Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богданов, О классе многомерных интегрируемых иерархий и их редукциях, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 15–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:26:54

© 2009 г.

Л. В. Богданов*

О КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ И ИХ РЕДУКЦИЯХ

Рассматривается класс многомерных интегрируемых иерархий, связанный с коммутативностью общих (нередуцированных) $(N + 1)$ -мерных векторных полей, содержащих производную по спектральной переменной. Эти иерархии определяются производящим уравнением, в том числе в форме Лакса–Сато. Для рассматриваемого класса иерархий приводится схема одевания, основанная на нелинейной векторной задаче Римана. В качестве характерных примеров рассматриваются иерархии, связанные с уравнением Манакова–Сантини и с системой Дунайского.

Ключевые слова: интегрируемая иерархия, бездисперсионное уравнение, “небесное уравнение”, метод одевания.

1. ВВЕДЕНИЕ

Используя конструкцию, развитую в работах [1], [2], мы описываем структуру общей интегрируемой иерархии, связанной с коммутацией $(N + 1)$ -мерных векторных полей, которая определяет $(N + 2)$ -мерные интегрируемые уравнения. Мы рассматриваем несколько частных случаев общей иерархии и ее редукций; некоторые из них определяют известные интегрируемые модели. Простейший случай $(1 + 1)$ -мерных векторных полей (одна пространственная переменная и одна спектральная переменная) соответствует $(2 + 1)$ -мерной интегрируемой системе, введенной в работе [3] (см. также работы [4], [5]). Случай $(2 + 1)$ -мерных векторных полей (две пространственные переменные и одна спектральная переменная) при редукции к сохраняющим объем векторным полям приводит к $(2 + 2)$ -мерной интегрируемой модели Дунайского [6], описывающей антиавтодуальные уравнения Эйнштейна–Максвелла в сигнатуре $(2, 2)$ (твисторная постановка).

2. ОБЩАЯ $(N + 2)$ -МЕРНАЯ ИЕРАРХИЯ

В настоящей работе мы избрали формальный путь введения иерархии, начинающийся с производящего уравнения, которое играет роль, подобную билинейному

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: leonid@landau.ac.ru

тождеству Хироты. Мы показываем, что производящее уравнение иерархии эквивалентно форме Лакса–Сато, которая дает нам линейные уравнения иерархии и нелинейные уравнения в частных производных, возникающие как условия их совместности. Линейные операторы имеют вид векторных полей, зависящих от спектральной переменной и включающих производную по спектральной переменной. Ввести иерархию другим способом, подобно тому, как это сделано в работах [4], [5], мы могли бы, начав с общей нелинейной векторной задачи Римана. Мы обсуждаем нелинейное векторное одевание Римана в конце нашей статьи.

Чтобы определить общую иерархию, мы рассматриваем $N+1$ формальных рядов, зависящих от N бесконечных наборов дополнительных переменных (“времен”),

$$\Psi^0 = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^0(\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^N) \lambda^{-n}, \quad (1)$$

$$\Psi^k = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^k (\Psi^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^k(\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^N) (\Psi^0)^{-n}, \quad (2)$$

где $1 \leq k \leq N$, $\mathbf{t}^k = (t_0^k, \dots, t_n^k, \dots)$. Мы вводим обозначения ∂_n^k для $\partial/\partial t_n^k$ и Ψ для вектора (столбца) с компонентами $\Psi^0, \dots, \Psi^N$, а также проекторы

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \lambda^n \right)_+ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n, \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \lambda^n \right)_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} u_n \lambda^n.$$

Общая иерархия определяется производящим соотношением

$$(J_0^{-1} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N)_- = 0, \quad (3)$$

где дифференциал включает как времена, так и спектральную переменную,

$$df = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \partial_n^k f dt_n^k + \partial_\lambda f d\lambda;$$

в формуле (3) J_0 – детерминант матрицы Якоби J ,

$$J_{ij} = \partial_i \Psi^j, \quad 0 \leq i, j \leq N,$$

где

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad x^k = t_0^k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Уравнение (3) является производящим соотношением для формы Лакса–Сато иерархии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Соотношение (3) эквивалентно бесконечному набору уравнений

$$\partial_n^k \Psi = \sum_{i=0}^N (J_{ki}^{-1} (\Psi^0)^n)_+ \partial_i \Psi, \quad 0 \leq n \leq \infty, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (4)$$

