации тех же структурных констант.

Имеются также смешанные случаи. Первый из них задается соотношениями $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$ ($T_1 = 1, \Delta_1 = \partial / \partial x^1, \Delta_2 = T_2 - 1$). ЦС (19) имеет вид

$$\begin{aligned} E_{x_1 x_1} + 2D_{x_1} - (1 + E)\Delta_2(E + A) &= 0, \\ D_{x_1 x_1} - D_{x_2} + A E_{x_1} + (A E)_{x_1} - \Delta_2 A_{x_1} - D\Delta_2(E + A) &= 0, \\ (2E - A_2)_{x_1} - \Delta_2 D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Второй случай соответствует $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ ($\Delta_1 = T_1 - 1, T_2 = 1, \Delta_2 = \partial / \partial x^2$), а ЦС принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 E + (E_{11} - E - A_1)E + A_1 E_{11} + 2\Delta_1 D_1 - (E + A_1)_{x_2} &= 0, \\ \Delta_1^2 D + (E_{11} - E - A_1)D + A\Delta_1 E_1 + \Delta_1 (A E_1) + D_{11}A - \Delta_1 A_{x_2} - D_{x_2} &= 0, \\ \Delta_1 (2E_1 - A) + D_{11} - D &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (4) дают следующие линейные задачи для ЦС (19):

$$(\Delta_2 - \Delta_1^2 + A)|\Psi\rangle = 0, \quad (\Delta_1 \Delta_2 - E\Delta_1 - D)|\Psi\rangle = 0 \quad (25)$$

или, эквивалентно,

$$(\Delta_2 - \Delta_1^2 + A)|\Psi\rangle = 0, \quad (\Delta_1^3 - (E + A)\Delta_1 - (D + \Delta_1 A))|\Psi\rangle = 0. \quad (26)$$

Можно проверить, что уравнение $f_{22}|\Psi\rangle = 0$ является следствием уравнений (25).

В квантовом случае $(\Delta_j = \partial/\partial x^j)$ система (26) является хорошо известной линейной системой для непрерывного уравнения Буссинеска [12]. Заметим, что в этом случае третье уравнение $f_{22}|\Psi\rangle = 0$, т.е. $(\Delta_2^2 - L - D\Delta_1 + A/2)|\Psi\rangle = 0$, является следствием двух уравнений (26).

В чисто дискретном случае уравнения (26) представляют собой линейные задачи для дискретного уравнения Буссинеска. Первый смешанный случай, рассмотренный выше, можно трактовать как уравнение Буссинеска с дискретным временем. Вторым случаем соответствует непрерывному изоспектральному потоку для разностной задачи третьего порядка, т.е. некоторому виду разностного уравнения Буссинеска с непрерывным временем.

4. УРАВНЕНИЕ ВДВВ, ДИСКРЕТНОЕ И НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЯ ВДВВ

Еще одна интересная редукция ЦС (19) соответствует связям $C = 1$, $G = 0$, $N = 0$. В этом случае ЦС есть

$$\begin{aligned} \Delta_1 D - \Delta_2 A + AE_1 - DB_2 - L &= 0, \\ \Delta_1 E - \Delta_2 B + D_1 + BE_1 + EG_1 - EB_2 - M &= 0, \\ \Delta_1 L - \Delta_2 D + AM_1 - DE_2 &= 0, \\ \Delta_1 M - \Delta_2 E + L_1 + BM_1 - EE_2 &= 0, \\ E_1 - A_2 = 0, \quad M_1 - D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из третьего и шестого уравнений этой системы следует существование таких функций U и V , что

$$A = U_1, \quad E = U_2, \quad D = V_1, \quad M = V_2.$$

Подставляя выражения для L и M из первых двух уравнений системы (27), т.е.

$$\begin{aligned} L &= \Delta_1 V_1 - \Delta_2 U_1 + U_1 U_{12} - V_1 B_2, \\ M &= \Delta_1 U_2 - \Delta_2 B + V_{11} + BU_{12} - U_2 B_2, \end{aligned} \quad (28)$$

