Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Земляная, Н. В. Алексеева, Осциллирующие солитоны в нелинейном уравнении Шредингера с диссипацией и накачкой, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 3, 536–544

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:16:55

© 2009 г.

Е. В. Земляная*, Н. В. Алексеева†

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ СОЛИТОНЫ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С ДИССИПАЦИЕЙ И НАКАЧКОЙ

Периодические по времени солитоны в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и с диссипацией получены как решения граничной задачи в двумерной области. Классифицируется устойчивость и бифуркации решений с одинарным и двойным периодом.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, параметрическая накачка, устойчивость, множители Флоке, бифуркация удвоения периода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Диссипативные потери в солитоноподобных системах можно компенсировать, применяя резонансную накачку. При малых амплитудах накачки получающийся солитон амплитуды, как правило, стационарен и устойчив. Однако по мере возрастания накачки стационарный солитон теряет устойчивость и возникает осциллирующее бризероподобное решение. До сих пор прямое численное моделирование являлось единственным способом исследования таких периодических по времени решений. Недостаток этого метода, однако, состоит в том, что численное моделирование охватывает только устойчивые режимы. В результате невозможно исследовать реальные механизмы и детали бифуркаций, где происходит переход от устойчивых решений к неустойчивым. Численное моделирование невозможно использовать и для выявления альтернативных аттракторов в случае бистабильности или мультистабильности.

В настоящей работе мы предлагаем новый подход к анализу этих скрытых механизмов. Вместо прямого численного моделирования мы исследуем периодические по времени солитоны как решения граничной задачи, поставленной в двумерной периодической области. Преимущество такого подхода состоит в том, что он позволяет получать все существующие ветви решений, устойчивые и неустойчивые, путем продолжения по параметрам.

*Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Московская обл., 141980, Россия. E-mail: elena@jinr.ru

†Department of Mathematics, University of Cape Town, Rondebosch, Private Bag, 7701, Republic of South Africa. E-mail: Nora.Alexeeva@uct.ac.za

Конкретным уравнением, которое мы будем рассматривать, является нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией и с параметрической накачкой

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - \psi = h\psi^* - i\gamma\psi, \quad (1)$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент диссипации, $h > 0$ – амплитуда параметрической накачки. Уравнение (1) описывает ряд резонансных явлений в нелинейных средах, в частности нелинейный фарадеев резонанс в вертикально осциллирующем водяном кювете [1] и влияние фазово-чувствительных усилителей на солитоны в оптических волокнах [2]. Это же уравнение используется при описании волн намагниченности в ферромагнетике типа легкая плоскость, подверженном воздействию комбинации статического и микроволнового поля [3] и амплитуды синхронизованных колебаний в вертикально вибрирующих маятниковых решетках [4].

Два стационарных солитонных решения уравнения (1) имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(x) &= A_{\pm} e^{-i\theta_{\pm}} \operatorname{sech}(A_{\pm}x), \\ A_{\pm} &= \sqrt{1 \pm \sqrt{h^2 - \gamma^2}}, \quad \theta_+ = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\gamma}{h}, \quad \theta_- = \frac{\pi}{2} - \theta_+. \end{aligned} \quad (2)$$

Солитон ψ_- не представляет большого интереса, поскольку он неустойчив при любых h и γ . Солитон ψ_+ устойчив при h ниже некоторого критического значения h_N , где $h_N = h_N(\gamma)$. Когда амплитуда h возрастает и превышает величину h_N , а γ сохраняется неизменным, этот стационарный солитон претерпевает бифуркацию Хопфа [3], [5]. Последующее преобразование получающегося периодического по времени солитона зависит от значения γ . Согласно результатам численного моделирования [6] в случае $\gamma < 0.27$ с ростом h периодический солитон в результате последовательности удвоений периода переходит в состояние временного хаоса. Если значения h лежат выше области временного хаоса, наблюдается явление “солитонной смерти”, т.е. уравнение не имеет никаких устойчивых пространственно-локализованных решений. Наконец, для еще больших значений h возникает состояние пространственно-временного хаоса [6]. При $\gamma > 0.27$ последовательность удвоений периода не происходит и “солитонная смерть” не наступает. При этом устойчивый солитон с ростом h непосредственно переходит в состояние пространственно-временного хаоса [6].

Цель настоящей работы – проследить за преобразованиями периодических по времени решений уравнения (1) при вариации параметров этого уравнения, исследовать возникающие бифуркации и объяснить некоторую часть карты аттракторов этого уравнения, созданной с использованием прямого численного моделирования в работе [6]. Мы также восполним недостающие детали этой диаграммы, такие как сосуществование аттракторов в случае бистабильности.

