Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Бернадская, П. И. Голод, Топологические возбуждения в двумерной спиновой системе с большим спином $s \geq 1$, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 4–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:16:42

© 2009 г.

Ю. Н. Бернацкая*, П. И. Голод*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ СПИНОВОЙ СИСТЕМЕ С БОЛЬШИМ СПИНОМ $s \geq 1$

Построен класс топологических возбуждений среднего поля в двумерной спиновой системе, представленной квантовой моделью Гейзенберга с высшими степенями обменного взаимодействия. Квантовая модель связана с классической (непрерывный классический аналог), основанной на уравнении типа уравнения Ландау–Лифшица, которое описывает крупномасштабные флуктуации среднего поля. С другой стороны, классическая модель со спином s является гамильтоновой системой на коприсоединенной орбите унитарной группы $SU(2s + 1)$. Построен класс конфигураций среднего поля, которые можно интерпретировать как топологические возбуждения, поскольку они имеют фиксированные топологические заряды. Такие возбуждения изменяют свою форму и растут, сохраняя энергию.

Ключевые слова: параметр порядка, среднее поле, эффективный гамильтониан, сопряженные орбиты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно работе [1] в одномерных и двумерных изотропных моделях Гейзенберга с взаимодействиями конечного радиуса при ненулевой температуре не может быть ферромагнитного или антиферромагнитного порядка. Это утверждение в общем случае доказывается как следствие неравенства Боголюбова. В настоящей работе мы строим возбуждения, приводящие к разрушению дальнего нематического или смешанного ферромагнитно-нематического порядка. Этот результат развивает результаты работы [2].

В качестве модели плоского магнетика мы используем квадратную атомную решетку с одинаковыми спинами s в каждом узле. Мы описываем двумерную спиновую систему с помощью обобщенного гейзенберговского гамильтониана, включающего высшие степени обменного взаимодействия $(\hat{S}_n, \hat{S}_{n+\delta})$, где $\hat{S}_n$ – вектор спиновых операторов в узле n . В приближении среднего поля из квантового уравнения Гейзенберга получается классическое уравнение дальнего порядка.

*Национальный университет “Киево-Могилянская академия”, Киев, Украина; Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАНУ, Киев, Украина.
E-mail: holod@ukma.kiev.ua, BernatskaJM@ukma.kiev.ua

Уравнение для среднего поля (поля намагниченности и мультипольных моментов) представляет собой гамильтоново уравнение на коприсоединенной орбите группы Ли. В то же время оно является обобщением хорошо известного уравнения Ландау–Лифшица для поля намагниченности. В этом контексте мы получаем эффективные гамильтонианы для рассматриваемой магнитной системы. Используя кэлерову структуру коприсоединенных орбит, мы строим эффективные гамильтонианы, минимумы которых пропорциональны топологическим зарядам возбудений. Кроме того, мы приводим конфигурации среднего поля, которые минимизируют гамильтонианы.

2. КВАНТОВАЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ

Будем рассматривать спиновую систему в виде плоской атомной¹⁾ решетки с одинаковыми спинами s во всех узлах. Пусть каждому атому n соответствуют три спиновых оператора: $(\hat{S}_n^1, \hat{S}_n^2, \hat{S}_n^3) = \hat{\mathbf{S}}_n$. Эти операторы подчиняются стандартным коммутационным соотношениям

$$[\hat{S}_n^a, \hat{S}_m^b] = i\varepsilon_{abc}\hat{S}_n^c\delta_{nm},$$

где a, b, c пробегают значения $\{1, 2, 3\}$, δ_{nm} – символ Кронекера.

2.1. Обобщенный гамильтониан Гейзенберга. Рассмотрим случай с высокими спинами $s \geq 1$. Тогда систему можно описать с помощью билинейно-биквадратного гамильтониана

$$\hat{\mathcal{H}}^2 = - \sum_{n,\delta} (J(\hat{\mathbf{S}}_n, \hat{\mathbf{S}}_{n+\delta}) + K(\hat{\mathbf{S}}_n, \hat{\mathbf{S}}_{n+\delta})^2).$$

Здесь δ нумерует узлы, являющиеся ближайшими соседями, n пробегает все узлы решетки, а константы J и K обозначают обменные интегралы. В случае спина $s \geq 3/2$ выписанный выше гамильтониан может также включать в себя член, соответствующий бикубическому обмену, а именно

$$\hat{\mathcal{H}}^3 = - \sum_{n,\delta} (J(\hat{\mathbf{S}}_n, \hat{\mathbf{S}}_{n+\delta}) + K(\hat{\mathbf{S}}_n, \hat{\mathbf{S}}_{n+\delta})^2 + L(\hat{\mathbf{S}}_n, \hat{\mathbf{S}}_{n+\delta})^3),$$

где L – соответствующий обменный интеграл.