в оставшиеся уравнения системы, получаем следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_1 U_1 - \Delta_2 B + V_{11} + BU_{12} - U_2 B_2 - V_2 &= 0, \\ (\Delta_1^2 - \Delta_2)V_1 - \Delta_1 \Delta_2 U_1 + \Delta_1(U_1 U_{12}) - \Delta_1(V_1 B_2) - V_1 U_{22} + U_1 V_{12} &= 0, \\ \Delta_1(V_2 + V_{11}) - \Delta_2(U_2 + U_{11}) + U_{11} U_{12} - U_2 U_{22} - V_{11} B_{12} + BV_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение этой системы вместе с формулами (28) определяет деформации структурных констант $A, B, \dots$, порожденные АД (9).

В чисто непрерывном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ система (29) принимает вид

$$\begin{aligned} U_{x_1} - B_{x_2} &= 0, & V_{x_1} - U_{x_2} &= 0, \\ (V_{x_1} + U_{x_2} + U^2 - VB)_{x_1} - V_{x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Из этой системы, выражающей три закона сохранения, вытекает существование такой функции F , что

$$U = F_{x_1 x_1 x_2}, \quad V = F_{x_1 x_2 x_2}, \quad B = F_{x_1 x_1 x_1}. \quad (31)$$

В терминах F система (30) принимает вид

$$F_{x_2 x_2 x_2} - (F_{x_1 x_1 x_2})^2 + F_{x_1 x_1 x_1} F_{x_1 x_2 x_2} = 0. \quad (32)$$

Это знаменитое уравнение ВДВВ [1], [2]. Хорошо известно, что оно описывает деформации трехмерной алгебры (16) при редукции $C = 1$, $G = 0$, $N = 0$ [3]–[10]. Таким образом, система (29) представляет собой обобщение уравнения ВДВВ на случай деформаций той же алгебры, порожденных АД (9).

В чисто дискретном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ система (29) дает чисто дискретный вариант уравнения ВДВВ. В первом смешанном случае $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ имеем систему

$$\begin{aligned} U_{x_1} - \Delta_2(B + V) - U_2 \Delta_2 B &= 0, \\ (V_{x_1} + UU_2 - VB_2)_{x_1} - \Delta_2(V + U_{x_1}) - VU_{22} + UV_2 &= 0, \\ (V + V_2)_{x_1} - \Delta_2(U + U_2 + UU_2) - VB_2 + BV_2 &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

а в случае $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta_1 U_1 + B \Delta_1 U + V_{11} - V - B_{x_2} &= 0, \\ \Delta_1(\Delta_1 V_1 - U_{1x_2} + U_1^2 - V_1 B) - V_1 U + U_1 V_1 - V_{1x_2} &= 0, \\ \Delta_1(V + V_{11}) + U_{11}^2 - U^2 - V_{11} B_1 + BV_1 - (U + U_{11})_{x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения $f_{jk}|\Psi\rangle = 0$ для системы (29) в координатном представлении $p_j = \Delta_j$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\Delta_2 - \Delta_1^2 + B \Delta_1 + A)|\Psi\rangle &= 0, \\ (\Delta_1 \Delta_2 - E \Delta_1 - D)|\Psi\rangle &= 0, \\ (\Delta_2^2 - M \Delta_1 - L)|\Psi\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Эта система в свою очередь эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} (\Delta_1^3 - B \Delta_1^2 - (\Delta_1 B + A_1 + E) \Delta_1 - (\Delta_1 A + D))|\Psi\rangle &= 0, \\ (\Delta_2 - \Delta_1^2 + B \Delta_1 + A)|\Psi\rangle &= 0, \quad (\Delta_2^2 - M \Delta_1 - L)|\Psi\rangle = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Условия совместности для приведенных выше линейных задач эквивалентны “дискретизованным” системам уравнений ВДВВ (27) или (29). В частности, в чисто непрерывном случае задачи (35) в координатном представлении они имеют хорошо известный вид [3], [4]