Доказательство этого предложения полностью аналогично доказательству для иерархии Дунайского, приведенному в работе [2]. Доказательство того, что из (3) следует иерархия (4), основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 1. *Если дано тождество (3), то для произвольного оператора первого порядка*

$$\widehat{U} = \sum_{k=1}^N \sum_i u_i^k(\lambda, \mathbf{t}) \partial_i^k + u^0(\lambda, \mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2) \partial_\lambda$$

с “плюсовыми” коэффициентами $((u_i^k)_- = u_-^0 = 0)$ условие $(\widehat{U}\Psi)_+ = 0$ (где для Ψ^k , $k \neq 0$, производные рядов (2) берутся при фиксированном Ψ^0) влечет за собой равенство $\widehat{U}\Psi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полной аналогии с работами [4], [5] из производящего соотношения (3) следует линейная система $(J^T)^{-1}\widehat{U}\Psi = 0$ на $\widehat{U}\Psi$. Принимая во внимание то, что $\det J \neq 0$ ($\det J = 1 + \sum_{p=1}^N \partial_p \Psi_1^p / \lambda + \dots$), мы получаем, что эта система имеет единственное решение $\widehat{U}\Psi = 0$.

Следствие (4) $\Rightarrow$ (3) непосредственно вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение*

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} \Psi_j\right) = J_0 \det(V_{\tau_i+}^j), \quad (5)$$

где τ_i , $0 \leq i \leq N$, представляют собой произвольный набор времен иерархии, а $V_{\tau_i+}^j$ – коэффициенты соответствующих векторных полей, заданных правой частью уравнений (4),

$$\partial_{\tau_i} \Psi = \sum_{j=0}^N V_{\tau_i+}^j \partial_j \Psi.$$

Аналогично работе [2] можно также доказать, что потоки Лакса–Сато (4) общей иерархии совместны.

Утверждение леммы 1 является основным инструментом конструирования линейных уравнений иерархии в обычном духе метода одевания. Сначала мы выбираем базис, по которому можно разложить произвольную сингулярную (“плюсовую”) часть линейного оператора, действующего на Ψ , и который в нашем случае образован набором функций $\lambda^n \partial_k \Psi$, $\lambda^n \partial_\lambda \Psi$, $0 \leq n < \infty$, $0 < k \leq N$. Затем берем производную Ψ по произвольному “высшему” времени иерархии и, разлагая ее по базису и используя лемму 1, получаем некоторое линейное уравнение иерархии. Уравнения (4) имеют в точности такой вид, и единственное, что нам нужно для доказательства их справедливости – это проверить отсутствие сингулярности (“плюсового” члена). Используя разложение по базису, легко получить первые линейные уравнения иерархии непосредственно (другим способом их получения является использование общих формул (4)):

$$\partial_1^k \Psi = \left(\lambda \partial_k - \sum_{p=1}^N (\partial_k u_p) \partial_p - (\partial_k u_0) \partial_\lambda \right) \Psi, \quad 0 < k \leq N, \quad (6)$$

где $u_k = \Psi_1^k$, $0 \leq k \leq N$. Условие совместности любой пары линейных уравнений (6) (например, с ∂_1^k и ∂_1^q , $k \neq q$) дает замкнутую нелинейную $(N+2)$ -мерную систему дифференциальных уравнений в частных производных для множества функций u_k , u_0 , которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \partial_1^k \partial_q \hat{u} - \partial_1^q \partial_k \hat{u} + [\partial_k \hat{u}, \partial_q \hat{u}] &= (\partial_k u_0) \partial_q - (\partial_q u_0) \partial_k, \\ \partial_1^k \partial_q u_0 - \partial_1^q \partial_k u_0 + (\partial_k \hat{u}) \partial_q u_0 - (\partial_q \hat{u}) \partial_k u_0 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{u}$ – векторное поле, $\hat{u} = \sum_{p=1}^N u_k \partial_k$. В случае $u_0 = 0$ мы имеем только первое уравнение без правой части. Этот случай соответствует общим векторным полям, не содержащим производную по спектральной переменной, и при гамильтоновой редукции представляет собой гиперкэлеровы иерархии [7], [8]. Структура общей системы (7) в основе такая же, как структура предложенного Дунайским обобщения второго “небесного” уравнения (heavenly equation) [6].

