Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Щепетилов, Задача двух тел на пространствах постоянной кривизны.
I. Связь гамильтониана с группой симметрий и редукция классической системы,
ТМФ, 2000, том 124, номер 2, 249–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:47:16

© 2000 г.

А. В. Щепетиллов*

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ НА ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ. I. СВЯЗЬ ГАМИЛЬТОНИАНА С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ И РЕДУКЦИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача двух тел с центральным взаимодействием на односвязных пространствах постоянной кривизны произвольной размерности. Получено явное выражение квантового гамильтониана через радиальный дифференциальный оператор и генераторы групп изометрий конфигурационного пространства. Дано описание приведенной классической механической системы на однородном пространстве группы Ли в терминах орбит коприсоединенного представления этой группы. Получено описание приведенной классической задачи двух тел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Односвязные пространства постоянной кривизны S^n и H^n обладают столь же широкими группами изометрий, как евклидово пространство E^n , и не имеют выделенных точек и направлений [1]. Геодезический поток на этих пространствах эквивалентен движению классической частицы в евклидовом пространстве в кулоновском поле на поверхности постоянной энергии [2–5]. Обзор исследований одночастичной задачи в случаях классической и квантовой механики в поле центрального потенциала на таких пространствах содержится в работе [6]. Отметим здесь только работы [7–10], не указанные в [6].

Фазовые пространства двухчастичных задач $S^n \times S^n$ и $H^n \times H^n$, в отличие от евклидова случая, не являются пространствами постоянной кривизны. Априори в группу симметрий этих задач входят только изометрии пространства, сохраняющие потенциал взаимодействия. Эта группа слишком бедна, для того чтобы обеспечить интегрируемость двухчастичных задач. В то же время для нетривиальных потенциалов неизвестны какие-либо “скрытые” симметрии или другие механизмы интегрируемости. Более того, численные эксперименты, проведенные в работах [11, 12], свидетельствуют о неинтегрируемости классической ограниченной задачи двух тел на двумерной сфере с наиболее естественными потенциалами.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: alexey@quant.phys.msu.su

Классическая механическая двухчастичная задача впервые была рассмотрена в работе [6], где для исключения движения системы в целом был использован метод гамильтоновой редукции систем с симметриями [13]. С помощью явных аналитических координатных вычислений на ЭВМ было получено описание редуцированных механических систем, проведена их классификация и получены условия существования глобальной динамики. В работе [14] впервые была рассмотрена аналогичная квантово-механическая задача в двумерном случае, т.е. на пространствах $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{H}^2$. Квантово-механический гамильтониан был выражен через генераторы групп изометрий и радиальный дифференциальный оператор. При этом оказалось, что структура последнего выражения напоминает структуру приведенной функции Гамильтона. Этот факт наводит на мысль о существовании общей процедуры использования имеющейся группы симметрий для одновременного упрощения классической и квантовой задач без использования громоздких вычислений. Такая процедура найдена в настоящей работе. Полученное с ее помощью выражение для квантово-механического гамильтониана может быть использовано, по крайней мере, в трех задачах.

Во-первых, из этого выражения может быть получена функция Гамильтона приведенной классической механической системы. При этом используется описание редуцированной классической механической системы на однородном пространстве группы Ли в терминах орбит коприсоединенного представления этой группы (см. раздел 4). Во-вторых, данное выражение гамильтониана позволяет доказать самосопряженность двухчастичных гамильтонианов с сингулярным взаимодействием. В-третьих, используя теорию представления групп, можно свести задачу нахождения энергетических уровней гамильтониана к последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений, нумеруемых неприводимыми представлениями группы изометрий. Двум последним задачам будет посвящена следующая работа.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Реализуем сферу $\mathbb{S}^n$ как пространство $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ с метрикой

$$g_s = \left(4R^2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2, \quad (1)$$

где x_i , $i = 1, \dots, n$, — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, R — радиус кривизны. Пусть $\rho^s(\cdot, \cdot)$ — расстояние между двумя точками $\mathbb{S}^n$. Связная компонента группы изометрий пространства $\mathbb{S}^n$, действующая слева, есть $\text{SO}(n+1)$, а поля Киллинга на $\mathbb{S}^n$ имеют вид

$$\begin{aligned} X_{ij}^s &= x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ Y_i^s &= \frac{1}{2} \left(1 + x_i^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2)$$

и соответствуют некоторому базису в алгебре $\mathfrak{so}(n+1)$.

Гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ реализуем в единичном шаре $D^n \subset \mathbb{R}^n$, наделив его метрикой

$$g_h = \left(4R^2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1. \quad (3)$$

Расстояние между двумя точками пространства $\mathbb{H}^n$ обозначим $\rho^h(\cdot, \cdot)$. Связная компонента группы изометрий, действующая слева, в этом случае есть группа $SO(1, n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(1, n)$, а поля Киллинга имеют вид

$$\begin{aligned} X_{ij}^h &= x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ Y_i^h &= \frac{1}{2} \left(1 - x_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВОБОДНЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ

Рассмотрим конфигурационные пространства задачи двух тел $Q_s = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ и $Q_h = \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ и соответствующие им гамильтонианы

$$\hat{H}_{s,h} = -\frac{1}{2m_1} \Delta_1 - \frac{1}{2m_2} \Delta_2 + U(\rho^{s,h}) \equiv \hat{H}_0^{s,h} + U(\rho^{s,h}), \quad (5)$$

где Δ_1 и Δ_2 – операторы Лапласа–Бельтрами на пространствах $\mathbb{S}^n$ или $\mathbb{H}^n$, соответствующие первой и второй частицам, U – центральный потенциал.

В соответствии с общей концепцией квантовой механики [15], оператор $\hat{H}_s$ ($\hat{H}_h$) должен быть определен на подходящем всюду плотном подпространстве пространства $\mathcal{L}^2(Q_{s,h}, d\mu_{s,h})$ квадратично-интегрируемых на Q_s (Q_h) функций. Это подпространство выбирается так, чтобы оператор был самосопряженным, причем соответствующая мера $d\mu_s$ ($d\mu_h$) есть произведение двух экземпляров инвариантной относительно группы $SO(n+1)$ ($SO(1, n)$) меры на пространстве $\mathbb{S}^n$ ($\mathbb{H}^n$).