Будем искать периодические решения, решая уравнение (1) как граничную задачу на цилиндрической поверхности $(-\infty, \infty) \times (0, T)$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \psi(x, t + T) = \psi(x, t). \quad (3)$$

Рис. 1. Диаграммы энергии стационарного двухсолитонного комплекса и стационарных многосолитонных решений, получаемых из этого комплекса продолжением по h при $\gamma = 0.01$ (а) и $\gamma = 0.4$ (б). Сплошными линиями показаны устойчивые, а штриховыми – неустойчивые решения (в случае “б”) имеем два интервала устойчивости $\psi_{(++)}$ -комплекса).

Период T и функция $\psi(x)$ заранее не известны. Периодические решения вычисляются путем численного продолжения по h при фиксированном γ . Мы используем предикторно-корректорный алгоритм с ньютоновскими итерациями для каждого значения h и с применением конечно-разностной аппроксимации 4-го порядка для уравнения (1). Устойчивость решений, полученных таким образом, классифицируется с помощью множителей Флоке соответствующей линеаризованной системы.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВУХСОЛИТОННЫЕ КОМПЛЕКСЫ

При каждом γ исходной точкой численного продолжения является точка бифуркации Хопфа, где периодическое решение возникает из стационарного. В соответствии с этим мы начнем с рассмотрения стационарных решений уравнения (1). Помимо односолитонного решения (2), уравнение (1) имеет несколько стационарных комплексов солитонов [7]. Существование двухсолитонного комплекса было обнаружено для всех $\gamma \geq 1.5 \cdot 10^{-8}$. Его область существования на плоскости (γ, h) не ограничена сверху, однако при h , больших чем $h_C = \sqrt{1 + \gamma^2}$, комплекс неустойчив по отношению к непрерывному спектру (как неустойчиво и любое другое решение, убывающее к нулю на бесконечностях [3]). Поэтому для всех практических целей значение h_C можно рассматривать как верхнюю границу области его существования. Для $h < h_C$ в результате численного продолжения по h при фиксированном γ , получаем один из двух возможных типов бифуркационных диаграмм на плоскости (h, E) , где энергия E определяется как

$$E = \int (|\psi_x|^2 + |\psi|^2 - |\psi|^4 + h \operatorname{Re} \psi^2) dx.$$

Диаграмма на рис. 1а показывает случай убывания h при малом фиксированном γ , $\gamma < 0.292$. В этом случае имеется только одна точка поворота $h = h_{sn}$, причем

$h_{\text{sn}} = h_{\text{sn}}(\gamma) > \gamma$. Когда h приближается к h_{sn} вдоль верхней ветви, двухсолитонный комплекс $\psi_{(++)}$ преобразуется в симметричное трехгорбое решение. Комплекс, полученный продолжением этого решения на нижнюю ветвь, можно идентифицировать как трехсолитонное связанное состояние $\psi_{(-+-)}$.

Более сложная диаграмма возникает при больших значениях γ , $\gamma > 0.292$ (см. рис. 16). Эта бифуркационная диаграмма была приведена в работе [7] при частном значении $\gamma = 0.565$ (здесь мы воспроизводим ее для удобства). При продолжении по параметру h из точки h_{H} при фиксированном γ ветвь, получающаяся из двухсолитонного решения $\psi_{(++)}$, приобретает две точки поворота. После прохождения первой точки поворота $\psi_{(++)}$ -комплекс преобразуется в $\psi_{(--)}$ -решение. При движении от этой точки поворота вдоль нижней ветви у $\psi_{(--)}$ -комплекса возникает третий горб. Эта ветвь не продолжается до самого h_{H} , а снова поворачивает, переходя в ветвь с меньшей энергией. На этой, самой нижней, ветви трехгорбое решение можно отождествить с $\psi_{(-+-)}$. Нижняя ветвь продолжается в точку $h = \gamma$. Эта точка определяет нижнюю границу области существования стационарных комплексов, которые получаются путем численного продолжения по параметру h двухсолитонного решения $\psi_{(++)}$.

3. ЧИСЛЕННОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Мы выделим три типичных случая в зависимости от значений γ . Начнем с умеренной диссипации, а затем перейдем к случаям малых и больших γ .

3.1. Средняя диссипация. На рис. 2 представлена диаграмма, полученная для случая умеренной диссипации при $\gamma = 0.3$.

Рис. 2. Диаграмма периода периодического решения при $\gamma = 0.3$ (а). Трехмерное изображение решения при $h = 0.55$, $T = 4.356$ (б).