3. ИЕРАРХИЯ МАНАКОВА–САНТИНИ

Простейший случай общей иерархии (4) при $N = 1$ связан с системой, недавно предложенной в статье [3],

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u_{yy} + (uu_x)_x + v_x u_{xy} - u_{xx} v_y, \\ v_{xt} &= v_{yy} + uv_{xx} + v_x v_{xy} - v_{xx} v_y, \end{aligned} \quad (8)$$

пара Лакса для которой есть

$$\begin{aligned} \partial_y \Psi &= ((\lambda - v_x) \partial_x - u_x \partial_\lambda) \Psi, \\ \partial_t \Psi &= ((\lambda^2 - v_x \lambda + u - v_y) \partial_x - (u_x \lambda + u_y) \partial_\lambda) \Psi. \end{aligned}$$

Эта система была найдена при изучении задачи Коши для бездисперсионного уравнения КП (уравнения Хохлова–Заболоцкой)

$$u_{xt} = u_{yy} + (uu_x)_x. \quad (9)$$

Хорошо известно, что пара Лакса для этого уравнения может быть записана в терминах гамильтоновых векторных полей, и динамика связана с группой $Sdiff(2)$:

$$\begin{aligned} \partial_y \Psi &= ((\partial_\lambda H^y) \partial_x - (\partial_x H^y) \partial_\lambda) \Psi, & H^y &= \frac{\lambda^2}{2} + u, \\ \partial_t \Psi &= ((\partial_\lambda H^t) \partial_x - (\partial_x H^t) \partial_\lambda) \Psi, & H^t &= \frac{\lambda^3}{3} + \lambda u + w, \quad w_x = u_y. \end{aligned}$$

Однако в терминах нелинейного одеяния Римана–Гильберта, используемого в работе [3] (см. также статьи [4], [5]), гамильтоновость векторных полей является просто редукцией к данным одеяниям, и возможно также рассмотреть случай общих (нередуцированных) векторных полей. Это наблюдение привело к открытию системы (8). При $v = 0$ эта система редуцируется к бездисперсионному уравнению КП (9). Соответственно, редукция $u = 0$ дает уравнение [9] (см. также [10]–[12])

$$v_{xt} = v_{yy} + v_x v_{xy} - v_{xx} v_y. \quad (10)$$

Мы покажем, что иерархия, связанная с системой (8), представляет собой частный случай общей иерархии (4) при $N = 1$. В этом случае мы имеем два ряда

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^0(\mathbf{t}) \lambda^{-n}, \\ \Psi^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} t_n (\Psi^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^1(\mathbf{t}) (\Psi^0)^{-n}\end{aligned}\tag{11}$$

и производящее соотношение

$$(J_0^{-1} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1)_- = 0.\tag{12}$$

Уравнения Лакса–Сато для этой иерархии имеют вид

$$\partial_n \Psi = \sum_{i=0,1} (J_{1i}^{-1} (\Psi^0)^n)_+ \partial_i \Psi, \quad 0 \leq n \leq \infty,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \Psi_\lambda^0 & \Psi_\lambda^1 \\ \Psi_x^0 & \Psi_x^1 \end{pmatrix},\tag{13}$$

и

$$\begin{aligned}J_{10}^{-1} &= -J_0^{-1} \Psi_x^0, & J_{11}^{-1} &= J_0^{-1} \Psi_\lambda^0, \\ J_0 &= \det J = 1 + \partial_x \Psi_1^1 \lambda^{-1} + (\partial_x \Psi_2^1 - \Psi_1^1) \lambda^{-2} + \dots.\end{aligned}$$

В более явной форме уравнения Лакса–Сато записываются как

$$\partial_n \Psi = (J_0^{-1} \Psi_\lambda^0 (\Psi^0)^n)_+ \partial_x \Psi - (J_0^{-1} \Psi_x^0 (\Psi^0)^n)_+ \partial_\lambda \Psi.\tag{14}$$

Уравнения Лакса–Сато для первых двух потоков имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_y \Psi &= ((\lambda - v_x) \partial_x - u_x \partial_\lambda) \Psi, \\ \partial_t \Psi &= ((\lambda^2 - v_x \lambda + u - v_y) \partial_x - (u_x \lambda + u_y) \partial_\lambda) \Psi,\end{aligned}$$

где $u = \Psi_1^0$, $v = \Psi_1^1$, $x = t_0$, $y = t_1$, $t = t_2$. Условия совместности этих уравнений представляют собой систему (8). Таким образом, общая иерархия (4) при $N = 1$, заданная уравнениями (14), определяет иерархию коммутирующих потоков для системы (8), так что ее можно назвать иерархией Манакова–Сантини.

