Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ф. Окстоби, И. В. Барашенков, Асимптотическое разложение для раскачивающегося кинка, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 527–535

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:27:27

© 2009 г.

О. Ф. Окстоби*, И. В. Барашенков†

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ РАСКАЧИВАЮЩЕГОСЯ КИНКА

Метод многих масштабов применяется для анализа раскачивающегося кинка в модели ϕ^4 . Показано, что амплитуда колебаний убывает весьма медленно, пропорционально $t^{-1/2}$, в силу чего раскачивающийся кинк оказывается исключительно долгоживущим объектом.

Ключевые слова: ϕ^4 -уравнение, раскачивающийся кинк, асимптотическое разложение, излучение на второй гармонике.

1. ВВЕДЕНИЕ

С начала 1960-х годов одномерная ϕ^4 -теория находится среди наиболее широко используемых моделей статистической механики и физики конденсированного состояния [1]. В то же время эта модель служила и продолжает служить испытательным полигоном для различных идей в топологической квантовой теории поля [2] и космологии [3]. Уравнение движения для данной модели имеет вид

$$\frac{1}{2} \phi_{tt} - \frac{1}{2} \phi_{xx} - \phi + \phi^3 = 0, \quad (1)$$

и фундаментальную роль в приложениях играет решение типа кинка

$$\phi(x, t) = \text{th } x. \quad (2)$$

С математической точки зрения ϕ^4 -кинк имеет немало общего со своим аналогом в уравнении синус-Гордон; эти два частицеподобных решения являются простейшими примерами топологических солитонов в одномерии. Однако имеется и важное различие: уравнение синус-Гордон является интегрируемым, тогда как ϕ^4 -теория – нет. В результате в ϕ^4 -случае анализ кинк-антикинкового взаимодействия представляет собой нетривиальную задачу [4]–[6]. Другое отличие от кинка уравнения синус-Гордон (не лишнее, впрочем, определенной связи с первым) состоит

*CSIR Computational Aerodynamics, Building 12, P.O. Box 395, Pretoria 0001, South Africa. E-mail: Oliver.Oxtoby@gmail.com

†Department of Maths and Applied Maths, University of Cape Town, Rondebosch 7701, South Africa. E-mail: igor@odette.mth.uct.ac.za, Igor.Barashenkov@uct.ac.za

в том, что ϕ^4 -кинк имеет внутреннюю моду – дополнительную степень свободы, соответствующую колебаниям эффективной ширины кинка. Хотя эти колебания сопровождаются излучением (проявление неинтегрируемости ϕ^4 -модели), излучение представляется весьма слабым, и колебания наблюдаются в течение длительного времени. При малых амплитудах колебаний такое периодическое расхождение и сжатие кинка (называемое в литературе *раскачиванием*) можно охарактеризовать просто как линейное возбуждение стационарного солитона (2); при больших амплитудах, однако, требуется самосогласованное нелинейное описание.

Раскачивающийся кинк был впервые обнаружен в ранних численных экспериментах Гетманова [6], который интерпретировал его как связанное состояние трех обыкновенных кинков (результаты более свежих численных экспериментов представлены в статье [7]). В работе [8] это нелинейное возбуждение было воспроизведено в рамках вариационного подхода с использованием ширины обыкновенного кинка в качестве динамической переменной. Далее, в работе [9] раскачивающийся кинк был построен в виде регулярного пертурбативного разложения по степеням амплитуды колебаний; в этой работе были вычислены два первых порядка теории возмущений и было отмечено возможное появление секулярных членов в третьем (ϵ^3) порядке, что означало бы неравномерность степенного ряда. Мобильность раскачивающегося кинка исследовалась в работе [10] с использованием варианта техники Линштедта–Пуанкаре, в рамках которой скорость солитона подбирается так, чтобы исключить секулярные члены в низших порядках пертурбативного разложения. Хотя этот подход дает ценную информацию о низших порядках, он не пригоден для работы с секулярными членами в порядке ϵ^3 , а потому приводит к неравномерному разложению. Наконец, возмущенный ϕ^4 -кинк изучался методом Крылова–Боголюбова в работах [11], где были получены полезные формулы, однако самосогласованная система уравнений для параметров солитона в этих работах выведена не была, и эволюция раскачивающегося кинка при больших временах осталась неисследованной.

Цель настоящей работы состоит в построении раскачивающегося кинка в виде сингулярного асимптотического разложения, остающегося равномерным на больших временах и расстояниях. Наш подход, в котором используется последовательность пространственных и временных масштабов, приводит к уравнениям для амплитуды раскачивающейся моды, которые затем используются для анализа эволюции этой амплитуды на больших временах.

2. МНОГОМАСШТАБНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Заменой переменных $(x, t) \rightarrow (\xi, \tau)$, где $\xi = x - \int_0^t v(t') dt'$ и $\tau = t$, уравнение (1) преобразуется к уравнению в сопутствующей системе координат:

$$\frac{1}{2} \phi_{\tau\tau} - v \phi_{\xi\tau} - \frac{v_{\tau}}{2} \phi_{\xi} - \frac{1-v^2}{2} \phi_{\xi\xi} - \phi + \phi^3 = 0. \quad (3)$$

Как и авторы работы [10], мы фиксируем скорость кинка $v(t)$ условием, что кинк всегда центрирован в точке $\xi = 0$, т.е. $x = \int_0^t v(t') dt'$.

На первый взгляд, включение в уравнение функции $v(t)$ не является необходимым: построив покоящийся раскачивающийся кинк, мы можем привести его в движение простым преобразованием Лоренца. С помощью явного введения v в уравнение (3) мы, однако, намереемся проверить, может ли раскачивающийся кинк дрейфовать с *непостоянной* скоростью. Солитон, движущийся с переменной скоростью $v(t)$, очевидно, невозможно перевести в покоящуюся систему отсчета с помощью преобразования Лоренца.

Теория возмущений основана на разложении поля ϕ вблизи стационарного кинка $\phi_0 \equiv \text{th } \xi$:

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad (4)$$

где ϵ – (формальный) малый параметр. Подстановка этого разложения в (3) и приравнивание коэффициентов при каждой степени ϵ к нулю и составляет подход работы [9], который приводит к появлению секулярных членов в разложении. Чтобы избежать секулярных членов, введем растянутые пространственные и временные координаты

$$X_n \equiv \epsilon^n \xi, \quad T_n \equiv \epsilon^n \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Мы будем использовать стандартные сокращенные обозначения для производных $\partial_n \equiv \partial/\partial X_n$, $D_n \equiv \partial/\partial T_n$. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ различные масштабы разделяются, и их можно рассматривать как независимые переменные: $\phi_n = \phi_n(X_0, X_1, \dots; T_0, T_1, \dots)$. Будем также предполагать, что v мал и медленно изменяется, т.е. $v = \epsilon V$, где $V = V(T_1, T_2, \dots)$ имеет порядок 1. Разлагая $\partial/\partial \xi$ и $\partial/\partial \tau$ по правилу дифференцирования сложной функции и подставляя результат вместе с рядом (4) в уравнение (3), мы приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ .

2.1. Линейные поправки. В порядке $O(\epsilon^1)$ получаем линеаризацию уравнения (1) вблизи стационарного кинка $\phi_0 = \text{th } X_0$:

$$\frac{1}{2} D_0^2 \phi_1 + \mathcal{L} \phi_1 = 0, \quad (6)$$

где мы ввели оператор Шредингера

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_0^2 - 1 + 3\phi_0^2 = -\frac{1}{2} \partial_0^2 + 2 - 3 \text{sech}^2 X_0. \quad (7)$$

Общее решение уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами (6) можно записать в виде

$$\phi_1 = C_0 y_0(X_0) + A e^{i\omega_0 T_0} y_1(X_0) + \text{к.с.} + \phi_R(X_0, T_0), \quad (8)$$

где

$$\phi_R = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{R}(p) e^{i\omega(p)T_0} + \mathcal{R}^*(-p) e^{-i\omega(p)T_0}] y_p(X_0) dp. \quad (9)$$

Здесь y_0 и y_1 – собственные функции оператора $\mathcal{L}$ с собственными значениями 0 и $3/2$ соответственно:

$$y_0(X_0) = \text{sech}^2 X_0, \quad (10)$$

$$y_1(X_0) = \text{sech } X_0 \text{ th } X_0. \quad (11)$$

Функции $y_p(X_0)$ в (9) являются решениями непрерывного спектра оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}y_p(X_0) = \left(2 + \frac{p^2}{2}\right)y_p(X_0). \quad (12)$$

Эти решения были построены в работе [9]:

$$y_p = e^{ipX_0} \left[1 + \frac{3(1-ip)}{1+p^2} \operatorname{th} X_0 (1 + \operatorname{th} X_0) - \frac{3(2-ip)}{4+p^2} (1 + \operatorname{th} X_0)^2 \right]. \quad (13)$$

Частота внутренней моды равна $\omega_0 = \sqrt{3}$, а фононные частоты $\omega(p)$ даются выражением $\omega(p) = \sqrt{4+p^2} > 0$. Наконец, коэффициенты $\mathcal{R}(p)$ и A комплексны, C_0 вещественно, и к.с. в уравнении (8) и далее означает комплексное сопряжение непосредственно предшествующего члена.