$$\begin{aligned} \Psi_{x_1 x_1} &= F_{x_1 x_1 x_2} \Psi + F_{x_1 x_1 x_1} \Psi_{x_1} + \Psi_{x_2}, \\ \Psi_{x_1 x_2} &= F_{x_1 x_2 x_2} \Psi + F_{x_1 x_1 x_2} \Psi_{x_1}, \\ \Psi_{x_2 x_2} &= F_{x_2 x_2 x_2} \Psi + F_{x_1 x_2 x_2} \Psi_{x_1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Первое из этих уравнений есть редукция линейной задачи

$$\Psi_{x_2} = \Psi_{x_1 x_1} + V \Psi_{x_1} + U \Psi, \quad (38)$$

связанной с обобщенной (КП–мКП)-иерархией. Таким образом, уравнение ВДВВ является очень специальной редукцией этой иерархии, стационарной по отношению к временам x_3, x_4 (по поводу похожих результатов см. работу [13]).

5. СМЕШАННЫЕ АВД И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

При $N \geq 4$ ЦС (13) (или (15)), порожденная АВД (9), содержит намного больше смешанных случаев, находящихся между случаями чисто непрерывных и чисто дискретных уравнений. Ситуация с $N-1$ непрерывной и одной дискретной переменными, т.е. случай $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{N-2} = 0$ и $\varepsilon_{N-1} = 1$, представляет особый интерес. Коммутационные соотношения (9), определяющие АВД данного типа, можно представить как

$$[p_j, p_k] = 0, \quad [x^j, x^k] = 0, \quad [p_j, x^k] = \hbar \delta_j^k, \quad (39)$$

$$[p_j, T] = 0, \quad [x^j, n] = 0, \quad [p_j, n] = 0, \quad [T, n] = T, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-2, \quad (40)$$

где $T = p_{N-1} + 1$, а n – дискретная переменная, связанная с T . Таблица умножения в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j \mathbf{P}_k &= \sum_{l=0}^{N-2} C_{jk}^l \mathbf{P}_l + C_{jk}^{N-1} T, & j, k &= 0, 1, \dots, N-2, \\ \mathbf{T} \mathbf{P}_k &= \sum_{l=0}^{N-2} C_{N-1,k}^l \mathbf{P}_l + C_{N-1,k}^{N-1} T, & k &= 0, 1, \dots, N-2, \\ \mathbf{T}^2 &= \sum_{l=0}^{N-2} C_{N-1,N-1}^l \mathbf{P}_l + C_{N-1,N-1}^{N-1} T. \end{aligned} \quad (41)$$

Замена базиса $p_{N-1} \rightarrow T$ в этой таблице выполнена для удобства. Если имеют место связи $C_{jk}^{N-1} = 0$, $j, k = 0, 1, \dots, N-2$, то такая алгебра имеет специальный смысл: она содержит подалгебру, линейно порожденную элементами $p_0, p_1, \dots, p_{N-2}$. Что касается ЦС, то можно показать, что она разделяется на две части

$$\frac{\partial C_j}{\partial x^k} - \frac{\partial C_k}{\partial x^j} + [C_k, C_j] = 0, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-2, \quad (42)$$

и

$$\frac{\partial C_{N-1}}{\partial x^l} + C_l C_{N-1} - C_{N-1} T C_l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, N-2, \quad (43)$$

где $T C_l(x^1, x^2, \dots, x^{N-2}, n) = C_l(x^1, x^2, \dots, x^{N-2}, n+1)$. Отметим отличие от ЦС (13), возникающее в силу замены $p_{N-1} \rightarrow T$. Условия совместности для уравнений (43) выполнены в силу того, что матрица $T C_j$, как и C_j , подчиняется уравнениям (42) для всех $j = 0, 1, \dots, N-2$.