Представим гамильтониан $\hat{H}_{s,h}$ через радиальный дифференциальный оператор и генераторы группы изометрий. Для этого достаточно найти такое выражение для свободного гамильтониана. Напомним [16, 17], что оператор Лапласа–Бельтрами Δ на пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ является самосопряженным оператором с областями определения

$$\begin{aligned} W_s^{2,2} &:= \{ \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^n, d\mu_s) \mid \Delta \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^n, d\mu_s) \}, \\ W_h^{2,2} &:= \{ \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}^n, d\mu_h) \mid \Delta \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}^n, d\mu_h) \}. \end{aligned}$$

Действие оператора Δ при этом понимается в смысле обобщенных функций. Областью существенной самосопряженности для оператора Δ на $\mathbb{S}^n$ является пространство гладких функций $C^\infty(\mathbb{S}^n)$, а для оператора Δ на $\mathbb{H}^n$ – пространство финитных гладких функций $C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$. Отсюда ясно, что свободный гамильтониан $\hat{H}_0^{s,h}$ самосопряжен на произведении $W_{s,h}^{2,2} := W_{s,h}^{2,2} \otimes W_{s,h}^{2,2}$ двух экземпляров пространств $W_{s,h}^{2,2}$, отвечающих первой и второй частицам.

Пусть подмногообразия $F_r^{s,h}$ пространств $Q_{s,h}$ отвечают постоянному значению r функции $\operatorname{tg}(\rho^s/2R)$ для пространства Q_s и функции $\operatorname{th}(\rho^h/2R)$ для пространства Q_h . Подмногообразия F_0^s, F_∞^s, F_0^h диффеоморфны $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ (значение $r = \infty$ отвечает диаметрально противоположным точкам на сфере $\mathbb{S}^n$). При $0 < r < \infty$ подмногообразие F_r^s есть однородное риманово пространство группы $\operatorname{SO}(n+1)$ со стационарной подгруппой $K = \operatorname{SO}(n-1)$. При $0 < r < 1$ подмногообразие F_r^h есть однородное риманово пространство группы $\operatorname{SO}(1, n)$ со стационарной подгруппой K .

С точностью до множества нулевой меры $Q_s = \mathbb{R}_+ \times (\operatorname{SO}(n+1)/K)$, где $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, и $Q_h = I \times (\operatorname{SO}(1, n)/K)$, где $I = (0, 1)$. Операторы $\hat{H}_0^{s,h}$ являются операторами Лапласа–Бельтрами для метрики $\tilde{g}_{s,h} = 2m_1 g_{s,h}^{(1)} + 2m_2 g_{s,h}^{(2)}$ на $Q_{s,h}$, где $g_{s,h}^{(1)}$ и $g_{s,h}^{(2)}$ суть метрики (1) и (3) на разных экземплярах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$, соответствующие частицам 1 и 2.

3.1. Гамильтониан на сфере $\mathbb{S}^n$. Выбрав точку $\mathbf{x}_0 \in F_r$, мы можем отождествить слой F_r с факторпространством $\operatorname{SO}(n+1)/\operatorname{SO}(n-1)$ в соответствии с формулой $\mathbf{x} = gK\mathbf{x}_0$, где gK – левый смежный класс элемента g в группе $\operatorname{SO}(n+1)$. Пусть $(r, y_1, \dots, y_{2n-1})$ – локальные координаты в окрестности W точки $\mathbf{x}_0 \in Q_s$ такие, что $(y_1, \dots, y_{2n-1})$ – координаты в любом непустом открытом подмножестве $W \cap F_r$ пространства Q_s . Тогда метрика $\tilde{g}_s$ в W принимает вид

$$\tilde{g}_s = g_{rr}(r) dr^2 + \sum_{i,j=1}^{2n-1} g_{ij}(r, y_1, \dots, y_{2n-1}) dy_i dy_j.$$

Второе слагаемое в этой формуле есть ограничение некоторой метрики g_f со слоя F_r на множество $U \cap F_r$. Используя стандартное выражение оператора Лапласа–Бельтрами через локальные координаты, мы получаем

$$\Delta_{\tilde{g}_s} = (g_{rr} \det g_{ij})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{g_{rr} \det g_{ij}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_{g_f}. \quad (6)$$

Нам необходимо выразить оператор Δ_{g_f} на F_r через генераторы группы Ли $\operatorname{SO}(n+1)$. С этой целью поднимем его на группу $\operatorname{SO}(n+1)$, воспользовавшись следующей конструкцией [18]. Пусть Γ – группа Ли, а Γ_0 – ее компактная подгруппа. Группа Γ действует слева на однородном пространстве Γ/Γ_0 . Левоинвариантные дифференциальные операторы на пространстве Γ/Γ_0 могут быть представлены левоинвариантными операторами на группе Γ , которые также инвариантны относительно правого действия группы Γ_0 . Это представление однозначно с точностью до операторных слагаемых, обращающихся в нуль при действии на правоинвариантные относительно Γ_0 функции.

Действительно, функции на пространстве Γ/Γ_0 находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями на группе Γ , которые инвариантны относительно правого действия подгруппы Γ_0 . Это соответствие задается формулой $\lambda: f \rightarrow \tilde{f} := f \circ \pi$, где π – каноническая проекция $\Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma_0$, f – функция на пространстве Γ/Γ_0 . Пусть D – левоинвариантный относительно группы Γ дифференциальный оператор на Γ , являющийся также правоинвариантным относительно Γ_0 , а f – гладкая функция на пространстве

Γ/Γ_0 . Тогда формула $\widetilde{D_u f} = D\tilde{f}$, где D_u – дифференциальный оператор на пространстве Γ/Γ_0 , инвариантный относительно левого действия Γ , задает упомянутое соответствие $D \rightarrow D_u$.

Пусть $e_1, \dots, e_N$ – базис алгебры Ли группы Γ , $N := \dim \Gamma$, а L_γ и R_γ обозначают левый и правый сдвиги на элемент γ . Алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов на группе Γ порождена над полем $\mathbb{R}$ левоинвариантными векторными полями $e_1^l, \dots, e_N^l$, где $e_i^l(\gamma) = dL_\gamma(e_i)$, $\gamma \in \Gamma$, $i = 1, \dots, N$ [18].

Пусть теперь $\Gamma = \text{SO}(n+1)$, $\Gamma_0 = K$, $e_i^r(\gamma) = dR_\gamma(e_i)$, $i = 1, \dots, N$, $N = (n+1)(n+2)/2$, $\mathbf{x}_0 = (r_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, r_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$, где

$$r_1 = \text{tg} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \arctg r \right), \quad r_2 = -\text{tg} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \arctg r \right).$$

Множество полей Киллинга X_{ij}^s, Y_i^s , $i, j = 1, \dots, n$, на пространстве $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$, соответствующих (2), совпадает (с точностью до перестановки) с множеством

$$\left\{ \tilde{e}_i^r(\gamma x_0) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \exp(\tau e_i) \gamma \mathbf{x}_0 \right\}_{i=1}^N, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(r), \quad 0 < r < \infty, \quad (7)$$

при соответствующем выборе базиса $e_1^l, \dots, e_N^l$. Пусть Δ_f – дифференциальный оператор второго порядка на группе Γ , так что $(\Delta_f)_u = \Delta_{g_f}$. Тогда он левоинвариантен и может быть выражен в следующей форме¹⁾:

$$\Delta_f|_\gamma = \sum_{i,j=1}^N c^{ij} e_i^l(\gamma) e_j^l(\gamma) + \sum_{i=1}^N c^i e_i^l(\gamma),$$