Запишем обобщенный гейзенберговский гамильтониан для системы произвольного спина s или спина больше s . Этот гамильтониан содержит все степени обменного взаимодействия вплоть до $2s$. Его можно свести к билинейному виду, если взять $(2s + 1)$ -мерное пространство неприводимого представления группы $SU(2)$. Спиновые операторы $\{\hat{S}_n^a\}$ на этом пространстве порождают полную ассоциативную матричную алгебру, в которой имеется достаточное число операторов, чтобы свести соответствующий гамильтониан к билинейному виду.

Например, в случае спина $s = 1$ подходящее пространство представления является трехмерным, и мы выбираем канонический базис в виде $\{|+1\rangle, |-1\rangle, |0\rangle\}$.

¹⁾Здесь и далее под атомом будем понимать не только собственно атом, но и молекулу, ион или совокупность атомов, которые рассматриваются как единое целое, имеющее спин s .

Спиновые операторы $\{\hat{S}_n^a\}$ порождают алгебру $\text{Mat}_{3 \times 3}$. Чтобы составить базис в этой алгебре, возьмем кроме спиновых операторов тензорные операторы веса 2:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_n^{ab} &= \hat{S}_n^a \hat{S}_n^b + \hat{S}_n^b \hat{S}_n^a, \quad a \neq b, \\ \hat{Q}_n^{22} &= (\hat{S}_n^1)^2 - (\hat{S}_n^2)^2, \quad \hat{Q}_n^{20} = \sqrt{3} \left((\hat{S}_n^3)^2 - \frac{2}{3} \right).\end{aligned}\tag{1}$$

Введенные операторы называются *квадрупольными операторами*.

В случае спина $s = 3/2$ соответствующее пространство представлений является четырехмерным, в этом пространстве канонический базис мы выберем в виде $\{|+3/2\rangle, |+1/2\rangle, |-1/2\rangle, |-3/2\rangle\}$. Дополним ассоциативную матричную алгебру $\text{Mat}_{4 \times 4}$ спиновых операторов $\{\hat{S}_n^a\}$ тензорными операторами весов 2 и 3, определив их с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_n^{ab} &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} (\hat{S}_n^a \hat{S}_n^b + \hat{S}_n^b \hat{S}_n^a), \quad a \neq b, \\ \hat{Q}_n^{22} &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} ((\hat{S}_n^1)^2 - (\hat{S}_n^2)^2), \quad \hat{Q}_n^{20} = \frac{\sqrt{5}}{2} \left((\hat{S}_n^3)^2 - \frac{5}{4} \right),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_n^{a3} &= (\hat{Q}_n^{a2} \hat{S}_n^3 + \hat{S}_n^3 \hat{Q}_n^{a2}), \quad a, b \in \{1, 2\}, \quad a \neq b, \\ \hat{T}_n^{ab} &= \frac{1}{\sqrt{6}} ((\hat{S}_n^a)^2 \hat{S}_n^b + \hat{S}_n^b (\hat{S}_n^a)^2 + \hat{S}_n^a \hat{S}_n^b \hat{S}_n^a - (\hat{S}_n^b)^3), \\ \hat{T}_n^{3a} &= \frac{1}{\sqrt{10}} (\hat{Q}_n^{a3} \hat{S}_n^3 + \hat{S}_n^3 \hat{Q}_n^{a3} + \sqrt{3} (\hat{Q}_n^{20} \hat{S}_n^a + \hat{S}_n^a \hat{Q}_n^{20})), \\ \hat{T}_n^{30} &= \frac{1}{12} (41 \hat{S}_n^3 - 20 (\hat{S}_n^3)^3).\end{aligned}\tag{3}$$

Назовем тензорные операторы веса 3 *секступольными операторами*. В дальнейшем будем обозначать все тензорные операторы на выбранном пространстве представления как $\{\hat{P}_n^a\}$.

В терминах операторов представления спиновой алгебры обобщенный гейзенберговский гамильтониан принимает билинейный вид. Для рассмотренных выше гамильтонианов имеем

$$\begin{aligned}\hat{H}^2 &= -\left(J - \frac{1}{2}K\right) \sum_{n,\delta} \sum_b \hat{S}_n^b \hat{S}_{n+\delta}^b - \frac{1}{2}K \sum_{n,\delta} \sum_\alpha \hat{Q}_n^\alpha \hat{Q}_{n+\delta}^\alpha - \frac{4}{3}KN, \\ \hat{H}^3 &= -\left(J - \frac{1}{2}K + \frac{587}{80}L\right) \sum_{n,\delta} \sum_b \hat{S}_n^b \hat{S}_{n+\delta}^b - \frac{75}{32}(4K - L)N - \\ &\quad - \frac{6}{5}(K - 2L) \sum_{n,\delta} \sum_\alpha \hat{Q}_n^\alpha \hat{Q}_{n+\delta}^\alpha - \frac{9}{10}L \sum_{n,\delta} \sum_\beta \hat{T}_n^\beta \hat{T}_{n+\delta}^\beta,\end{aligned}$$

где N – полное число узлов решетки. Очевидно, полученные билинейные гамильтонианы $SU(2)$ -инвариантны, поскольку построены из операторов представления группы $SU(2)$.