Мы полагаем коэффициент трансляционной моды равным нулю, так как предполагается, что кинк центрирован в точке $X_0 = 0$. Поскольку нас интересует раскачивающийся кинк, не затухающий в течение длительного периода времени, мы также полагаем равной нулю амплитуду излучения: $\mathcal{R}(p) = 0$. В результате в первом порядке возмущение включает только моду раскачивания:

$$\phi_1 = A(X_1, X_2, \dots; T_1, T_2, \dots) \operatorname{sech} X_0 \operatorname{th} X_0 e^{i\omega_0 T_0} + \text{к.с.} \quad (14)$$

2.2. Квадратичные поправки. Во втором порядке теории возмущений получаем неоднородное уравнение

$$\frac{1}{2} D_0^2 \phi_2 + \mathcal{L} \phi_2 = F_2(X_0, X_1, \dots; T_0, T_1, \dots), \quad (15)$$

где вынуждающий член дается формулой

$$F_2 = (\partial_0 \partial_1 - D_0 D_1) \phi_1 - 3\phi_0 \phi_1^2 + V D_0 \partial_0 \phi_1 + \frac{1}{2} D_1 V \partial_0 \phi_0 - \frac{1}{2} V^2 \partial_0^2 \phi_0. \quad (16a)$$

После подстановки ϕ_0 и ϕ_1 это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} F_2 = & -6|A|^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th}^3 X_0 + \frac{1}{2} D_1 V \operatorname{sech}^2 X_0 - V^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th} X_0 + \\ & + [(\partial_1 A + i\omega_0 V A)(2 \operatorname{sech}^3 X_0 - \operatorname{sech} X_0) - i\omega_0 D_1 A \operatorname{sech} X_0 \operatorname{th} X_0] e^{i\omega_0 T_0} + \\ & + \text{к.с.} - 3A^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th}^3 X_0 e^{2i\omega_0 T_0} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (16b)$$

В данном выражении слагаемое, не зависящее от T_0 , и слагаемое, пропорциональное $e^{i\omega_0 T_0}$, находятся в резонансе с двумя дискретными собственными модами оператора в левой части (15), тогда как член, пропорциональный $e^{2i\omega_0 T_0}$, находится в резонансе с непрерывным спектром этого оператора. Последняя часть вынуждающего члена локализована вблизи начала координат и представляет собой источник распространяющегося отсюда излучения.

После завершения переходных процессов ϵ^2 -поправки будут содержать только гармоники, присутствующие в вынуждающем члене, т.е. мы будем иметь

$$\phi_2 = \varphi_2^{(0)} + \varphi_2^{(1)} e^{i\omega_0 T_0} + \text{к.с.} + \varphi_2^{(2)} e^{2i\omega_0 T_0} + \text{к.с.}, \quad (17)$$

где $\varphi_2^{(0)}$, $\varphi_2^{(1)}$ и $\varphi_2^{(2)}$ – функции от X_0 , удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\mathcal{L}\varphi_2^{(0)} = -6|A|^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th}^3 X_0 + \frac{1}{2} D_1 V \operatorname{sech}^2 X_0 - V^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th} X_0, \quad (18)$$

$$\left(\mathcal{L} - \frac{3}{2}\right)\varphi_2^{(1)} = (\partial_1 A + i\omega_0 V A)(2 \operatorname{sech}^3 X_0 - \operatorname{sech} X_0) - i\omega_0 D_1 A \operatorname{sech} X_0 \operatorname{th} X_0 \quad (19)$$

и

$$(\mathcal{L} - 6)\varphi_2^{(2)} = -3A^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th}^3 X_0. \quad (20)$$

Уравнения (18) и (19) допускают ограниченные решения тогда и только тогда, когда их правые части ортогональны соответственно собственным функциям (10) и (11) оператора $\mathcal{L}$. Для ортогональности необходимо положить $D_1 V = 0$ и $D_1 A = 0$. После этого вариация постоянных дает

$$\varphi_2^{(0)} = 2|A|^2 \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th} X_0 + \left(\frac{V^2}{2} - 3|A|^2\right) X_0 \operatorname{sech}^2 X_0 \quad (21)$$