где c^{ij}, c^i – постоянные на слое F_r . Пусть e – единица группы Γ . Очевидно, что $e_i^r(e) = e_i^l(e)$, $i = 1, \dots, N$, и

$$\Delta_f|_e = \sum_{i,j=1}^N c^{ij} e_i^r(e) e_j^r(e) + \sum_{i=1}^N c^i e_i^r(e). \quad (8)$$

Это значит, что

$$\Delta_{g_f}|_{\mathbf{x}_0} = \sum_{i,j=1}^N c^{ij} \tilde{e}_i^r(x_0) \tilde{e}_j^r(x_0) + \sum_{i=1}^N c^i \tilde{e}_i^r(x_0) =: \Delta_{g_f}^{(2)}|_{\mathbf{x}_0} + \Delta_{g_f}^{(1)}|_{\mathbf{x}_0}.$$

Коэффициенты c^{ij} могут быть найдены следующим образом. Упорядоченное множество векторов $\{Y_1^s(\mathbf{x}_0), \dots, Y_n^s(\mathbf{x}_0), X_{12}^s(\mathbf{x}_0), \dots, X_{1n}^s(\mathbf{x}_0)\}$ может рассматриваться

¹⁾Здесь мы отождествляем левоинвариантные векторные поля на Γ и элементы $T_e\Gamma$.

как базис в пространстве $T_{\mathbf{x}_0} F_r$. Пусть $\{Y^1, \dots, Y^n, X^2, \dots, X^n\}$ – дуальный базис. Тогда

$$gf|_{\mathbf{x}_0} = aY^1 \otimes Y^1 + \sum_{i=2}^n \left[Y^1 \otimes (\alpha_i Y^i + \beta_i X^i) + \sum_{j=2}^n (\alpha_{ij} Y^i \otimes Y^j + \beta_{ij} X^i \otimes X^j + \gamma_{ij} Y^i \otimes X^j) \right],$$

где

$$\begin{aligned} a &= \tilde{g}|_{\mathbf{x}_0} (Y_1^s(\mathbf{x}_0), Y_1^s(\mathbf{x}_0)) = 2R^2(m_1 + m_2), \\ \alpha_i &= \tilde{g}|_{\mathbf{x}_0} (Y_1^s(\mathbf{x}_0), Y_i^s(\mathbf{x}_0)) = 0, \\ \beta_i &= \tilde{g}|_{\mathbf{x}_0} (Y_1^s(\mathbf{x}_0), X_{1i}^s(\mathbf{x}_0)) = 0, \\ \alpha_{ij} &= \tilde{g}|_{\mathbf{x}_0} (Y_i^s(\mathbf{x}_0), Y_j^s(\mathbf{x}_0)) = 2R^2 \sum_{k=1}^2 \frac{m_k(1-r_k^2)^2}{(1+r_k^2)^2} \delta_{ij}, \\ \beta_{ij} &= \tilde{g}|_{\mathbf{x}_0} (X_{1i}^s(\mathbf{x}_0), X_{1j}^s(\mathbf{x}_0)) = 8R^2 \sum_{k=1}^2 \frac{m_k r_k^2}{(1+r_k^2)^2} \delta_{ij}, \\ \gamma_{ij} &= \tilde{g}|_{\mathbf{x}_0} (Y_i^s(\mathbf{x}_0), X_{1j}^s(\mathbf{x}_0)) = 4R^2 \sum_{k=1}^2 \frac{m_k r_k (1-r_k^2)}{(1+r_k^2)^2} \delta_{ij}, \quad i, j = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, мы получаем

$$\Delta_{gf}^{(2)}|_{\mathbf{x}_0} = \frac{1}{a} (Y_1^s(\mathbf{x}_0))^2 + \sum_{i=2}^n [A_s (X_{1i}^s(\mathbf{x}_0))^2 + C_s (Y_i^s(\mathbf{x}_0))^2 + B_s \{X_{1i}^s(\mathbf{x}_0), Y_i^s(\mathbf{x}_0)\}], \tag{10}$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает антикоммутатор,

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{m_1(1-r_1^2)^2(1+r_2^2)^2 + m_2(1+r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{8R^2 m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2 (1+r_1 r_2)^2}, \\ B_s &= -\frac{m_1 r_1 (1-r_1^2)(1+r_2^2)^2 + m_2 r_2 (1-r_2^2)(1+r_1^2)^2}{4R^2 m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2 (1+r_1 r_2)^2}, \\ C_s &= \frac{m_1 r_1^2 (1+r_2^2)^2 + m_2 r_2^2 (1+r_1^2)^2}{2R^2 m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2 (1+r_1 r_2)^2}. \end{aligned}$$

Функции A_s, B_s, C_s можно выразить через координату r :

$$\begin{aligned} A_s(r) &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{(1+r^2)^2}{8mr^2} + \frac{1-r^4}{8mr^2} \cos \zeta + \frac{1+r^2}{4m_1 m_2 r} (m_1 - m_2) \sin \zeta \right), \\ B_s(r) &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 r} (1+r^2) \cos \zeta + \frac{1-r^4}{2mr^2} \sin \zeta \right), \\ C_s(r) &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{(1+r^2)^2}{8mr^2} - \frac{1-r^4}{8mr^2} \cos \zeta - \frac{1+r^2}{4m_1 m_2 r} (m_1 - m_2) \sin \zeta \right), \\ \zeta &= 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{arctg} r, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Операторы $\Delta_{g_f}|_{\mathbf{x}_0}$ и $\Delta_{g_f}^{(2)}|_{\mathbf{x}_0}$ (10) инвариантны относительно отражений сферы $\mathbb{S}^n$ $T_k: x_k \rightarrow -x_k$, $x_j \rightarrow x_j$, $j \neq k$, поэтому оператор $\Delta_{g_f}^{(1)}|_{\mathbf{x}_0}$ также инвариантен относительно этих преобразований. Но для оператора первого порядка с постоянными коэффициентами это возможно, только если он равен нулю, поэтому $c^i = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Если обозначить левоинвариантные векторные поля на группе $\mathrm{SO}(n+1)$, соответствующие векторам $Y_1^s(\mathbf{x}_0)$, $X_{1i}^s(\mathbf{x}_0)$, $Y_i^s(\mathbf{x}_0)$, $i = 2, \dots, n$, через $Y_1^{s,l}$, $X_i^{s,l}$, $Y_i^{s,l}$, то получим

$$\Delta_f = \frac{1}{a}(Y_1^{s,l})^2 + \sum_{i=2}^n \left[A_s(X_i^{s,l})^2 + C_s(Y_i^{s,l})^2 + \frac{1}{4}B_s\{X_i^{s,l}, Y_i^{s,l}\} \right]. \quad (11)$$

Таким образом, мы нашли оператор Δ_f с точностью до слагаемых, аннулируемых правоинвариантными относительно подгруппы Γ_0 функциями. Можно проверить прямыми вычислениями, что этот оператор правоинвариантен относительно K .