Для того чтобы редуцировать иерархию Манакова–Сантини (14) к бездисперсионной иерархии КП, необходимо рассмотреть редукцию $J_0 = 1$ (условие сохранения площади или гамильтоновости), тогда из уравнений Лакса–Сато (14) легко получаются уравнения Лакса–Сато бездисперсионной иерархии КП. Редукция $\Psi^0 = \lambda$ приводит к иерархии, связанной с уравнением (10), которая рассматривалась в работах [11], [12].

4. ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЯ ДУНАЙСКОГО

Данная иерархия связана с предложенной Дунайским [6] интегрируемой моделью, обобщающей знаменитое второе “небесное” уравнение Плебанского. Она соответствует общей иерархии при $N = 2$ с редукцией, сохраняющей объем ($J_0 = 1$). Чтобы определить эту иерархию, введем три ряда

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^0(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2) \lambda^{-n}, \\ \Psi^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 (\Psi^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^1(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2) (\Psi^0)^{-n}, \\ \Psi^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 (\Psi^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^2(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2) (\Psi^0)^{-n}.\end{aligned}$$

Производящее уравнение иерархии Дунайского имеет вид

$$(d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge d\Psi^2)_- = 0 \quad (15)$$

(мы учли редукцию $J_0 = 1$). Уравнения Лакса–Сато иерархии записываются как

$$\begin{aligned}\partial_n^1 \Psi &= \left((\Psi^0)^n \begin{vmatrix} \Psi_\lambda^0 & \Psi_\lambda^2 \\ \Psi_y^0 & \Psi_y^2 \end{vmatrix} \right)_+ \partial_x \Psi - \left((\Psi^0)^n \begin{vmatrix} \Psi_\lambda^0 & \Psi_\lambda^2 \\ \Psi_x^0 & \Psi_x^2 \end{vmatrix} \right)_+ \partial_y \Psi - \\ &\quad - \left((\Psi^0)^n \begin{vmatrix} \Psi_x^0 & \Psi_x^2 \\ \Psi_y^0 & \Psi_y^2 \end{vmatrix} \right)_+ \partial_\lambda \Psi, \quad (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_n^2 \Psi &= - \left((\Psi^0)^n \begin{vmatrix} \Psi_\lambda^0 & \Psi_\lambda^1 \\ \Psi_y^0 & \Psi_y^1 \end{vmatrix} \right)_+ \partial_x \Psi + \left((\Psi^0)^n \begin{vmatrix} \Psi_\lambda^0 & \Psi_\lambda^1 \\ \Psi_x^0 & \Psi_x^1 \end{vmatrix} \right)_+ \partial_y \Psi + \\ &\quad + \left((\Psi^0)^n \begin{vmatrix} \Psi_x^0 & \Psi_x^1 \\ \Psi_y^0 & \Psi_y^1 \end{vmatrix} \right)_+ \partial_\lambda \Psi \quad (17)\end{aligned}$$

(с дополнительным условием $J_0 = 1$). Легко проверить, что при $\Psi^0 = \lambda$ иерархия уравнения Дунайского сводится к иерархии “небесного” уравнения [7], [8], в то время как при $\Psi^2 = y$ она редуцируется к бездисперсионной иерархии КП. Первые два потока иерархии (16), (17) имеют вид

$$\partial_1^1 \Psi = (u_y \partial_x - u_x \partial_y + \lambda \partial_x - f_x \partial_\lambda) \Psi, \quad (18)$$

$$\partial_1^2 \Psi = (v_x \partial_y - v_y \partial_x + \lambda \partial_y - f_y \partial_\lambda) \Psi; \quad (19)$$