Продолжение периодического решения начинается в самой левой точке рис. 2 ($h = 0.385$), которая соответствует стационарному односолитонному решению ψ_+ . При этом значении h устойчивый стационарный солитон претерпевает бифуркацию Хопфа, и рождается устойчивый периодический солитон (показанный на рис. 2 сплошной линией). В этой точке спектр множителей Флоке включает положительное вещественное число $\mu_4 < 1$, комплексно сопряженную пару чисел $\mu_5, \mu_6 = \mu_5^*$,

$|\mu_{5,6}| < 1$, и три единичных собственных значения $\mu_{1,2,3} = 1$. При возрастании h два из этих единичных собственных значений остаются в спектре, тогда как третье перемещается внутрь единичной окружности. Комплексно сопряженные множители растут по абсолютной величине и пересекают единичную окружность в точке поворота (где $h = 0.8761$). Именно здесь периодическое решение теряет устойчивость.

На неустойчивой ветви (показанной на рис. 2а штриховой линией) $|\mu_{5,6}| > 1$. При продолжении из точки поворота к значению $h = 0.61$ вдоль неустойчивой ветви комплексно сопряженные собственные значения $\mu_{5,6}$ сходятся и сдвигаются на вещественную ось (оставаясь большими 1). Конечная точка соответствует стационарному трехсолитонному комплексу $\psi_{(-+-)}$ в точке его бифуркации Хопфа.

Вблизи самой левой точки на рис. 2а периодическое решение выглядит как солитон с осциллирующими амплитудой и шириной, который излучает малоамплитудные волны (рис. 2б). При продолжении вдоль кривой форма осциллирующего решения эволюционирует в трехгорбую структуру, которую можно интерпретировать как триплет солитонов. Вблизи конечной точки кривой амплитуда колебаний уменьшается, и мы получаем стационарный трехсолитонный комплекс.

3.2. Слабая диссипация. На рис. 3 приведена диаграмма, полученная для случая слабой диссипации при $\gamma = 0.265$. Бифуркационная диаграмма состоит из трех ветвей, две из которых возникают в результате бифуркации удвоения периода решения на третьей ветви. Изменение решения при движении вдоль этой одноперiodной ветви (нижняя ветвь на рис. 3а, обозначенная $T1$) похоже на трансформацию решения вдоль кривой, показанной на рис. 2а. Исходная точка кривой (ее самая левая точка) соответствует стационарному решению ψ_+ , конечная точка соответствует стационарному комплексу $\psi_{(-+-)}$. Единственное отличие от случая $\gamma = 0.3$ возникает, когда вещественный множитель Флоке проходит через точку -1 при $h = 0.44$. Когда h возрастает далее, при $h > 0.44$, это отрицательное собственное значение продолжает расти по абсолютной величине, достигает максимума, а затем начинает убывать. Когда h , возрастая, проходит через $h = 0.75$, отрицательное собственное значение снова проходит через -1 , но на этот раз в направлении уменьшения модуля. При больших h решение устойчиво до самой точки поворота. Описанное поведение отрицательного собственного значения соответствует бифуркациям удвоения периодов при $h = 0.44$ и $h = 0.75$, где ответвляются периодические решения с двойным периодом.

Спектр первого решения с удвоенным периодом, ответвляющегося при $h = 0.44$ (обозначен $T2$ на рис. 3а), включает два единичных множителя $\mu_{1,2} = 1$. При h , близких к 0.44, имеется отрицательный множитель μ_3 , для которого $|\mu_3| < 1$. Когда h становится больше значения 0.44, отрицательное вещественное собственное значение μ_3 сдвигается от точки $\mu_3 = -1$ внутрь единичной окружности, далее меняет направление и снова проходит через точку $\mu_3 = -1$ (при $h = 0.495$). В этой точке возникает новое периодическое решение с периодом, равным удвоенному периоду решения $T2$ (это решение с четырехкратным периодом не показано на рис. 3а).

Кроме собственных значений $\mu_{1,2,3}$ имеется пара комплексно сопряженных собственных значений $\mu_4, \mu_5 = \mu_4^*$. При приближении h к точке поворота $h = 0.52$ ком-

Рис. 3. Диаграмма периода периодического решения при $\gamma = 0.265$ (а) (сплошной линией показана устойчивая, а штриховой – неустойчивая ветвь). Трехмерное изображение решения с двойным периодом, соответствующее левой верхней ветви диаграммы (а) при $h = 0.502$, $T = 22.985$ (б) (быстрые осцилляции сменяются длительной квазистационарной стадией).