и

$$\varphi_2^{(1)} = -(\partial_1 A + i\omega_0 V A) X_0 \operatorname{sech} X_0 \operatorname{th} X_0. \quad (22)$$

Хотя функции $\varphi_2^{(1)}$ убывают до нуля при $|X_0| \rightarrow \infty$, при каждом фиксированном ϵ и достаточно большом $|X_0|$ произведение $\epsilon\varphi_2^{(1)}$ оказывается большим, чем поправка первого порядка $y_1(X_0)$. Соответственно, член $\epsilon^2\phi_2$ в разложении (4) становится больше, чем предыдущий член $\epsilon^1\phi_1$, что приводит к неравномерности разложения. Чтобы получить равномерное разложение, положим

$$\partial_1 A + i\omega_0 V A = 0, \quad (23)$$

откуда $A = A_0 e^{-i\omega_0 V X_1}$, где $A_0 = A_0(X_2, X_3, \dots; T_2, T_3, \dots)$. В уравнении (21) отметим также слагаемое, пропорциональное $X_0 \operatorname{sech}^2 X_0$. Это слагаемое не превышает предыдущего члена в разложении нулевой гармоники $\phi_0 = \operatorname{th} X_0$, однако при $X_0 \rightarrow \infty$ оно становится больше, чем $\phi_0 - 1$, а при $X_0 \rightarrow -\infty$ – больше чем $\phi_0 - (-1)$. Если попытаться построить асимптотическое разложение функции $\phi - 1$ при $X_0 \rightarrow +\infty$ или функции $\phi + 1$ при $X_0 \rightarrow -\infty$, то рассматриваемые члены приведут к неравномерности этих разложений. Поскольку функция $X_0 \operatorname{sech}^2 X_0$ является не чем иным, как производной $\operatorname{th}(kX_0)$ по k , это слагаемое представляет собой вариацию ширины кинка. Таким образом, потенциальной неравномерности разложения можно избежать, включая его в переменную ширину (см. уравнение (36) ниже).

Обратимся теперь к оставшемуся неоднородному уравнению (20). Вариация постоянных дает

$$\varphi_2^{(2)} = A^2 f(X_0), \quad (24)$$

где

$$f(X_0) = \frac{1}{8} [6 \operatorname{th} X_0 \operatorname{sech}^2 X_0 + (3 - \operatorname{th}^2 X_0 + ik_0 \operatorname{th} X_0)(J_2^* - J_2^\infty)e^{ik_0 X_0} + (3 - \operatorname{th}^2 X_0 - ik_0 \operatorname{th} X_0)J_2 e^{-ik_0 X_0}]. \quad (25)$$

В данном выражении волновое число $k_0 = \sqrt{8}$; функция $J_2 = J_2(X_0; k_0)$ определяется как интеграл,

$$J_2(X_0; k) = \int_{-\infty}^{X_0} e^{ik\xi} \operatorname{sech}^2 \xi d\xi, \quad (26)$$

а постоянная J_2^∞ есть асимптотическое значение функции $J_2(X_0; k_0)$ при $X_0 \rightarrow \infty$.

Решение (24) описывает излучение, распространяющееся вправо при положительном X_0 и влево при отрицательном X_0 . Функция (25) ограничена, но не убывает до нуля при $|X_0| \rightarrow \infty$.

2.3. Амплитудное уравнение. Собирая члены порядка ϵ^3 , получаем уравнение

$$\frac{1}{2} D_0^2 \phi_3 + \mathcal{L} \phi_3 = F_3, \quad (27a)$$

где

$$\begin{aligned} F_3 = & (\partial_0 \partial_1 - D_0 D_1) \phi_2 + (\partial_0 \partial_2 - D_0 D_2) \phi_1 + \frac{1}{2} (\partial_1^2 - D_1^2) \phi_1 - \phi_1^3 - 6\phi_0 \phi_1 \phi_2 + \\ & + V D_0 \partial_0 \phi_2 + V D_0 \partial_1 \phi_1 + V D_1 \partial_0 \phi_1 + \frac{1}{2} D_2 V \partial_0 \phi_0 - \frac{1}{2} V^2 \partial_0^2 \phi_1. \end{aligned} \quad (27b)$$