Несложно показать, что система (42) содержит замкнутую подсистему для первых главных $(N-2) \times (N-2)$ -миноров $\tilde{C}_j$ матрицы C_j (т.е. $(\tilde{C}_j)_k^l = C_{jk}^l$, $l, k = 0, 1, \dots, N-2$):

$$\frac{\partial \tilde{C}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{C}_k}{\partial x^j} + [\tilde{C}_k, \tilde{C}_j] = 0, \quad j, k = 0, 1, \dots, N-2. \quad (44)$$

Эта подсистема определяет интегрируемую систему дифференциальных уравнений, которая совпадает с КЦС (5) при $j, k, l, n = 0, 1, \dots, N-2$ и при независимых переменных $x^1, x^2, \dots, x^{N-2}$. Остальная часть системы (42) и уравнений (43) определяют преобразование $\tilde{C}_l \rightarrow T\tilde{C}_l$, которое превращает решения системы (14) в решения этой же системы. Таким образом, уравнения (42), (43) определяют преобразование Дарбу для непрерывной системы (44).

Для иллюстрации этой общей схемы рассмотрим простейший случай $N = 4$, т.е. четырехмерную ассоциативную алгебру с коммутативным базисом $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{T}$. Таблица умножения имеет вид (мы приводим нетривиальную ее часть)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^2 &= A\mathbf{P}_0 + B\mathbf{P}_1 + C\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 &= D\mathbf{P}_0 + E\mathbf{P}_1 + G\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_2^2 &= L\mathbf{P}_0 + M\mathbf{P}_1 + N\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_1\mathbf{T} &= a_1\mathbf{P}_0 + a_2\mathbf{P}_1 + a_3\mathbf{P}_2 + a_4\mathbf{T}, \\ \mathbf{P}_2\mathbf{T} &= b_1\mathbf{P}_0 + b_2\mathbf{P}_1 + b_3\mathbf{P}_2 + b_4\mathbf{T}, \\ \mathbf{T}^2 &= c_1\mathbf{P}_0 + c_2\mathbf{P}_1 + c_3\mathbf{P}_2 + c_4\mathbf{T}. \end{aligned} \quad (45)$$

Матрица $C_0 = 1$, а матрицы C_1, C_2, C_3 таковы:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & A & D & a_1 \\ 1 & B & E & a_2 \\ 0 & C & G & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & D & L & b_1 \\ 0 & E & M & b_2 \\ 1 & G & N & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (44) при $j = 1, k = 2$ эквивалентно чисто непрерывной системе (17). Оставшаяся часть уравнений (42) принимает вид

$$\begin{aligned} a_{1x_2} - b_{1x_1} + Da_2 + La_3 - Ab_2 - Db_3 + b_1a_4 - a_1b_4 &= 0, \\ a_{2x_2} - b_{2x_1} + Ea_2 + Ma_3 - Bb_2 - Eb_3 - b_1 + b_2a_4 - a_2b_4 &= 0, \\ a_{3x_2} - b_{3x_1} + Ga_2 + Na_3 - Cb_2 - Gb_3 + a_1 + b_3a_4 - a_3b_4 &= 0, \\ a_{4x_2} - b_{4x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Матричные уравнения (43) эквивалентны 24 скалярным дифференциальным уравнениям. Анализ этих уравнений и уравнений (46) позволяет заключить, что не все они независимы. Далее, из этого следует, что все эти уравнения в принципе позволяют восстановить $a_j, b_j, c_j, j = 1, 2, 3, 4$, и в конце концов TA, TB и т.д. в терминах A, B и т.д.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА КАК ДИСКРЕТНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Приведем решение выписанных выше уравнений в случае редукции Буссинеска $B = 0$, $C = 1$, $G = 0$. В этом случае $L = D_{x_1} - A_{x_2} + A^2/2$, $M = A_{x_1}/2 + D$, $N = -A/2$ (см. раздел 3). Начнем с двух уравнений из системы (43), которые в калибровке Буссинеска имеют вид

$$a_{4x_1} + a_4^2 - b_4 - TA = 0, \quad b_{4x_1} + a_4 b_4 - \frac{1}{2} a_4 TA - TD = 0. \quad (47)$$