Найдем теперь первое слагаемое в выражении (6) для оператора $\Delta_{\tilde{g}}$. В точке $\mathbf{x}_0$ мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1 + r_1^2}{1 + r^2} \frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{1 + r_2^2}{1 + r^2} \frac{\partial}{\partial r_2},$$

поэтому

$$g_{rr} = \tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{8R^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(1 + r^2)^2}. \quad (12)$$

Принимая во внимание формулы (9), получим

$$\Delta_{\tilde{g}} = \frac{(1 + r^2)^n}{8mR^2 r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_{g_f}.$$

Первое слагаемое является радиальной частью одночастичного гамильтониана, соответствующего массе m .

Явные вычисления дают для меры $d\mu_s$, соответствующей метрике $\tilde{g}$ на пространстве Q_s в точке $\mathbf{x}_0$, следующее выражение (с точностью до постоянного множителя):

$$d\mu_s|_{\mathbf{x}_0} = \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr \wedge Y^1 \wedge \dots \wedge Y^n \wedge X^2 \wedge \dots \wedge X^n.$$

Мера $d\mu_s$ инвариантна относительно левого действия группы $\mathrm{SO}(n+1)$, и, следовательно, она может быть представлена в виде $d\mu_s = d\nu_s \otimes d\mu_f$, где $d\nu_s = r^{n-1} dr / (1 + r^2)^n$ — мера на множестве $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ такая же, как и в одночастичном случае, а $d\mu_f$ — левоинвариантная относительно группы $\mathrm{SO}(n+1)$ мера на пространстве $\mathrm{SO}(n+1)/K$.

На любой группе Ли существует единственная (с точностью до постоянного множителя) левоинвариантная (или правоинвариантная) мера (мера Хаара [19]). Для рассматриваемых групп $\mathrm{SO}(n+1)$ и $\mathrm{SO}(1, n)$ такие меры являются двусторонне инвариантными. Поэтому существует единственная двусторонне инвариантная мера $d\eta_s$ на группе $\mathrm{SO}(n+1)$ такая, что интеграл от любой интегрируемой функции f на пространстве $\mathrm{SO}(n+1)/K$ по мере $d\mu_f$ равен интегралу от функции $\tilde{f}$ на группе $\mathrm{SO}(n+1)$ по мере $d\eta_s$.

Для подгруппы Γ_0 группы Ли Γ обозначим $\mathcal{L}^2(\Gamma, \Gamma_0, d\eta)$ пространство квадратично-интегрируемых функций на группе Γ (относительно меры $d\eta$ на Γ), которые инвариантны относительно правого действия Γ_0 .

ТЕОРЕМА 1. Свободный квантовый гамильтониан системы двух частиц на сфере $\mathbb{S}^n$ можно рассматривать как самосопряженный дифференциальный оператор (на многообразии $\tilde{Q}_s = \mathbb{R}_+ \times \mathrm{SO}(n+1)$) в пространстве $\mathcal{H}_s$

$$\hat{H}_0^s = -\frac{(1+r^2)^n}{8mR^2r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \Delta_f \quad (13)$$

с областью определения

$$D_s := D_s^{(1)} \otimes D_s^{(2)} \subset \mathcal{H}_s := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \otimes \mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), K, d\eta_s),$$

где

$$\begin{aligned} D_s^{(1)} &:= \{ \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \mid \Delta_s^{(1)} \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \}, \\ D_s^{(2)} &:= \{ \phi \in \mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), K, d\eta_s) \mid \Delta_f \phi \in \mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), K, d\eta_s) \}, \\ \Delta_s^{(1)} &:= -\frac{(1+r^2)^n}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

подгруппа K изоморфна группе $\mathrm{SO}(n-1)$, а $d\eta_s$ — однозначно определенная (с точностью до постоянного множителя) двусторонне инвариантная мера на группе $\mathrm{SO}(n+1)$. Это означает, что существует изометрия исходного функционального пространства $\mathcal{L}^2(Q_s, d\mu_s)$ на $\mathcal{H}_s$, которая порождает изоморфизм гамильтонианов. Пространство D_s всюду плотно в $\mathcal{H}_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (6) является формой записи гамильтониана $\hat{H}_0^s$ в системе координат, связанной с представлением Q_s в виде прямого произведения $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)$ с точностью до множества нулевой меры $F_0^s \cup F_\infty^s$, которое несущественно для изучения суммируемых по этой мере функций, поэтому $\mathcal{L}^2(Q_s, d\mu_s) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \otimes \mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1), d\mu_f)$. Изометрия $\lambda: f \rightarrow \tilde{f}$ пространств $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1), d\mu_f)$ и $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n-1), d\eta_s)$ порождает изометрию $\mathrm{id} \otimes \lambda$ пространств $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_s) \otimes \mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1), d\mu_f)$ и $\mathcal{H}_s$. Изометрия $\mathrm{id} \otimes \lambda$, как следует из проведенных вычислений, и переводит оператор (6) в оператор (13), при этом пространство W_s переходит в пространство D_s .

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $n = 2$ этот результат может быть получен при рассмотрении базиса левоинвариантных векторных полей на группе $\mathrm{SO}(n+1) = \mathrm{SO}(3)$ как подвижного репера на слое F_r [14]. В случае $n > 2$ такой путь невозможен, поскольку действие группы $\mathrm{SO}(n+1)$ на слое F_r не является свободным и левоинвариантные векторные поля на группе $\mathrm{SO}(n+1)$ не проецируются однозначно на пространство $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)$. Подъем гамильтониана на группу симметрий позволяет получить его выражение через генераторы группы.