Вычислив F_3 с использованием известных функций ϕ_0 , ϕ_1 и ϕ_2 , мы можем снова разложить решение на простые гармоники, как это делалось в порядке $O(\epsilon^2)$. Условие разрешимости для нулевой гармоники в уравнении (27b) дает $D_2 V = 0$, и это означает, что V остается постоянной вплоть до времен t порядка ϵ^{-3} . Условие разрешимости для первой гармоники дает

$$i \frac{2\omega_0}{3} D_2 A + \zeta |A|^2 A - V^2 A = 0, \quad (28)$$

где

$$\zeta = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th}^3 X_0 \left[\frac{5}{2} \operatorname{sech}^2 X_0 \operatorname{th} X_0 - 3X_0 \operatorname{sech}^2 X_0 + f(X_0) \right] dX_0. \quad (29)$$

Мнимая часть ζ вычисляется аналитически:

$$\operatorname{Im} \zeta = \frac{3\pi^2 k_0}{\operatorname{sh}^2(\pi k_0/2)} = 0.04636, \quad (30)$$

тогда как вещественную часть можно получить только численно:

$$\operatorname{Re} \zeta = -0.8509. \quad (31)$$

Обозначая через $a(t) \equiv \epsilon A_0$ естественную (немасштабированную) амплитуду моды, соответствующей раскачиванию кинка, и вспоминая, что $v = \epsilon V$, выразим амплитудное уравнение (28) в терминах исходных переменных:

$$ia_t = -\frac{\omega_0 \zeta}{2} |a|^2 a + \frac{\omega_0}{2} v^2 a + O(|a|^4). \quad (32)$$

Мы будем называть это уравнение *основным* амплитудным уравнением. Основное уравнение содержит условия разрешимости во всех порядках (эти условия возникают просто в результате разложения производной d/dt по степеням ϵ), но в отличие от любого частного амплитудного уравнения оно применимо *на всех временах*. Основное уравнение является окончательным продуктом асимптотического анализа; все заключения о поведении амплитуды раскачиваний будут делаться на основе именно этого уравнения.

Модуль a подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dt} |a|^2 = -\omega_0 \operatorname{Im} \zeta |a|^4 + O(|a|^5). \quad (33)$$

Поскольку $\operatorname{Im} \zeta > 0$, амплитуда раскачиваний монотонно убывает по времени: постоянное излучение приводит к затуханию раскачивающегося кинка. Закон убывания очевиден: из (33) имеем

$$|a(t)|^2 = \frac{|a(0)|^2}{1 + \omega_0 \operatorname{Im} \zeta \cdot |a(0)|^2 t} = \frac{|a(0)|^2}{1 + 0.0803 \cdot |a(0)|^2 t}. \quad (34)$$

При малых $a(0)$ убывание становится заметным только по прошествии продолжительного времени $t \sim |a(0)|^{-2}$. Затухание является медленным; на временах $t \gg 12.5 \cdot |a(0)|^{-2}$ уравнение (34) дает $|a| \sim t^{-1/2}$.

Указанный закон убывания проверялся прямым численным моделированием дифференциального уравнения в частных производных (1). В качестве начальных условий брались $\phi(x, 0) = \operatorname{th} x + 2a_0 \operatorname{sech} x \operatorname{th} x$ с некоторым вещественным a_0 и $\phi_t(x, 0) = 0$. После недолгого переходного периода решение ложилось на кривую (34) с $|a(0)|$, близким к a_0 (см. рисунок).

Уравнение (32) дает основные поправки к частоте раскачиваний:

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \zeta |a|^2 + O(|a|^4) \right] \quad (35)$$

с коэффициентом $\operatorname{Re} \zeta < 0$, задаваемым формулой (31). Здесь слагаемое с $|a|^2$ представляет собой нелинейный сдвиг от линейной частоты $\omega_0 = \sqrt{3}$. Член с v^2 обусловлен поперечным эффектом Доплера. Этот член можно было бы получить, просто вычислив частоту качаний в системе покоя и затем умножив результат на фактор релятивистского сокращения времени $\sqrt{1 - v^2}$ (который сводится к $1 - v^2/2$ при малых v).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Один из двух результатов настоящей работы состоит в получении равномерного асимптотического разложения для раскачивающегося кинка. В терминах исходных переменных это разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \operatorname{th} \left(\frac{1 - 3|a|^2}{\sqrt{1 - v^2}} \xi \right) + a \operatorname{sech} \xi \operatorname{th} \xi e^{i\omega_0(t - v\xi)} + \text{к.с.} + \\ & + 2|a|^2 \operatorname{sech}^2 \xi \operatorname{th} \xi + a^2 f(\xi) e^{2i\omega_0(t - v\xi)} + \text{к.с.} + O(|a|^3). \end{aligned} \quad (36)$$

Затухание колебаний свободно раскачивающегося кинка. Крестиками обозначены значения $|a(t)|$, полученные прямым численным решением уравнения (1) с начальными условиями вида $\phi = \text{th } x + 2a_0 \text{sech } x \text{th } x$, $\phi_t = 0$ при $a_0 = 0.05$. Сплошная кривая – значения $|a(t)|$, заданные равенством (34) при $|a(0)| = 0.0492$. На врезке показаны первые 250 периодов колебаний; в течение этого времени амплитуда уменьшается менее чем на 10 %.