Из последнего уравнения в (46) следует, что существует такая функция φ , что

$$a_4 = (\ln \varphi)_{x_1}, \quad b_4 = (\ln \varphi)_{x_2}. \quad (48)$$

Подставляя эти выражения в (47), получаем уравнения

$$\varphi_{x_2} = \varphi_{x_1 x_1} - TA\varphi, \quad \varphi_{x_1 x_2} = \frac{1}{2} TA\varphi_{x_1} + TD\varphi, \quad (49)$$

которые являются просто линейными задачами (26) для непрерывного уравнения Буссинеска относительно сдвинутых решений TA и TD (это весьма полезно в вычислениях). Чтобы упростить их, рассмотрим специальный случай $a_3 = 1$, $c_3 = 1$. Весьма долгий анализ, который мы опускаем, показывает, что при таком выборе ЦС (46) имеет решение

$$\begin{aligned} a_1 &= A - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1 x_1} + (\ln \tilde{\Psi})_{x_1} (\ln \varphi)_{x_1}, & a_2 &= -(\ln(\tilde{\Psi}\varphi))_{x_1}, \\ a_3 &= 1, & a_4 &= (\ln \varphi)_{x_1}, \\ b_1 &= D - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1 x_2} + (\ln \tilde{\Psi})_{x_1} (\ln \varphi)_{x_2}, & b_2 &= \frac{1}{2} A - (\ln \varphi)_{x_2}, \\ b_3 &= -(\ln \tilde{\Psi})_{x_1}, & b_4 &= (\ln \varphi)_{x_2}, \\ c_1 &= A - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1 x_1} - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1} (\ln \varphi)_{x_1} + (\ln \tilde{\Psi})_{x_1} \frac{T\varphi}{\varphi}, \\ c_2 &= -(\ln(\tilde{\Psi}\varphi))_{x_1} - \frac{T\varphi}{\varphi}, & c_3 &= 1, & c_4 &= \frac{T\varphi}{\varphi}, \end{aligned} \quad (50)$$

причем

$$TA = A - 2(\ln \tilde{\Psi})_{x_1 x_1}, \quad TD = D + \frac{1}{2} (\ln \tilde{\Psi})_{x_1 x_1 x_1} - \frac{3}{2} (\ln \tilde{\Psi})_{x_1 x_2}, \quad (51)$$

где $\tilde{\Psi}$ – решение линейных задач для уравнения Буссинеска

$$\Psi_{x_2} = \Psi_{x_1 x_1} - A\Psi, \quad \Psi_{x_1 x_2} = \frac{1}{2} A\Psi_{x_1} + D\Psi, \quad (52)$$

а φ – решение уравнений (49).

Формулы (51) представляют собой хорошо известное преобразование Дарбу для системы уравнений Буссинеска (22) (см., например, [14]). Напомним, что в терминах τ -функции, определяемой формулами

$$A = -2(\ln \tau)_{x_1 x_1}, \quad D = -\frac{3}{2} (\ln \tau)_{x_1 x_2} + \frac{1}{2} (\ln \tau)_{x_1 x_1 x_1}, \quad (53)$$

преобразование Дарбу выглядит очень просто: $T\tau = \tilde{\Psi}\tau$.

Итак, мы построили деформации структурных констант из таблицы умножения (45), параметризованные двумя непрерывными переменными x^1, x^2 и одной дискретной переменной n . Они управляются системой уравнений Буссинеска (22), формулами (18), (50) и преобразованиями (51). С точки зрения интегрируемых систем соответствующая ЦС представляет собой композицию уравнения Буссинеска и его преобразования Дарбу.