3.2. Гамильтониан на гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$. Формальная замена $x_j \rightarrow ix_j$, $j = 1, \dots, n$, $r \rightarrow ir$, $R \rightarrow iR$ (i — мнимая единица) переводит объекты на сфере $\mathbb{S}^n$ в объекты на гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ (см. также [6]), поэтому

мы получаем выражение для двухчастичного свободного гамильтониана на пространстве $\mathbb{H}^n$

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^h = & -\frac{(1-r^2)^n}{8mR^2r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{a} (Y_1^{h,l})^2 - \\ & - \sum_{k=2}^n \left[A_h (X_k^{h,l})^2 - C_h (Y_k^{h,l})^2 + \frac{1}{4} B_h \{X_k^{h,l}, Y_k^{h,l}\} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где векторные поля $X_k^{h,l}, Y_k^{h,l}$ соответствуют полям (4) так же, как поля $X_k^{s,l}, Y_k^{s,l}$ соответствуют полям (2),

$$\begin{aligned} A_h(r) &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{(1-r^2)^2}{8mr^2} + \frac{1-r^4}{8mr^2} \operatorname{ch} \zeta - \frac{1-r^2}{4m_1m_2r} (m_1 - m_2) \operatorname{sh} \zeta \right), \\ B_h(r) &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1m_2r} (1-r^2) \operatorname{ch} \zeta + \frac{1-r^4}{2mr^2} \operatorname{sh} \zeta \right), \\ C_h(r) &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{(1-r^2)^2}{8mr^2} - \frac{1-r^4}{8mr^2} \operatorname{ch} \zeta + \frac{1-r^2}{4m_1m_2r} (m_1 - m_2) \operatorname{sh} \zeta \right), \\ \zeta &= 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{arctg} r. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Свободный квантовый двухчастичный гамильтониан на гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как самосопряженный дифференциальный оператор (14) (на многообразии $\tilde{Q}_h = I \times \operatorname{SO}(1, n)$) в пространстве $\mathcal{H}_h$ с областью определения*

$$D_h := D_h^{(1)} \otimes D_h^{(2)} \subset \mathcal{H}_h := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_h) \otimes \mathcal{L}^2(\operatorname{SO}(1, n), K, d\eta_h),$$

где

$$\begin{aligned} D_h^{(1)} &:= \{ \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_h) \mid \Delta_h^{(1)} \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, d\nu_h) \}, \\ D_h^{(2)} &:= \{ \phi \in \mathcal{L}^2(\operatorname{SO}(1, n), K, d\eta_h) \mid \Delta_h \phi \in \mathcal{L}^2(\operatorname{SO}(1, n), K, d\eta_h) \}, \\ \Delta_h^{(1)} &:= -\frac{(1-r^2)^n}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad d\nu_h = \frac{r^{n-1} dr}{(1-r^2)^n}, \\ \Delta_h &:= -\frac{1}{a} (Y_1^{h,l})^2 - \sum_{k=2}^n \left[A_h (X_k^{h,l})^2 - C_h (Y_k^{h,l})^2 + \frac{1}{4} B_h \{X_k^{h,l}, Y_k^{h,l}\} \right], \end{aligned}$$

а $d\eta_h$ – единственная (с точностью до постоянного множителя) двусторонне инвариантная мера на группе $\operatorname{SO}(1, n)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

4. РЕДУКЦИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА КОКАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть Γ – группа Ли с алгеброй $\mathfrak{g}$, Γ_0 – подгруппа группы Γ с алгеброй $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, действующая на Γ справа. Пусть $M = T^*\Gamma_1$ – кокасательное расслоение однородного пространства $\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_0$, наделенное стандартной симплектической структурой. Стандартное левое действие группы Γ на M является пуассоновым [13]. Пусть $\Phi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ – соответствующее отображение момента, а H – Γ -инвариантная функция на M . Рассмотрим метод редукции Марсдена–Вейнштейна применительно к гамильтоновой динамической системе с функцией H на многообразии M . Хорошо известно [13], что для $\Gamma_0 = \{e\}$ приведенное фазовое пространство симплектоморфно орбите группы Γ в кокасательном расслоении, снабженной формой Кириллова. Следующая конструкция обобщает данное утверждение.

Пусть O_{β_0} – орбита коприсоединенного действия группы Γ на $\mathfrak{g}^*$, содержащая точку $\beta_0 \in \mathfrak{g}^*$, и $O'_{\beta_0} := \{\beta \in O_{\beta_0} \mid \beta|_{\mathfrak{g}_0} = 0\}$. Очевидно, что $\text{Ad}^*_{\Gamma_0} O'_{\beta_0} = O'_{\beta_0}$. Пусть $\tilde{O}_{\beta_0} = O'_{\beta_0} / \text{Ad}^*_{\Gamma_0}$ и $\pi: O'_{\beta_0} \rightarrow \tilde{O}_{\beta_0}$ – каноническая проекция. Пусть ω – ограничение формы Кириллова на O'_{β_0} . Это означает, что если элементы $X, Y \in T_{\beta} O'_{\beta_0}$, $\beta \in O'_{\beta_0}$, имеют вид

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}^*_{\exp(tX')} \beta, \quad Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}^*_{\exp(tY')} \beta, \quad X', Y' \in \mathfrak{g},$$

то $\omega(X, Y) = \beta([X', Y'])$. Поскольку $\text{Ad}^*_{\exp(tX')} \beta|_{\mathfrak{g}_0} = 0$, то

$$\beta([X', Y'_0]) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}^*_{\exp(tX')} \beta(Y'_0) = 0$$

для любого элемента $Y'_0 \in \mathfrak{g}_0$. Это означает, что 2-форма $\tilde{\omega}$ корректно определена на $T\tilde{O}_{\beta_0}$ формулой $\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \omega(d\pi^{-1}\tilde{X}, d\pi^{-1}\tilde{Y})$ для $\tilde{X} \in T_{\pi\beta}\tilde{O}_{\beta_0}$, $\tilde{Y} \in T_{\pi\beta}\tilde{O}_{\beta_0}$.

ТЕОРЕМА 3. *Приведенное фазовое пространство $\tilde{M}_{\beta_0}$, соответствующее значению отображения момента β_0 , симплектоморфно симплектическому пространству $(\tilde{O}_{\beta_0}, \tilde{\omega})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $x \in M_{\beta_0} := \Phi^{-1}(\beta_0) \subset M$ как орбиту $O_{x'}$ некоторой точки $x' = (\gamma, p) \in T^*\Gamma$, $\gamma \in \Gamma$, $p \in T^*_{\gamma}\Gamma$, относительно правого действия Γ_0 на $T^*\Gamma$. Чтобы избежать слишком громоздких обозначений, мы сохраним для левого и правого действий $(\gamma, p) \rightarrow (\gamma_1\gamma, L^*_{\gamma_1^{-1}}p)$ и $(\gamma, p) \rightarrow (\gamma\gamma_1, R^*_{\gamma_1^{-1}}p)$ элемента $\gamma_1 \in \Gamma$ на $T^*\Gamma$ обозначения L_{γ_1} и R_{γ_1} , соответственно. Согласно определению отображения момента, если

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp(tX')} \gamma, \quad X' \in \mathfrak{g}, \quad X \in T_{\gamma}\Gamma,$$

то $p(X) = \beta_0(X')$, т.е. $p = R^*_{\gamma^{-1}}\beta_0$. Если $X' \in \text{Ad}_{\gamma}\mathfrak{g}_0$, то $X \in d\pi_1(T_{x'}O_{x'})$, где $\pi_1: T^*\Gamma \rightarrow \Gamma$ – стандартная проекция, $p(X) = 0$. Следовательно, $\text{Ad}^*_{\gamma}\beta_0|_{\mathfrak{g}_0} = 0$.