2.2. Приближение среднего поля. Среднее поле вводится как поле средних значений операторов $\{\hat{P}_n^a\}$, вычисленных после спонтанного нарушения симметрии. Нарушение симметрии реализуется включением внешнего магнитного поля, которое устанавливает порядок в системе, а затем полагается равным нулю. Средние такого типа называются также *квазисредними* [3].

Обозначим усреднение, приводящее к среднему полю, как $\langle \cdot \rangle$, а компоненты среднего поля как $\{\mu_a(\mathbf{x}_n) = \langle \hat{P}_n^a \rangle\}$. В приближении среднего поля билинейно-биквадратный гамильтониан имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}}^2 = -\left(J - \frac{1}{2}K\right)z \sum_n \sum_{a=1}^3 \hat{P}_n^a \mu_a(\mathbf{x}_n) - \frac{1}{2}Kz \sum_n \sum_{a=4}^8 \hat{P}_n^a \mu_a(\mathbf{x}_n) - \frac{4}{3}KzN,$$

где z – число узлов, являющихся ближайшими соседями.

Очевидно, гамильтониан среднего поля остается $SU(2)$ -инвариантным. Тогда под действием группы $SU(2)$ его можно свести к диагональному виду. Конечно, такая редукция возможна только в случае термодинамического равновесия и бесконечной решетки, когда среднее поле становится постоянным и зависимость от узла n пропадает. Более того, почти все компоненты среднего поля обращаются в нуль, кроме компонент, соответствующих диагональным операторам из набора $\{\hat{P}_n^a\}$. Билинейно-биквадратный гамильтониан в диагональном виде записывается как

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}}^2 = -zN \left(\left(J - \frac{1}{2}K \right) \hat{S}^3 \mu_3 + \frac{1}{2}K \hat{Q}^{20} \mu_8 + \frac{4}{3}K \right).$$

Эти компоненты, соответствующие диагональным операторам, можно использовать в качестве параметров порядка. Компонента μ_3 описывает нормированную намагниченность (отношение z -проекции магнитного момента к намагниченности насыщения). Компоненты μ_8 и μ_{15} являются нормированными проекциями квадрупольных и секстипольных моментов соответственно.

Возможные значения параметров порядка можно получить из уравнений самосогласованности

$$\mu_a = \langle \hat{P}^a \rangle_{\text{MF}} = \frac{\text{Tr } \hat{P}^a e^{-\hat{h}_{\text{MF}}/(kT)}}{\text{Tr } e^{-\hat{h}_{\text{MF}}/(kT)}}$$

для всех диагональных операторов $\hat{P}^a$. Здесь используется матрица плотности с одноузельным гамильтонианом $\hat{h}_{\text{MF}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{MF}}/N$. Заметим, что если для стандартного гейзенберговского гамильтониана рассматривать только спиновые операторы, то уравнение самосогласованности превращается в хорошо известное уравнение Вейсса.

В случае билинейно-биквадратного гамильтониана анализ уравнений самосогласованности дает следующее. Мы приведем вероятные значения параметров порядка в пределе $T \rightarrow 0$ при $J, K > 0$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & |\mu_3| = 1, \quad \mu_8 = \frac{2J - K}{\sqrt{3}K}; & 2) \quad & |\mu_3| = \frac{1}{2}, \quad \mu_8 = \frac{J - K/2}{\sqrt{3}K}; \\ 3) \quad & \mu_3 = 0, \quad |\mu_8| = \frac{2}{\sqrt{3}}; & 4) \quad & \mu_3 = 0, \quad |\mu_8| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Два решения соответствуют состояниям с ферромагнитным порядком, поскольку они имеют ненулевую намагниченность μ_3 . Два других решения соответствуют состояниям с квадрупольным порядком (так называемые нематические состояния), которые являются состояниями с нулевой намагниченностью. Решения 2 и 4 неустойчивы и называются частично упорядоченными. Если K становится отрицательным, то остается только решение 1. Эти результаты согласуются с результатами работ [4], [5] и с фазовой диаграммой упорядоченных состояний одномерной спиновой системы из [6].

