Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Дубровский, А. В. Грамолин, Калибровочно-инвариантное описание некоторых $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:17:22

© 2009 г.

В. Г. Дубровский*, А. В. Грамолин*

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ $(2 + 1)$ -МЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены новые калибровочно-инвариантные формы двумерных интегрируемых систем нелинейных уравнений: системы Савады–Котера и Каупа–Купершмидта, обобщенной системы дисперсионных длинных волн, системы Нижника–Веселова–Новикова. Показано, каким образом из этих форм вытекают как новые, так и известные двумерные интегрируемые нелинейные уравнения: Савады–Котера, Каупа–Купершмидта, система дисперсионных длинных волн, уравнение Нижника–Веселова–Новикова и модифицированное уравнение Нижника–Веселова–Новикова. Рассмотрены преобразования типа Миуры между нелинейными уравнениями в различных калибровках.

Ключевые слова: уравнение Савады–Котера, уравнение Каупа–Купершмидта, обобщенное уравнение дисперсионных длинных волн, уравнение Дэви–Стьюардсона, уравнение Нижника–Веселова–Новикова.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время фундаментальные методы, основанные на калибровочных преобразованиях и калибровочной инвариантности, широко распространены и используются в физике и математике, в частности в теории интегрируемых нелинейных уравнений. Применения этих методов в теории интегрируемых нелинейных уравнений впервые были предложены в работах [1]–[7] (см. также монографии [8]–[13] и соответствующие ссылки в них).

Установлено большое число калибровочно-эквивалентных пар интегрируемых моделей. В одномерном случае – это нелинейные уравнение Шредингера и уравнение ферромагнетика Гейзенберга, уравнения массивной модели Тирринга и двумерной релятивистской теории поля, уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) и модифицированное уравнение КдФ (мКдФ) и т.д. В двумерном случае наиболее известны следующие калибровочно-эквивалентные пары уравнений: уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) и модифицированное уравнение КП (мКП), уравнения Дэви–Стьюардсона и Ишимори и т.д. (см. ссылки в монографиях [8]–[14]).

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия.
E-mail: dubrovsky@academ.org, gramolin@gmail.com

Введем необходимые термины и покажем унифицирующую роль калибровочных преобразований и калибровочной инвариантности на хорошо известном примере взаимодействия заряженной бесспиновой частицы с внешним электромагнитным полем, имеющим векторный $\vec{A}(\vec{r}, t)$ и скалярный $\psi(\vec{r}, t)$ потенциалы:

$$i\hbar\psi_t = \frac{(\hat{p} - q\vec{A})^2}{2m} \psi + q\phi\psi, \quad (1.1)$$

где $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ – оператор импульса частицы. Взаимодействие частицы с внешними полями имеет хорошо известную калибровочно-инвариантную форму.

С точки зрения метода обратной задачи уравнение (1.1) является вспомогательной линейной задачей: линейным дифференциальным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами для волновой функции ψ . При калибровочном преобразовании

$$\psi \rightarrow \psi' = g^{-1}\psi, \quad \psi = g\psi' = \exp\left[\frac{i\chi(\vec{r}, t)q}{\hbar}\right]\psi', \quad (1.2)$$

уравнение (1.1) сохраняет свою форму, если потенциалы $\vec{A}$ и ϕ преобразуются следующим образом:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi + \chi_t. \quad (1.3)$$

Исключая калибровочную функцию χ из (1.3), получаем соотношения

$$[\vec{\nabla} \times \vec{A}'] = [\vec{\nabla} \times \vec{A}], \quad -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

означающие, что величины

$$\vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{\nabla} \times \vec{A}], \quad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

известные в электродинамике как индукция магнитного поля $\vec{B}$ и напряженность электрического поля $\vec{E}$, являются инвариантами калибровочных преобразований. Более того, из определений (1.5) для инвариантов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ вытекает подсистема уравнений

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.6)$$

которая является подсистемой (без источников) фундаментальной системы уравнений Максвелла. Таким образом, исходя из принципа локальной калибровочной инвариантности можно получить калибровочно-инвариантное нестационарное уравнение Шредингера для заряженной бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле, калибровочные инварианты $\vec{B}$, $\vec{E}$ и подсистему (без источников) фундаментальных уравнений Максвелла. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в случае интегрируемых нелинейных уравнений.

2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КП И МКП

Проиллюстрируем методы, основанные на калибровочной инвариантности, на хорошо известном примере интегрируемой системы нелинейных уравнений КП и МКП. Вспомогательные линейные задачи для уравнений КП и МКП являются частными случаями (калибровки $C(u_0 \neq 0, u_1 = 0)$ и $C(u_0 = 0, u_1 \neq 0)$ для КП и МКП соответственно) следующих линейных задач:

$$L_1\psi = (\sigma\partial_y + \partial_x^2 + u_1\partial_x + u_0)\psi = 0, \quad (2.1)$$

$$L_2\psi = (\partial_t + 4\partial_x^3 + v_2\partial_x^2 + v_1\partial_x + v_0)\psi = 0, \quad (2.2)$$