Обозначим $O = \{x' = (\gamma, p) \in T^*\Gamma \mid \text{Ad}_\gamma^* \beta_0|_{g_0} = 0, p = R_{\gamma^{-1}}^* \beta_0\}$. Пусть $\tau: O \rightarrow g^* = T_e^*\Gamma$ – отображение, действующее по формуле $\tau(\gamma, p) = L_\gamma^* p$. Следующая диаграмма коммутативна [13]:

$$\begin{array}{ccc} T^*\Gamma & \xrightarrow{L_{\gamma^{-1}}} & T^*\Gamma \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ g^* & \xrightarrow{\text{Ad}_\gamma^*} & g^* \end{array},$$

поэтому орбита стационарной подгруппы Γ_{β_0} на $T^*\Gamma$ переводится отображением τ в одну точку. По определению множества O справедливо $\tau(O) = O'_{\beta_0}$, а элемент (γ, p) переводится отображением τ в $\text{Ad}_\gamma^* \beta_0$, поэтому элемент $R_{\gamma_0}(\gamma, p)$ переводится в $\text{Ad}_{\gamma\gamma_0}^* \beta_0 = \text{Ad}_{\gamma_0}^* \circ \text{Ad}_\gamma^* \beta_0$. Следовательно, орбиты правого действия группы Γ_0 на O переводятся в орбиты коприсоединенного действия группы Γ_0 на O'_{β_0} . Таким образом, отображение τ индуцирует диффеоморфизм

$$\phi: \widetilde{M}_{\beta_0} = \Gamma_{\beta_0} \backslash M_{\beta_0} = \Gamma_{\beta_0} \backslash (O/\Gamma_0) \rightarrow O'_{\beta_0} / \text{Ad}_{\Gamma_0}^* = \widetilde{O}_{\beta_0}.$$

Остается доказать, что симплектическая форма $\widehat{\omega}$ на $\widetilde{M}_{\beta_0}$ под действием отображения ϕ переводится в форму $-\widetilde{\omega}$. Но этот факт следует из его справедливости для случая $\Gamma_0 = \{e\}$, возможности представления касательных векторов на пространстве $\widetilde{M}_{\beta_0}$ через касательные вектора на O и коммутативности следующей диаграммы для любого $\gamma_0 \in \Gamma_0$:

$$\begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{R_{\gamma_0}} & O \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ O'_{\beta_0} & \xrightarrow{R_{\gamma_0}} & O'_{\beta_0} \end{array}$$

Форма $\widehat{\omega}$ симплектическая, поэтому мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Форма $\widetilde{\omega}$ на $\widetilde{O}_{\beta_0}$ является симплектической, т.е. невырожденна и замкнута.*

5. РЕДУКЦИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ

В работе [6] было отмечено, что для пространств $\mathbb{H}^n$ и $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, задача двух тел достигает максимальной общности при $n = 3$, так как два элемента из пространства $T^*\mathbb{H}^n$ ($T^*\mathbb{S}^n$) всегда содержатся в некотором подпространстве $T^*\mathbb{H}^3 \subset T^*\mathbb{H}^n$ ($T^*\mathbb{S}^3 \subset T^*\mathbb{S}^n$). Следовательно, две материальные точки с центральным взаимодействием останутся всегда в пространстве $\mathbb{H}^3$ ($\mathbb{S}^3$), поэтому мы рассмотрим случай $n = 3$.

5.1. Задача двух частиц на сфере $\mathbb{S}^3$. Пусть теперь пространство $M = T^*Q_s$ снабжено стандартной симплектической структурой. Согласно п. 3.1 мы можем представить многообразие M с точностью до множества нулевой меры, соответствующего значениям $r = 0, \infty$, в виде

$$M = T^*\mathbb{R}_+ \times T^*(\text{SO}(4)/\text{SO}(2)). \quad (15)$$

Группа симметрий $\text{SO}(4)$ действует только на второй сомножитель произведения (15), поэтому конструкция, описанная в разделе 4, легко обобщается на данный случай. После редукции мы получаем вместо (15) пространство

$$\widetilde{M}_{\beta_0} = T^*\mathbb{R}_+ \times \widetilde{Q}_{\beta_0},$$

где $\widetilde{Q}_{\beta_0}$ строится для пространств $\Gamma = \text{SO}(4)$, $\Gamma_0 = \text{SO}(2)$, как в разделе 4.

Введем конкретные координаты на пространстве $\widetilde{M}_{\beta_0}$ и используем формулу (13) для выражения функции Гамильтона через эти координаты. В случае $n = 3$ векторные поля Киллинга (2) есть $X_{12}^s, X_{31}^s, X_{23}^s, Y_1^s, Y_2^s, Y_3^s$. Для простоты мы будем использовать эти обозначения также для базиса алгебры $\text{so}(4)$ (без индекса “ s ”) в соответствии с (7). Пусть $X^{12}, X^{31}, X^{23}, Y^1, Y^2, Y^3$ – дуальный базис. Введем также другой базис на алгебре $\text{so}(4)$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(X_{23}^s + Y_1^s), & L_2 &= \frac{1}{2}(X_{31}^s + Y_2^s), & L_3 &= \frac{1}{2}(X_{12}^s + Y_3^s), \\ G_1 &= \frac{1}{2}(X_{23}^s - Y_1^s), & G_2 &= \frac{1}{2}(X_{31}^s - Y_2^s), & G_3 &= \frac{1}{2}(X_{12}^s - Y_3^s). \end{aligned}$$

Для этого базиса справедливы соотношения

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [G_i, G_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} G_k, \quad [L_i, G_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$. Этот базис соответствует разложению $\text{so}(4) = \text{so}(3) \oplus \text{so}(3)$. Пусть

$$\begin{aligned} L^1 &= X^{23} + Y^1, & L^2 &= X^{31} + Y^2, & L^3 &= X^{12} + Y^3, \\ G^1 &= X^{23} - Y^1, & G^2 &= X^{31} - Y^2, & G^3 &= X^{12} - Y^3 \end{aligned}$$

– дуальный базис. Для произвольного элемента пространства $\text{so}^*(4)$ мы будем использовать обозначение

$$\mathbf{p} = p_1 X^{23} + p_2 X^{31} + p_3 X^{12} + p_4 Y^1 + p_5 Y^2 + p_6 Y^3 = \sum_{i=1}^3 (u_i L^i + v_i G^i). \quad (17)$$

Стандартное соответствие между классическим и квантовым гамильтонианами и формулы (11) и (13) дают следующее выражение для классической функции Гамильтона:

$$H_s = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{1}{a} p_4^2 + A_s(p_2^2 + p_3^2) + C_s(p_5^2 + p_6^2) + \frac{1}{2} B_s(p_3 p_5 - p_2 p_6) + U(r),$$

где p_r – импульс, сопряженный координате r . После подстановки $p_i = u_i + v_i$, $p_{3+i} = u_i - v_i$, $i = 1, 2, 3$, мы получаем