плексно сопряженная пара пересекает единичную окружность, причем $|\mu_{4,5}| > 1$ на верхней ветви рис. 3а. Далее вдоль верхней ветви период возрастает, поскольку начинается длительная стадия, в течение которой решение очень близко к стационарному солитону ψ_- . Каждый период теперь состоит из двух фаз: сначала быстрые осцилляции с пространственно-временным профилем, очень близким к профилю решения $T1$, затем наступает длительная квазистационарная стадия (см. рис. 3б).

Второе решение $T2$ ответвляется при $h = 0.75$. Оно устойчиво при $0.731 \leq h \leq 0.75$. Как и в случае первого решения с двойным периодом, период этого решения растет при движении вдоль ветви.

3.3. Сильная диссипация. В этом случае, например при $\gamma = 0.565$, стационарный солитон ψ_+ устойчив при всех h , лежащих между γ и $\sqrt{1 + \gamma^2}$, и не претерпевает никаких бифуркаций Хопфа [3], поэтому от этой стационарной ветви не ответвляются никакие периодические решения. Однако стационарное двухсолитонное решение претерпевает бифуркацию Хопфа при $h = 0.94$ [7], и мы взяли эту точку в качестве начальной для процесса продолжения. Соответствующая бифуркационная диаграмма, на которой показан период получающегося решения, приведена на рис. 4а.

В исходной точке $h = 0.94$ спектр Флоке включает три единичных множителя и две комплексно сопряженные пары с модулями, меньшими единицы. При движении вдоль кривой от $h = 0.94$ два единичных собственных значения остаются в спектре, тогда как третье переходит внутрь единичной окружности вдоль вещественной оси. Это собственное значение убывает по модулю, пересекает отрицательную полуось при $h = 0.92$ и продолжает после этого расти по абсолютной величине. При $h = 0.897$ отрицательный вещественный множитель проходит через точку $\mu = -1$, в которой происходит бифуркация удвоения периода. При $h < 0.897$ периодическое решение становится неустойчивым, но возникает устойчивое решение с двойным периодом.

Рис. 4. Диаграмма периода периодического решения при $\gamma = 0.565$ (а) (сплошной линией показана устойчивая, а штриховой – неустойчивая ветвь; граница устойчивости отмечена черной точкой). Периодическое решение, соответствующее нижней ветви рис. а при $h = 0.92$, $T = 13.973$; ясно видна двухсолитонная пространственная структура этого решения (б).

Заметим, что дестабилизация возникает не в точке поворота кривой $T(h)$, а правее этой точки: кривая $T(h)$ поворачивает при $h = 0.89665$. На рис. 4б показано такое решение на нижней ветви.

Что касается двух комплексных пар, то собственные значения, составляющие одну из них, растут по абсолютной величине при движении по нижней ветви кривой $T(h)$ в направлении меньших h . Они пересекают единичную окружность при повороте кривой в точке $h = 0.89665$. При движении от точки поворота вдоль верхней ветви два комплексно сопряженных собственных значения сходятся на вещественную ось, но остаются вне единичной окружности. Другая комплексная пара остается внутри единичной окружности. При движении вдоль нижней ветви от $h = 0.94$ к $h = 0.89665$ мнимая часть этих собственных значений убывает по абсолютной величине, и при $h = 0.905$ комплексная пара сходитя на вещественную ось. Два собственных значения остаются на вещественной оси при продолжении движения вдоль верхней ветви.

Вся верхняя ветвь $T(h)$ кривой неустойчива. Кривая заканчивается в стационарном $\psi_{(+++)}$ -решении ($h = 0.901$). При приближении к конечной точке верхней ветви два вещественных собственных значения с $|\mu| < 1$ стремятся к 1. В конечной точке спектр включает четыре единичных собственных значения и два положительных вещественных собственных значения, для которых $|\mu| > 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ, проведенный в настоящей работе, отвечает на ряд вопросов, которые поставила перед нами карта аттракторов из работы [6]. Один вопрос состоит в том, происходят ли переходы к хаосу, наблюдаемые с ростом h при фиксированном $\gamma < 0.27$ и фиксированном $\gamma > 0.27$, по двум различным путям (как это показывает численное моделирование) или же это просто эффект, вызванный численными

аппроксимациями. Ответ на этот вопрос дается диаграммами на рис. 2а и рис. 3а. В области $\gamma < 0.27$ (представленной значением $\gamma = 0.265$, рис. 3а) возрастание h приводит к последовательности бифуркаций удвоения периодов периодического солитона. Наоборот, при фиксированном $\gamma > 0.27$ с ростом h никаких бифуркаций удвоения периодов не происходит. Это установлено в настоящей работе численным продолжением решений граничной задачи на двумерной (x, t) -области и подтверждено анализом собственных значений линеаризованного оператора.