здесь $u = \Psi_1^2$, $v = \Psi_1^1$, $f = \Psi_1^0$. Из условия $\det J = 1$ следует, что $u_y + v_x = 0$, и мы можем ввести потенциал Θ такой, что $v = \Theta_y$, $u = -\Theta_x$. При отождествлении $z = -t_1^1$, $w = t_1^2$ мы получаем пару Лакса для системы Дунайского:

$$\begin{aligned}\Theta_{wx} + \Theta_{zy} + \Theta_{xx} \Theta_{yy} - \Theta_{xy}^2 &= f, \\ f_{xw} + f_{yz} + \Theta_{yy} f_{xx} + \Theta_{xx} f_{yy} - 2\Theta_{xy} f_{xy} &= 0.\end{aligned}$$

Вторые потоки могут быть записаны как

$$\begin{aligned}\partial_2^1 \Psi &= (\lambda \partial_1^1 + f \partial_x - (\partial_1^1 f) \partial_\lambda) \Psi, \\ \partial_2^2 \Psi &= (\lambda \partial_1^2 + f \partial_y - (\partial_1^2 f) \partial_\lambda) \Psi.\end{aligned}$$

Чтобы выписать векторные поля в более явном виде, необходимо использовать первые потоки (17), (19). Условие коммутативности любой пары потоков задает уравнение на Θ , f (с различным набором времен).

5. СХЕМА ОДЕВАНИЯ

Рассмотрим нелинейную векторную задачу Римана вида

$$\Psi_+ = \mathbf{F}(\Psi_-), \quad (20)$$

где Ψ_+ , Ψ_- обозначают граничные значения $(N+1)$ -компонентной вектор-функции на сторонах некоторой ориентированной кривой γ в комплексной плоскости переменной λ . Задача состоит в том, чтобы найти функцию, аналитическую вне кривой, с некоторым фиксированным поведением на бесконечности (нормировкой), которая удовлетворяет уравнению (20). Задача такого типа рассматривалась Такасаки [7], [8], [13], который подчеркивал ее связь с конструкцией нелинейного гравитона Пенроуза.

Задача (20) связана с классом интегрируемых уравнений, которые могут быть представлены как условия коммутативности векторных полей, содержащих производную по спектральной переменной. Мы приводим набросок схемы одевания, соответствующей общей $(N+2)$ -мерной интегрируемой иерархии (3), (4). Сначала в качестве γ берем единичную окружность. Чтобы получить решения общей иерархии с помощью задачи (20), необходимо найти решение этой задачи с особенностями при $\lambda = \infty$, определяемыми рядами (1), (2) (для простоты мы предполагаем, что только конечное число времен не равно нулю). Если для этого решения детерминант J_0 не равен нулю, то мы приходим к заключению, что форма

$$\Omega = J_0^{-1} d\Psi^0 \wedge d\Psi^1 \wedge \dots \wedge d\Psi^N$$

аналитична в комплексной плоскости и, таким образом, удовлетворяет производящему тождеству (3). Тогда решение задачи Римана (20) удовлетворяет уравнениям Лакса–Сато (4) и дает решение общей $(N+2)$ -мерной иерархии.

Вследствие того что особенности решения задачи Римана задаются рядами (1), (2) с использованием самого решения, решение иерархии обычно определяется в терминах неявных функций.

Благодарности. Автор частично поддержан РФФИ (гранты № 07-01-00446_а, 06-01-92053-КЭ_а и 08-01-90104-Мол_а).

Список литературы

- [1] L. V. Bogdanov, V. S. Dryuma, S. V. Manakov, *On the dressing method for Dunajski anti-self-duality equation*, [arXiv: nlin/0612046](#).
- [2] L. V. Bogdanov, V. S. Dryuma, S. V. Manakov, *J. Phys. A*, **40**:48 (2007), 14383–14393.
- [3] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Письма в ЖЭТФ*, **83**:10 (2006), 534–538.
- [4] С. В. Манаков, П. М. Сантини, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 147–156.
- [5] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **41**:5 (2008), 055204.
- [6] M. Dunajski, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **458**:2021 (2002), 1205–1222.
- [7] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **30**:7 (1989), 1515–1521.
- [8] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **31**:8 (1990), 1877–1888.
- [9] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 4134–4156.
- [10] M. Dunajski, *J. Geom. Phys.*, **51**:1 (2004), 126–137.
- [11] L. Martínez Alonso, A. B. Shabat, *Phys. Lett. A*, **300**:1 (2002), 58–64.
- [12] Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 216–229.
- [13] K. Takasaki, *Phys. Lett. B*, **285**:3 (1992), 187–190.