Эти деформации имеют одно важное алгебраическое свойство. Используя формулы (50), можно показать, что линейные задачи $f_{jk}|\Psi\rangle = 0$ эквивалентны следующим уравнениям:

$$(p_2 - p_1^2 + Ap_0)|\Psi\rangle = 0, \quad \left(p_1p_2 - \frac{1}{2}Ap_1 - Dp_0\right)|\Psi\rangle = 0 \quad (54)$$

и

$$\begin{aligned} (p_1 - a_4p_0)(T - p_1 + (\ln \tilde{\Psi})_{x_1p_0})|\Psi\rangle &= 0, \\ (p_2 - b_4p_0)(T - p_1 + (\ln \tilde{\Psi})_{x_1p_0})|\Psi\rangle &= 0, \\ (T - c_4p_0)(T - p_1 + (\ln \tilde{\Psi})_{x_1p_0})|\Psi\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Факторизация линейных операторов в задачах (55), которые соответствуют дискретной части основных уравнений $f_{jk}|\Psi\rangle = 0$, является характеристическим свойством рассмотренных выше деформаций.

В координатном представлении, для которого $p_1 = \partial_{x_1}$, $p_2 = \partial_{x_2}$, $Tf(x, n) = f(x, n+1)$, линейные задачи (55) принимают вид

$$\begin{aligned} (\partial_{x_1} - (\ln \varphi)_{x_1})(T\Psi - (\Psi_{x_1} - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1}\Psi)) &= 0, \\ (\partial_{x_2} - (\ln \varphi)_{x_2})(T\Psi - (\Psi_{x_1} - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1}\Psi)) &= 0, \\ \left(T - \frac{T\varphi}{\varphi}\right)(T\Psi - (\Psi_{x_1} - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1}\Psi)) &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Из этих уравнений следует, что

$$T\Psi = \Psi_{x_1} - (\ln \tilde{\Psi})_{x_1}\Psi + \alpha\varphi, \quad (57)$$

где α – произвольная константа. При $\alpha = 0$ формула (57) есть не что иное, как стандартное преобразование волновой функции Буссинеска Ψ под действием преобразования Дарбу (см., например, работу [14]). При $\alpha \neq 0$ функция $T\Psi - \alpha\varphi$ также является решением линейных задач (52) с потенциалами TA, TD .

Таким образом, теория преобразований Дарбу (по крайней мере, для уравнения Буссинеска) может быть полностью включена в теорию деформаций, представленную в настоящей работе. Однако ситуация с уравнением ВДВВ совсем иная. При редукции $C = 1$, $G = N = 0$ и затем $E = A$, $M = D$ получаются уравнения (46) и другие задачи, которые не слишком отличаются от задач для уравнения Буссинеска. Но в отличие от предыдущего случая одно из этих уравнений эквивалентно переопределенной системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, совместность которых весьма проблематична. Имеются основания предполагать, что для построения преобразования типа преобразования Дарбу для уравнения ВДВВ следует рассматривать алгебры более высоких размерностей ($N \geq 5$).

Список литературы

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 281–332.
- [2] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86.
- [3] B. Dubrovin, *Nucl. Phys. B*, **379**:3 (1992), 627–689.
- [4] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [5] Y. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli Spaces*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **47**, AMS, Providence, RI, 1999.
- [6] C. Hertling, *Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities*, Cambridge Tracts in Math., **151**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [7] B. G. Konopelchenko, F. Magri, *Comm. Math. Phys.*, **274**:3 (2007), 627–658.
- [8] Б. Г. Конопельченко, Ф. Магри, *ТМФ*, **151**:3 (2007), 439–457.
- [9] B. G. Konopelchenko, F. Magri, *Yano manifolds and coisotropic deformations*, to appear.
- [10] B. G. Konopelchenko, *Quantum deformations of associative algebras and integrable systems*, [arXiv: 0802.3022](#).
- [11] B. G. Konopelchenko, *Discrete, q -difference deformations of associative algebras and integrable systems*, [arXiv: 0809.1938](#).
- [12] В. Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **62** (1972), 1745–1751.
- [13] A. Givental, *Mosc. Math. J.*, **3**:2 (2003), 475–505.
- [14] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.