Ниже мы рассмотрим $SU(3)$ -инвариантную систему с билинейно-биквадратичным гамильтонианом. $SU(3)$ -инвариантность достигается выбором $J = K$, что соответствует пограничной линии между ферромагнитной и нематической областями [6]. Это означает, что система может находиться в обоих состояниях. В случае гамильтониана $\hat{H}^3$ максимальная $SU(4)$ -инвариантность достигается при $J = -81K/44 = -81L/16$, т.е. значениях, находящихся внутри ферромагнитной области.

Применим приближение среднего поля к квантовому уравнению Гейзенберга:

$$i\hbar \frac{d\hat{P}_n^a}{dt} = [\hat{P}_n^a, \hat{\mathcal{H}}]. \quad (4)$$

Усреднение проводится в предположении нулевых корреляций между флуктуациями операторов $\{\hat{P}_n^a\}$ в различных узлах: $\langle \hat{P}_n^a \hat{P}_m^b \rangle = \langle \hat{P}_n^a \rangle \langle \hat{P}_m^b \rangle$. Тогда в крупномасштабном пределе получаем уравнение типа Ландау–Лифшица

$$\hbar \frac{\partial \mu_a}{\partial t} = 2Jl^2 C_{abc} \mu_b (\mu_{c,xx} + \mu_{c,yy}), \quad (5)$$

где C_{abc} – структурные константы алгебры Ли операторов $\{\hat{P}_n^a\}$ с коммутационными соотношениями $[\hat{P}_n^a, \hat{P}_m^b] = iC_{abc} \hat{P}_n^c \delta_{nm}$. Уравнение (5) представляет собой уравнение движения для среднего поля $\{\mu_a(\mathbf{x})\}$ на плоскости $\{\mathbf{x} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, которая заменяет решетку в крупномасштабном пределе.

В случае стандартного гейзенберговского гамильтониана уравнение (5) совпадает с уравнением Ландау–Лифшица для изотропного магнетика. Поэтому в общем случае мы называем уравнение (5) *обобщенным уравнением Ландау–Лифшица* для векторного поля $\{\mu_a\}$. Векторное поле имеет восемь компонент, если рассматривать билинейно-биквадратный гамильтониан, и пятнадцать компонент в случае гамильтониана с бикубичным обменным членом.

2.3. Эффективные гамильтонианы на коприсоединенных орбитах. Обобщенное уравнение Ландау–Лифшица (5) можно интерпретировать как гамильтоново уравнение на коприсоединенной орбите группы Ли. В случае спина $s = 1$ мы имеем дело с группой $SU(3)$, а в случае произвольного спина s – с группой $SU(2s + 1)$. Заметим, что матрицы $\{\hat{P}^a\}$ служат базисом в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{su}(2s + 1)$, а компоненты среднего поля $\{\mu_a\}$ играют роль координат в пространстве, двойственном к $\mathfrak{su}(2s + 1)$.

Дадим краткое описание групп $SU(3)$ и $SU(4)$. Более подробное описание можно найти, в частности, в работах [7], [8]. Группа $SU(3)$ имеет два типа орбит: орбиты общего положения $SU(3)/(U(1) \times U(1))$ размерности 6 и вырожденные орбиты $SU(3)/(SU(2) \times U(1))$ размерности 4. Каждая орбита группы $SU(3)$ определяется

двумя числами m и q , которые представляют собой координаты μ_3 и μ_8 начальной точки (в положительной камере Вейля). Одновременно эти числа являются предельными значениями компонент среднего поля μ_3 и μ_8 при нулевой температуре. Для вырожденной орбиты следует выбрать $m = 0$ или $m = \sqrt{3}q$. Очевидно, вырожденные орбиты с $m = 0$ отвечают конфигурациям среднего поля, которые реализуют нематические состояния. Ферромагнитные состояния реализуются на всех остальных орбитах группы $SU(3)$.

Группа $SU(4)$ имеет четыре типа орбит: орбиты общего положения $SU(4)/(U(1) \times U(1) \times U(1))$ размерности 12, вырожденные орбиты $SU(4)/(SU(2) \times U(1) \times U(1))$ размерности 10, вырожденные орбиты $SU(4)/(SU(2) \times U(2))$ размерности 8, а также максимально вырожденные орбиты $SU(4)/(SU(3) \times U(1))$ размерности 6. Каждая орбита определяется числами m, q, p , которые являются предельными значениями компонент среднего поля μ_3, μ_8, μ_{15} . Почти все орбиты отвечают ферромагнитным конфигурациям среднего поля. Нематические состояния реализуются на вырожденных орбитах размерности 8 при $m = p = 0$ и произвольном q . Поэтому нематическое состояние оказывается возможным даже в ферромагнитной области на фазовой диаграмме [6].