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{1}{a} (u_1 - v_1)^2 + A_s((u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2) + \\ &\quad + C_s((u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2) + B_s(u_2 v_3 - v_2 u_3) + U(r). \end{aligned}$$

Построим теперь канонически-сопряженные координаты на пространстве $\tilde{O}_{\beta_0}$. Благодаря специальному выбору точки $\mathbf{x}_0$ на слое F_r в п. 3.1, ее стационарная подгруппа $\text{SO}(2)$ порождается элементом X_{23} . Хорошо известно, что орбиты коприсоединенного действия группы $\text{SO}(3)$ – это сферы, а форма Кириллова на них – площадь этих сфер. Поэтому орбита O_{β_0} может быть представлена как множество элементов вида (17) таких, что координаты $u_i, v_i, i = 1, 2, 3$, удовлетворяют соотношениям

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \mu^2, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \nu^2, \quad (18)$$

где μ, ν – неотрицательные вещественные числа. Подмножество $O'_{\beta_0} \subset O_{\beta_0}$ состоит из тех элементов O_{β_0} , которые аннулируются элементами X_{23} , поэтому для описания множества O'_{β_0} мы должны добавить к уравнениям (18) условие $p_1 = u_1 + v_1 = 0$.

Сначала рассмотрим случай $\mu, \nu > 0$. Пусть u, ψ, χ – координаты на пространстве O'_{β_0} , вводимые уравнениями

$$\begin{aligned} u_1 = -v_1 = u, \quad u_2 = \sqrt{\mu^2 - u^2} \sin \psi, \quad u_3 = \sqrt{\mu^2 - u^2} \cos \psi, \\ v_2 = \sqrt{\nu^2 - u^2} \sin \chi, \quad v_3 = \sqrt{\nu^2 - u^2} \cos \chi, \quad -\min\{\mu, \nu\} \leq u \leq \min\{\mu, \nu\}. \end{aligned}$$

Ограничение формы Кириллова с O_{β_0} на O'_{β_0} имеет вид

$$\begin{aligned} \omega = \frac{1}{\mu^2} (u_1 du_2 \wedge du_3 + u_2 du_3 \wedge du_1 + u_3 du_1 \wedge du_2) + \\ + \frac{1}{\nu^2} (v_1 dv_2 \wedge dv_3 + v_2 dv_3 \wedge v_1 + v_3 dv_1 \wedge dv_2) = du \wedge d(\psi - \chi). \end{aligned} \quad (19)$$

Коприсоединенное действие однопараметрической группы, соответствующей элементу X_{23} , на O'_{β_0} описывается формулами $u \rightarrow u, \psi \rightarrow \psi + \xi, \chi \rightarrow \chi + \xi, 0 \leq \xi < 2\pi$, поэтому $\phi = \psi - \chi, p_\phi = u$ – канонически-сопряженные координаты на $\tilde{O}_{\beta_0}$. Фактически пространство $\tilde{O}_{\beta_0}$ диффеоморфно двумерной сфере. Координатная система p_ϕ, ϕ имеет особенность в точках $p_\phi = \pm \min\{\mu, \nu\}$. Она отличается от координатной системы на приведенном пространстве, использованной в [6]. Приведенная функция Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_s = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{4p_\phi^2}{a} + A_s \left(\mu^2 + \nu^2 - 2p_\phi^2 + 2\sqrt{\mu^2 - p_\phi^2} \sqrt{\nu^2 - p_\phi^2} \cos \phi \right) + \\ + C_s \left(\mu^2 + \nu^2 - 2p_\phi^2 - 2\sqrt{\mu^2 - p_\phi^2} \sqrt{\nu^2 - p_\phi^2} \cos \phi \right) + \\ + B_s \sqrt{\mu^2 - p_\phi^2} \sqrt{\nu^2 - p_\phi^2} \sin \phi + U(r). \end{aligned}$$

В случае $\mu = 0, \nu > 0$ (или $\nu = 0, \mu > 0$) мы получаем для O'_{β_0} условия $u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = 0$, поэтому $O'_{\beta_0} = \mathbb{S}^1$ и $\tilde{O}_{\beta_0} = \text{pt}$. Приведенное фазовое пространство есть $T^*\mathbb{R}_+$ с функцией Гамильтона

$$\tilde{H}_s = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} \left(p_r^2 + \frac{\nu^2}{r^2} \right).$$

В случае $\mu = \nu = 0$ мы получаем

$$\tilde{O}_{\beta_0} = O'_{\beta_0} = \text{pt}, \quad M = T^*\mathbb{R}_+, \quad \tilde{H}_s = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2.$$

5.2. Задача двух частиц на пространстве $\mathbb{H}^3$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, 3)$ проста, поэтому мы не можем представить орбиты присоединенного действия группы $\mathrm{SO}(1, 3)$ как прямые произведения, подобно тому, как это сделано в п. 5.1. Однако динамические системы на сфере $\mathbb{S}^3$ и пространстве $\mathbb{H}^3$ связаны формальной заменой (см. п. 3.2 и [6]). Это мотивирует следующую конструкцию.

Пусть $L_1 = X_{23}$, $L_2 = X_{31}$, $L_3 = X_{12}$, Y_1, Y_2, Y_3 – базис в алгебре $\mathfrak{so}(1, 3)$, соответствующий полям Киллинга (4), а $L^1, L^2, L^3, Y^1, Y^2, Y^3$ – дуальный к нему базис. Пусть $\mathbf{p} = p_1 L^1 + p_2 L^2 + p_3 L^3 + p_4 Y^1 + p_5 Y^2 + p_6 Y^3$ – произвольный элемент из $\mathfrak{so}^*(1, 3)$. Можно проверить прямым вычислением, что формулы

$$I_1 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 - p_5^2 - p_6^2, \quad I_2 = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6$$

дают инварианты присоединенного действия группы $\mathrm{SO}(1, 3)$. Так же, как в п. 5.1, мы получаем выражение функции Гамильтона через координаты на $\mathfrak{so}^*(1, 3)$:

$$H_h = \frac{(1 - r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{1}{a} p_4^2 + A_h(p_2^2 + p_3^2) - C_h(p_5^2 + p_6^2) + \frac{1}{2} B_h(p_3 p_5 - p_2 p_6) + U(r). \quad (20)$$