Здесь $\xi = x - vt$, а $f(\xi)$ дается уравнением (25). Первое слагаемое описывает “фоновый” стационарный кинк с шириной, модифицированной в результате раскачивания (заметим, что мы включили в ширину кинка два слагаемых, пропорциональных $X_0 \text{sech}^2 X_0$, из суммы (21)). Второй член является собственно модой, связанной с раскачиванием; третий — это еще одна поправка к форме стационарного кинка, а последнее слагаемое представляет собой излучение на второй гармонике частоты качаний.

Наш второй результат заключается в выводе амплитудного уравнения (32); оно позволяет заключить, что мода, связанная с раскачиванием кинка, является чрезвычайно долгоживущей — это следует из (32). Ввиду его аномально долгого времени жизни раскачивающийся кинк можно рассматривать как одно из фундаментальных нелинейных возбуждений в ϕ^4 -теории — наряду с обыкновенными (неосциллирующими) кинками и бризерами.

Благодарности. Работа О. Окстоби частично финансировалась Национальным научным фондом ЮАР и Кейптаунским университетом. Работа И. В. Барашенкова финансировалась Национальным научным фондом ЮАР (гранты № 2053723 и 68536).

Список литературы

- [1] A. R. Bishop, T. Schneider (eds.), *Solitons and Condensed Matter Physics*, Proc. Sympos. on Nonlinear (Soliton) Structure and Dynamics in Condensed Matter (Oxford, June 27–29, 1978), Springer Ser. Solid-State Sci., 8, Springer, Berlin, 1978; К. Лонгрен, Э. Скотт (ред.), *Солитоны в действии*, Мир, М., 1981.

- [2] Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, М., 1985; N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [3] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [4] S. Aubry, *J. Chem. Phys.*, **64**:8 (1976), 3392–3402.
- [5] А. Е. Кудрявцев, *Письма в ЖЭТФ*, **22**:3 (1975), 178–181; M. J. Ablowitz, M. D. Kruskal, J. F. Ladik, *SIAM J. Appl. Math.*, **36**:3 (1979), 428–437; T. Sugiyama, *Progr. Theoret. Phys.*, **61**:5 (1979), 1550–1563; M. Moshir, *Nucl. Phys. B*, **185**:2 (1981), 318–332; C. A. Wingate, *SIAM J. Appl. Math.*, **43**:1 (1983), 120–140; R. Klein, W. Hasenfratz, N. Theodorakopoulos, W. Wunderlich, *Ferroelectrics*, **26**:1 (1980), 721–724; D. K. Campbell, J. F. Schonfeld, C. A. Wingate, *Physica D*, **9**:1–2 (1983), 1–32; T. I. Belova, A. E. Kudryavtsev, *Physica D*, **32**:1 (1988), 18–26; P. Anninos, S. Oliveira, R. A. Matzner, *Phys. Rev. D*, **44**:1 (1991), 1147–1160; Т. И. Белова, *ЯФ*, **58** (1995), 130–131; Т. И. Белова, А. Е. Кудрявцев, *УФН*, **167**:4 (1997), 377–406.
- [6] Б. С. Гетманов, *Письма в ЖЭТФ*, **24** (1977), 323–327.
- [7] Т. И. Белова, *ЖЭТФ*, **109** (1996), 1090–1099.
- [8] M. J. Rice, E. J. Mele, *Solid State Comm.*, **35**:6 (1980), 487–491; M. J. Rice, *Phys Rev. B*, **28**:6 (1983), 3587–3589.
- [9] H. Segur, *J. Math. Phys.*, **24**:6 (1983), 1439–1443.
- [10] A. L. Sukstanskii, K. I. Primak, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:17 (1995), 3029–3033.
- [11] О. М. Kiselev, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 29–46; О. М. Киселев, *Сиб. матем. журн.*, **41**:2 (2000), 345–358.