Как показано выше, предельные значения диагональных компонент среднего поля, отвечающих диагональным операторам, играют роль параметров порядка. Одновременно они определяют коприсоединенную орбиту, на которой живет соответствующая конфигурация среднего поля.

На каждой орбите живет гамильтонова система с уравнением движения и гамильтонианом, обладающим групповой инвариантностью. Для вырожденной орбиты группы $SU(3)$ уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mu_a}{\partial t} = \frac{4\mathcal{A}}{3(m^2 + q^2)} C_{abc} \mu_b (\mu_{c,xx} + \mu_{c,yy}), \quad (6)$$

где $\mathcal{A}$ – размерная константа. Значения параметров порядка m и q (намагниченности и проекции квадрупольного момента) определяют орбиту с помощью следующих уравнений, которые мы называем связями:

$$\delta_{ab} \mu_a \mu_b = m^2 + q^2, \quad d_{abc} \mu_b \mu_c = \pm \sqrt{\frac{m^2 + q^2}{5}} \mu_a,$$

где $d_{abc} = \sqrt{3}/(4\sqrt{5}) \text{Tr}(\hat{P}_a \hat{P}_b \hat{P}_c + \hat{P}_b \hat{P}_a \hat{P}_c)$ – симметричный тензор. Соответствующий $SU(3)$ -инвариантный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{deg}} = \frac{2\mathcal{J}}{3(m^2 + q^2)} \int \sum_{a=1}^8 ((\mu_{a,x})^2 + (\mu_{a,y})^2) dx dy, \quad (7)$$

где размерная константа $\mathcal{J}$ имеет смысл обменного интеграла.

Очевидно, уравнения (6) и (5) совпадают. Легко показать, что уравнение (5) всегда совпадает с уравнением движения на максимально вырожденной орбите. Напомним, что уравнение (5) получено для случая, когда корреляциями между флуктуациями операторов $\{\hat{P}_n^a\}$ мы пренебрегаем. Предположительно, уравнения движения на других орбитах в приближении среднего поля можно получить из (4) усреднением с более сложными правилами корреляции.

Орбита общего положения для группы $SU(3)$ определяется уравнениями

$$\delta_{ab}\mu_a\mu_b = m^2 + q^2, \quad d_{abc}\mu_a\mu_b\mu_c = \frac{1}{\sqrt{5}} q(3m^2 - q^2),$$

$SU(3)$ -инвариантный гамильтониан на этой орбите имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}} = & \frac{\mathcal{J}}{2m^2(m^2 - 3q^2)^2} \int \sum_{a=1}^8 ((m^2 + q^2)^2 (\mu_{a,x})^2 + (m^2 + q^2) (\eta_{a,x})^2 - \\ & - 2\sqrt{3} q(3m^2 - q^2) \mu_{a,x} \eta_{a,x}) dx dy, \end{aligned} \quad (8)$$

где η_a – квадратичная форма по $\{\mu_a\}$: $\eta_a = \sqrt{5} d_{abc} \mu_b \mu_c$. Более подробное изложение можно найти в работе [9].

Гамильтоновы системы на коприсоединенных орбитах группы $SU(3)$ служат классическими эффективными моделями спиновой системы при $s \geq 1$ с биквадратным обменным членом. Очевидно, эти модели описывают крупномасштабные (или медленные) флуктуации среднего поля. В настоящей работе мы предполагаем, что параметры порядка m и q фиксированы. Однако, вообще говоря, они зависят от температуры T и обменного интеграла J . Учитывая эти зависимости, можно рассматривать мелкомасштабные (или быстрые) флуктуации среднего поля.