Пусть O_{β_0} – орбита коприсоединенного действия группы $\mathrm{SO}(1, 3)$, заданная уравнениями $I_1 = \mu$, $I_2 = \nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Стационарная подгруппа точки $\mathbf{x}_0 \in F_r$ порождается элементом L_1 . Действие этой подгруппы состоит в одновременном повороте в плоскостях (p_2, p_3) и (p_5, p_6) . Подмногообразие O'_{β_0} задается уравнениями $I_1 = \mu$, $I_2 = \nu$, $p_1 = 0$. Следующие формулы задают координаты p_4, ψ, χ на нем:

$$\begin{aligned} p_2 &= u \operatorname{ch} \psi \cos \chi + v \operatorname{sh} \psi \sin \chi, & p_3 &= v \operatorname{sh} \psi \cos \chi - u \operatorname{ch} \psi \sin \chi, \\ p_5 &= v \operatorname{ch} \psi \cos \chi - u \operatorname{sh} \psi \sin \chi, & p_6 &= -u \operatorname{sh} \psi \cos \chi - v \operatorname{ch} \psi \sin \chi, \end{aligned} \quad (21)$$

где $p_4, \psi \in \mathbb{R}$, $\chi \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$, а u и v находятся из уравнений

$$u^2 - v^2 = \mu + p_4^2, \quad uv = \nu. \quad (22)$$

Два решения уравнений (22) различаются знаком, поэтому нам достаточно выбрать одно из них. Действие стационарной группы $\mathrm{SO}(2)$ соответствует вращению $\chi \rightarrow \chi + \xi$. Приведенное фазовое пространство $\tilde{O}_{\beta_0}$ получается из O'_{β_0} “забыванием” координаты χ . Пространство $\tilde{O}_{\beta_0}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^2$.

Для нахождения канонически-сопряженных координат на пространстве $\tilde{O}_{\beta_0}$ мы используем вырожденные скобки Пуассона на $\mathfrak{so}^*(1, 3)$, которые соответствуют форме Кириллова. Эти скобки строятся для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом [20].

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис алгебры $\mathfrak{g}$, $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, а $\{x_i\}_{i=1}^n$ – координаты на $\mathfrak{g}^*$, соответствующие дуальному базису $\{e^i\}_{i=1}^n$. Пусть f_1, f_2 – произвольные гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$. Тогда их скобки Пуассона имеют вид

$$\{f_1, f_2\} = - \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j}.$$

Ограничение этих скобок на орбиту присоединенного действия невырожденно. Возвращаясь к нашему случаю и используя формулы

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(p_2 - p_6)^2 + (p_5 + p_3)^2}{(p_2 + p_6)^2 + (p_5 - p_3)^2} \right), \\ \chi &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{p_5 - p_3}{p_2 + p_6} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{p_5 + p_3}{p_2 - p_6} \right) \right), \\ [L_i, L_j] &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [Y_i, Y_j] = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, Y_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} Y_k,\end{aligned}$$

прямыми вычислениями мы получаем следующие соотношения:

$$\{p_4, \psi\} = 1, \quad \{p_4, \chi\} = 0, \quad \{\psi, \chi\} = 0.$$

Тогда симплектическая структура на $\tilde{O}_{\beta_0}$ задается формулой $dp_4 \wedge d\psi$. Из (21) мы получаем

$$\begin{aligned}p_2^2 + p_3^2 &= \frac{1}{2} \left(\mu + p_4^2 + \sqrt{(\mu + p_4^2)^2 + 4\nu^2 \operatorname{ch} 2\psi} \right), \\ p_5^2 + p_6^2 &= \frac{1}{2} \left(-\mu - p_4^2 + \sqrt{(\mu + p_4^2)^2 + 4\nu^2 \operatorname{ch} 2\psi} \right), \\ p_3 p_5 - p_2 p_6 &= \frac{1}{2} \sqrt{(\mu + p_4^2)^2 + 4\nu^2 \operatorname{sh} 2\psi}.\end{aligned}$$

Вводя новые канонически-сопряженные координаты $p_\phi = p_4/2$, $\phi = 2\psi$, мы получаем из (20) окончательную формулу приведенной функции Гамильтона

$$\begin{aligned}\tilde{H}_h &= \frac{(1-r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{4p_\phi^2}{a} + A_h \left(\frac{\mu}{2} + 2p_\phi^2 + 2\sqrt{\left(\frac{\mu}{4} + p_\phi^2\right)^2 + \frac{\nu^2}{4} \operatorname{ch} \phi} \right) + \\ &+ C_h \left(\frac{\mu}{2} + 2p_\phi^2 - 2\sqrt{\left(\frac{\mu}{4} + p_\phi^2\right)^2 + \frac{\nu^2}{4} \operatorname{ch} \phi} \right) + \\ &+ B_h \sqrt{\left(\frac{\mu}{4} + p_\phi^2\right)^2 + \frac{\nu^2}{4}} \operatorname{sh} \phi + U(r).\end{aligned}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы построили представление квантово-механического гамильтониана системы двух частиц на пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$, явно учитывающее имеющиеся симметрии. На основе полученного выражения в следующей работе будет установлена квазиточнорешаемость соответствующей спектральной задачи для ряда потенциалов. Явный вид приведенной функции Гамильтона в канонических координатах, полученный в [6] аналитическими вычислениями на ЭВМ, был использован там для анализа отсутствия столкновений частиц. В настоящей работе мы прояснили, в частности, происхождение явного вида приведенной функции Гамильтона и ее связь с квантово-механическим гамильтонианом.

Список литературы

- [1] Дж. Вольф. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
- [2] J. Moser. Commun. Pure Appl. Math. 1970. V. 23. P. 609.
- [3] Ю. С. Осипов. УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 101.
- [4] Y. S. Osipov. Celest. Mech. 1977. V. 16. P. 191.
- [5] E. A. Belbruno. Celest. Mech. 1977. V. 15. P. 467.
- [6] A. V. Shchepetilov. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 6279; 1999. V. 32. P. 1531.
- [7] M. Ikeda, N. Katayama. Tensor. 1982. V. 38. P. 37.
- [8] N. Katayama. Nuovo Cimento B. 1990. V. 105. P. 113; 1992. V. 107. P. 763; 1993. V. 108. P. 657.
- [9] Я. И. Грановский, А. С. Жеданов, И. М. Луценко. ТМФ. 1992. Т. 91. С. 207; С. 396.
- [10] V. S. Otchik. On the two Coulomb centres problem in a spherical geometry. In: Proc. Intern. Workshop on Symmetry Methods in Physics. V. 2. Eds. A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan, S.I. Vinitsky. Dubna: JINR, 1994. P. 384.
- [11] V. A. Chernouvan, I. S. Mamaev. Regular and chaotic dynamics. 1999. V. 4. № 2. P. 112.
- [12] А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.
- [13] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [14] А. В. Шепетилов. ТМФ. 1999. Т. 118. С. 248.
- [15] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [16] И. М. Олейник. Мат. заметки. 1994. Т. 55. С. 218.
- [17] А. В. Шепетилов. ТМФ. 1996. Т. 109. С. 395.
- [18] С. Хелгасон. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1984.
- [19] А. А. Кириллов. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.
- [20] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.

Поступила в редакцию 12.XI.1999 г.,
после доработки 3.IV.2000 г.