Другой вопрос состоит в том, почему периодические солитоны не наблюдаются при численном моделировании для достаточно больших h (даже как короткоживущие конфигурации). Имеется ли четко определенная граница области существования устойчивых периодических солитонов? Мы показали, что при $\gamma > 0.27$ область существования периодических солитонов на оси h ограничена бифуркацией “седло–узел”. Никакие солитоны (устойчивые или неустойчивые) не существуют выше этой точки поворота. При малых γ , $\gamma < 0.27$, ситуация более сложная. Устойчивый периодический солитон действительно прекращает свое существование после каскада удвоений периодов; этим и определяются результаты численного моделирования [6]. Более того, мы нашли, что ветвь с одним периодом снова стабилизируется, когда значения h попадают в область существования солитонов с более высокими периодами, а затем происходит бифуркация “седло–узел” при еще больших значениях h . Периодические односолитонные решения не существуют выше точки бифуркации “седло–узел”, которая тем самым определяет границу области существования периодических солитонов.

Третий момент, выясненный нами, касается формы области на плоскости (γ, h) , где при численном моделировании наблюдаются периодические солитоны. Вопрос здесь состоит в том, почему кривая $h(\gamma)$, ограничивающая эту область, пересекает саму себя, если $0.25 < \gamma < 0.27$. Это явление объясняется возвратом к стабильности периодического солитона, если h возрастает при фиксированном γ , $0.25 < \gamma < 0.27$. Это восстановление стабильности показано на рис. 3а при $\gamma = 0.265$.

Наконец, алгоритм продолжения дает новое устойчивое двухсолитонное связанное состояние, которое не наблюдалось при численном моделировании (см. рис. 4).

Благодарности. Работа Е. В. Земляной поддержана грантом DST в рамках Программы сотрудничества ОИЯИ с научными центрами ЮАР и частично поддержана РФФИ (грант № 09-01-00770). Работа Н. В. Алексеевой поддержана со стороны NRF (грант № 67982).

Список литературы

- [1] C. Elphick, E. Meron, *Phys. Rev. A*, **40**:6 (1989), 3226–3229; J. W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **148** (1984), 451–460; X.-N. Chen, R.-J. Wei, *J. Fluid Mech.*, **259** (1994), 291–303; W. Zhang, J. Viñals, *Phys. Rev. Lett.*, **74**:5 (1995), 690–693; W. Wang, X. Wang, J. Wang, R. Wei, *Phys. Lett. A*, **219**:1–2 (1996), 74–78; X. Wang, R. Wei, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:14 (1997), 2744–2747; *Phys. Rev. E*, **57**:2 (1998), 2405–2410; G. Miao, R. Wei, *Phys. Rev. E*, **59**:4 (1999), 4075–4078; D. Astruc, S. Fauve, “Parametrically amplified 2-dimensional

- solitary waves”, *IUTAM Symposium on Free Surface Flows*, Proc. of the IUTAM Symposium (Birmingham, UK, 10–14 July 2000), *Fluid Mech. Appl.*, **62**, eds. A. C. King, Y. D. Shikhmurzaev, Kluwer, Dordrecht, 2001, 39–46.
- [2] I. H. Deutsch, I. Abram, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **11**:11 (1994), 2303–2313; A. Mecozzi, W. L. Kath, P. Kumar, C. G. Goedde, *Opt. Lett.*, **19**:24 (1994), 2050–2052; S. Longhi, *Opt. Lett.*, **20**:7 (1995), 695–697; V. J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona, F. Silva, G. J. de Valcárcel, E. Roldán, *Opt. Lett.*, **25**:13 (2000), 957–959.
- [3] I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, V. I. Korobov, *Europhys. Lett.*, **15** (1991), 113–118.
- [4] B. Denardo, B. Galvin, A. Greenfield, A. Larraza, S. Putterman, W. Wright, *Phys. Rev. Lett.*, **68**:11 (1992), 1730–1733; W.-Z. Chen, *Phys. Rev. B*, **49**:21 (1994), 15063–15066; G. Huang, S.-Y. Lou, M. Velarde, *Int. J. of Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.*, **6**:10 (1996), 1775–1787; N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, G. P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:14 (2000), 3053–3056; W. Chen, B. Hu, H. Zhang, *Phys. Rev. B*, **65**:13 (2002), 134302.
- [5] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, D. E. Pelinovsky, *Nonlinearity*, **12**:1 (1999), 103–140.
- [6] M. Bondila, I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, *Physica D*, **87**:1–4 (1995), 314–320.
- [7] I. V. Barashenkov, E. V. Zemlyanaya, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:13 (1999), 2568–2571.