2.4. Геометрические свойства эффективных гамильтонианов. Каждая коприсоединенная орбита полупростой группы Ли является однородным пространством, допускающим кэлерову структуру. Таким образом, можно ввести комплексную параметризацию орбиты. Для этого мы используем обобщенную стереографическую проекцию (более подробное описание можно найти в работе [8]). В случае группы $SU(3)$ проекция дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mu_a = -\frac{m - \sqrt{3}q}{2} \zeta_a + m\xi_a, \quad \eta_a = \frac{\sqrt{3}(m^2 - q^2) - 2mq}{2} \zeta_a + 2mq\xi_a, \\ \zeta_1 = -\frac{w_2 + \bar{w}_2 + w_3 + \bar{w}_3}{\sqrt{2}(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2)}, \quad \xi_1 = -\frac{(1 - \bar{w}_1)(w_3 - w_1 w_2) + (1 - w_1)(\bar{w}_3 - \bar{w}_1 \bar{w}_2)}{\sqrt{2}(1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2)}, \\ \zeta_2 = i\frac{w_3 - \bar{w}_3 - w_2 + \bar{w}_2}{\sqrt{2}(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2)}, \quad \xi_2 = i\frac{(1 + \bar{w}_1)(w_3 - w_1 w_2) - (1 + w_1)(\bar{w}_3 - \bar{w}_1 \bar{w}_2)}{\sqrt{2}(1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2)}, \\ \zeta_3 = \frac{|w_2|^2 - |w_3|^2}{1 + |w_2|^2 + |w_3|^2}, \quad \xi_3 = \frac{1 - |w_1|^2}{1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2}, \\ \zeta_4 = i\frac{\bar{w}_2 w_3 - w_2 \bar{w}_3}{1 + |w_2|^2 + |w_3|^2}, \quad \xi_4 = i\frac{w_1 - \bar{w}_1}{1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2}, \\ \zeta_5 = \frac{w_2 + \bar{w}_2 - w_3 - \bar{w}_3}{\sqrt{2}(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2)}, \quad \xi_5 = -\frac{(1 + \bar{w}_1)(w_3 - w_1 w_2) + (1 + w_1)(\bar{w}_3 - \bar{w}_1 \bar{w}_2)}{\sqrt{2}(1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2)}, \\ \zeta_6 = i\frac{w_2 - \bar{w}_2 + w_3 - \bar{w}_3}{\sqrt{2}(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2)}, \quad \xi_6 = i\frac{(1 - \bar{w}_1)(w_3 - w_1 w_2) - (1 - w_1)(\bar{w}_3 - \bar{w}_1 \bar{w}_2)}{\sqrt{2}(1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2)}, \\ \zeta_7 = -\frac{\bar{w}_2 w_3 + w_2 \bar{w}_3}{1 + |w_2|^2 + |w_3|^2}, \quad \xi_7 = -\frac{w_1 + \bar{w}_1}{1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\zeta_8 = \frac{2 - |w_2|^2 - |w_3|^2}{\sqrt{3}(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2)}, \quad \xi_8 = \frac{1 + |w_1|^2 - 2|w_3 - w_1 w_2|^2}{\sqrt{3}(1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2)}.$$

Координаты $\{w_1, w_2, w_3\}$ (согласно [7] – координаты Брюа) параметризуют орбиту общего положения группы $SU(3)$. В случае вырожденной орбиты следует положить $m = 0$ и $w_1 = 0$ или $m = \sqrt{3}q$ и $w_2 = 0$.

В терминах $\{w_\alpha\}$ эффективные гамильтонианы (7) и (8) принимают вид

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{J} \int \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial z} \right) dz d\bar{z}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где $z = x + iy$ – комплексная координата на плоскости, полученной из решетки атомов после перехода к крупномасштабному пределу (см. п. 2.2). Тензор g является невырожденным и положительно определенным, поэтому он может играть роль метрики на орбите. Его компоненты $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ находятся из равенства (7) для вырожденной орбиты и из (8) для орбиты общего положения. В терминах вспомогательных векторных полей $\{\zeta_a\}$ и $\{\xi_a\}$ имеем

$$g_{\alpha\bar{\beta}}^{\text{deg } 1} = \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial \zeta_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \zeta_a}{\partial \bar{w}_\beta}, \quad g_{\alpha\bar{\beta}}^{\text{deg } 2} = \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial \xi_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \xi_a}{\partial \bar{w}_\beta} \Big|_{w_2=0},$$

$$g_{\alpha\bar{\beta}}^{\text{gen}} = \frac{1}{2} \sum_a \left(\frac{\partial \zeta_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \zeta_a}{\partial \bar{w}_\beta} - \frac{\partial \zeta_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \xi_a}{\partial \bar{w}_\beta} + \frac{\partial \xi_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \xi_a}{\partial \bar{w}_\beta} \right).$$

Заметим, что в терминах $\{w_\alpha\}$ тензор g не зависит от конкретной орбиты.

Являясь кэлеровым многообразием, орбита группы $SU(3)$ обладает кэлеровым потенциалом. Мы используем потенциал Кириллова–Костанта–Сурьо

$$\Phi = m\Phi_1 - \frac{m - \sqrt{3}q}{2} \Phi_2,$$

$$\Phi_1 = \ln(1 + |w_1|^2 + |w_3 - w_1 w_2|^2), \quad \Phi_2 = \ln(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2).$$

Топологическая структура орбиты характеризуется второй группой когомологий H^2 , имеющей размерность 2. Поэтому существуют две базисные 2-формы, например порожденные потенциалами Φ_1 и Φ_2 . Каждая из них определяет топологический заряд

$$\mathcal{Q}_k = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{\alpha, \beta} \frac{i\partial^2 \Phi_k}{\partial w_\alpha \partial \bar{w}_\beta} \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial z} \right) dz \wedge d\bar{z}, \quad k = 1, 2.$$

На вырожденной орбите определяющим является только один потенциал и существует только один топологический заряд. Выражения для $\mathcal{Q}_k$ и $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{deg } k}$ при этом различаются только знаком. Очевидно,

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{deg } k} \geq 4\pi \mathcal{J} |\mathcal{Q}_k|. \quad (11)$$

Таким образом, на вырожденной орбите минимум $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ реализуется, если в (11) выполнено равенство, что имеет место, когда $\{w_\alpha\}$ являются голоморфными или антиголоморфными функциями. Здесь мы используем идею Белавина и Полякова [2].

Определим топологический заряд для орбиты общего положения как $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$. Чтобы распространить неравенство (11) на орбиты общего положения с топологическим зарядом $\mathcal{Q}$, построим эффективный гамильтониан вида

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}} = \frac{\mathcal{J}}{2m^2(m^2 - 3q^2)^2} \int \sum_{a=1}^8 (C_1(\mu_{a,x})^2 + C_2(\eta_{a,x})^2 + C_3\mu_{a,x}\eta_{a,x}) dx dy, \quad (12)$$

$$C_1 = m^4 + q^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}mq(q^2 - m^2) + 14m^2q^2,$$

$$C_2 = \frac{5}{3}m^2 + q^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}mq, \quad C_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}m^3 + 2q^3 - \frac{26}{3}m^2q + \frac{2}{\sqrt{3}}mq^2.$$

В терминах $\{w_\alpha\}$ он сводится к виду (10) с метрикой

$$g_{\alpha\beta}^{\text{gen}} = \frac{1}{2} \sum_a \left(\frac{\partial \zeta_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \zeta_a}{\partial \bar{w}_\beta} + \frac{\partial \xi_a}{\partial w_\alpha} \frac{\partial \xi_a}{\partial \bar{w}_\beta} \right).$$

Получаем

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}} \geq 4\pi\mathcal{J}|\mathcal{Q}|,$$

и минимум $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}}$ реализуется в случае равенства, что имеет место, если $\{w_\alpha\}$ являются голоморфными или антиголоморфными функциями.

3. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Построим специальный класс топологических возбуждений, минимизирующих эффективные гамильтонианы $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{deg } 1}$ и $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}}$, определяемые формулами (7) и (12). Будем описывать эти возбуждения с помощью голоморфных функций $\{w_\alpha(z)\}$. Каждое множество $\{w_1(z), w_2(z), w_3(z)\}$ представляет конфигурацию среднего поля рассматриваемой системы.

Сначала рассмотрим вырожденную орбиту группы $SU(3)$ с начальной точкой $m = 0$, $q = -2/\sqrt{3}$, на которой реализуется нематическое состояние. Чтобы удовлетворить предельным условиям $\mu_3 \rightarrow m$ и $\mu_8 \rightarrow q$, функции $\{w_\alpha(z)\}$ должны обращаться в нуль при $z \rightarrow \infty$. Пусть

$$w_1(z) = 0, \quad w_2(z) = \frac{a_2}{z - z_2}, \quad w_3(z) = \frac{a_3}{z - z_3}, \quad a_2, z_2, a_3, z_3 \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

– крупномасштабное возбуждение в рассматриваемом магнетике. Соответствующая конфигурация среднего поля получается подстановкой равенств (13) в (9). Поведение компонент μ_3 и μ_8 представлено на рисунке. При $z \rightarrow \infty$ значения компонент μ_3 и μ_8 стремятся к m и q .

Положим $z_2 = z_3$. Сдвигом координаты z легко свести (13) к конфигурации

$$w_1(z) = 0, \quad w_2(z) = \frac{a_2}{z}, \quad w_3(z) = \frac{a_3}{z}, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{C},$$

и вычислить соответствующий топологический заряд

$$\mathcal{Q} = \frac{2i}{4\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{(a_2^2 + a_3^2)}{(|z|^2 + a_2^2 + a_3^2)^2} dz \wedge d\bar{z} = 1. \quad (14)$$

Профили компонент среднего поля μ_3 и μ_8 в случае конфигурации (13).

В случае $z_2 \neq z_3$ топологический заряд равен двум.

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Каждый полюс конфигурации среднего поля является солитоном типа Белафина–Полякова. Каждый солитон дает единичный топологический заряд. Таким образом, конфигурация с двумя различными солитонами имеет топологический заряд, равный двум. Никакой непрерывной деформацией нельзя перевести конфигурацию с топологическим зарядом 2 в конфигурацию с топологическим зарядом 1. Если же мы позволим разрывные деформации, то два солитона могут встретиться в любой точке и соединиться в один.

Заметим, что энергия конфигурации (13) не зависит от параметров солитонов a_2 , z_2 , a_3 , z_3 . Это означает, что возбуждение может расти (с ростом $|a_2|$ и $|a_3|$), а энергия при этом сохраняется. Такой рост немедленно приводит к нарушению порядка в системе.

Можно построить конфигурацию с более чем двумя солитонами:

$$w_1(z) = 0, \quad w_2(z) = \frac{a_2}{\prod_{k=1}^n (z - z_{2k})}, \quad w_3(z) = \frac{a_3}{\prod_{k=1}^m (z - z_{3k})}, \quad (15)$$

где a_2 , a_3 , $\{z_{2k}\}_{k=1}^n$ и $\{z_{3k}\}_{k=1}^m$ – фиксированные комплексные числа. Если все значения $\{z_{2k}\}_{k=1}^n$ и $\{z_{3k}\}_{k=1}^m$ различны, то топологический заряд равен $n + m$. При совпадении полюса функции $w_2(z)$ с полюсом функции $w_3(z)$ топологический заряд уменьшается на 1. Однако совпадение двух полюсов одной и той же функции (например, $w_2(z)$) не приводит к уменьшению топологического заряда. Легко видеть, что минимальная энергия конфигурации (15) равна $4\pi\mathcal{J} \min(n, m)$.

Теперь рассмотрим орбиту общего положения, где реализуется ферромагнитное состояние. Положим $m = 1$ и $q = -2/\sqrt{3}$. В этом случае среднее поле в магнетике описывается с помощью эффективного гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}}$, определяемого равенством (12). Пусть

$$w_1(z) = \frac{a_1}{z - z_1}, \quad w_2(z) = \frac{a_2}{z - z_2}, \quad w_3(z) = \frac{a_3}{z - z_3}, \quad a_k, z_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16)$$

– крупномасштабное возбуждение среднего поля. Вычисление топологических зарядов дает: 1) $Q_1 = 3$, $Q_2 = 2$, если $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ или $a_1 = a_2 \neq a_3$; 2) $Q_1 = 2$, $Q_2 = 2$, если $a_1 = a_3 \neq a_2$; 3) $Q_1 = 2$, $Q_2 = 1$, если $a_1 = a_2 = a_3$ или $a_1 \neq a_2 = a_3$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Каждый обобщенный гейзенберговский гамильтониан с высшими степенями обменного взаимодействия можно свести к билинейному виду. Из исходной квантовой системы в приближении среднего поля получается классическая система. Усреднение уравнения Гейзенберга дает уравнение типа Ландау–Лифшица для среднего поля. Используя методы теории групп Ли, мы построили эффективные гамильтонианы для классической системы с $SU(3)$ -симметрией. Один из них, $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{deg}}$, представляет собой $SU(3)$ -аналог гамильтониана, обычно используемый в теории магнетизма. Кроме того, мы предложили другой, биквадратный по среднему полю гамильтониан $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{gen}}$. Также построены примеры топологических возбуждений, которые доставляют минимумы гамильтонианов. Такие возбуждения могут менять свою форму, сохраняя при этом энергию. Это дает возможный сценарий разрушения упорядоченного состояния в двумерном магнетике при ненулевой температуре, что согласуется с теоремой Мермина–Вагнера.

Благодарности. Настоящая работа частично поддержана грантом Международного благотворительного фонда возрождения Киево-Могилянской академии.

Список литературы

- [1] N. D. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.*, **17**:22 (1966), 1133–1136.
- [2] А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ*, **22**:10 (1975), 503–506.
- [3] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.
- [4] В. М. Матвеев, *ЖЭТФ*, **65** (1973), 1626.
- [5] M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, A. Castets, *Phys. Rev. B*, **5**:11 (1972), 4603–4609.
- [6] K. Buchta, G. Fáth, Ö. Legeza, J. Sólyom, *Phys. Rev. B*, **72**:5 (2005), 054433.
- [7] R. F. Picken, *J. Math. Phys.*, **31**:3 (1990), 616–638.
- [8] J. Bernatska, P. Holod, “Geometry and topology of coadjoint orbits of semisimple Lie groups”, *Geometry, Integrability and Quantization*, IX, Proc. 9th Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization (June 8–13, 2007, Varna, Bulgaria), ed. I. M. Mladenov, Softex, Sofia, 2008, 146–166; [arXiv: 0801.2913](https://arxiv.org/abs/0801.2913).
- [9] J. Bernatska, P. Holod, *J. Phys. A*, **42**:7 (2009), 075401.