где значения константы σ , $\sigma = i$ ($\sigma^2 = -1$) и $\sigma = 1$ ($\sigma^2 = 1$), соответствуют случаям уравнений КП-I (МКП-I) и КП-II (МКП-II). Условие совместности в форме Лакса $[L_1, L_2] = 0$ в силу (2.1), (2.2) приводит к системе эволюционных уравнений для полевых переменных u_1 и u_0 [5], [7]:

$$\begin{aligned} u_{1t} + u_{1xxx} - \frac{3}{2}u_1^2u_{1x} - 3\sigma u_{1x}\partial_x^{-1}u_{1y} + 3\sigma^2\partial_x^{-1}u_{1yy} + \\ + 6u_{0xx} - 6\sigma u_{0y} + 6(u_0u_1)_x - 2v_{0x} = 0, \\ u_{0t} + 4u_{0xxx} + 6u_0u_{0x} + 6u_1u_{0xx} + \frac{3}{2}u_1^2u_{0x} + \\ + 3u_{0x}u_{1x} - 3\sigma u_{0x}\partial_x^{-1}u_{1y} - u_1v_{0x} - v_{0xx} - \sigma v_{0y} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В калибровке $C(u_0 \neq 0, u_1 = 0)$ и при выборе переменной $v_0 = 3u_{0x} - 3\sigma\partial_x^{-1}u_{0y}$ из системы (2.3) получается уравнение КП [1], [15]

$$u_{0t} + u_{0xxx} + 6u_0u_{0x} + 3\sigma^2\partial_x^{-1}u_{0yy} = 0. \quad (2.4)$$

В калибровке $C(u_0 = 0, u_1 \neq 0)$ и при выборе переменной $v_0 = \text{const}$ из системы (2.3) следует уравнение МКП:

$$u_{1t} + u_{1xxx} - \frac{3}{2}u_1^2u_{1x} - 3\sigma u_{1x}\partial_x^{-1}u_{1y} + 3\sigma^2\partial_x^{-1}u_{1yy} = 0. \quad (2.5)$$

Назовем систему уравнений (2.3) системой уравнений КП–МКП.

В терминах чисто калибровочной переменной ρ и инварианта w_0 калибровочных преобразований $\psi \rightarrow \psi' = g^{-1}\psi$, определяемых выражениями

$$u_1(x, y, t) = 2\frac{\rho_x}{\rho}, \quad w_0 = u_0 - \frac{1}{2}u_{1x} - \frac{1}{4}u_1^2 - \frac{\sigma}{2}\partial_x^{-1}u_{1y}, \quad (2.6)$$

система уравнений (2.3) принимает вид

$$\rho_t + 4\rho_{xxx} + 6\rho_x w_0 + 3\rho w_{0x} - 3\sigma\partial_x^{-1}w_{0y} - \rho v_0 = 0, \quad (2.7)$$

$$w_{0t} + w_{0xxx} + 6w_0w_{0x} + 3\sigma^2\partial_x^{-1}w_{0yy} = 0. \quad (2.8)$$

Система (2.7), (2.8) представляет собой явно калибровочно-инвариантную форму системы уравнений КП–МКП (2.3). Эта система имеет следующую структуру. Она

содержит калибровочно-инвариантное уравнение КП (2.8) для калибровочного инварианта w_0 и уравнение (2.7) для чисто калибровочной переменной ρ с добавлением слагаемых, содержащих калибровочный инвариант w_0 и дополнительную полевую переменную v_0 . При нулевом значении инварианта $w_0 = 0$ система КП–мКП (2.7), (2.8) сводится к линейному эволюционному уравнению для чисто калибровочной переменной ρ :

$$\rho_t + 4\rho_{xxx} - \rho v_0 = 0. \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.8) с помощью калибровочного инварианта w_0 получаем преобразование типа Миуры

$$w_0 = u_0 = -\frac{1}{2} u_{1x} - \frac{1}{4} u_1^2 - \frac{\sigma}{2} \partial_x^{-1} u_{1y}, \quad (2.10)$$

связывающее решения u_0 (в калибровке $C(u_0 \neq 0, u_1 = 0)$) и u_1 (в калибровке $C(u_0 = 0, u_1 \neq 0)$) уравнений КП (2.4) и мКП (2.5). Это вытекает также из уравнения (2.8), записанного в калибровках $C(u_0 \neq 0, u_1 = 0)$ и $C(u_0 = 0, u_1 \neq 0)$:

$$\begin{aligned} u_{0t} + u_{0xxx} + 6u_0 u_{0x} + 3\sigma^2 \partial_x^{-1} u_{0yy} = & -\frac{1}{2} (\partial_x + u_1 + \sigma \partial_x^{-1} \partial_y) \times \\ & \times \left(u_{1t} + u_{1xxx} - \frac{3}{2} u_1^2 u_{1x} - 3\sigma u_{1x} \partial_x^{-1} u_{1y} + 3\sigma^2 \partial_x^{-1} u_{1yy} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подчеркнем, что разделение физических и чисто калибровочных степеней свободы в интегрируемых нелинейных уравнениях и их калибровочно-инвариантная формулировка могут оказаться полезными для понимания структуры этих уравнений и связей между их различными реализациями, калибровочно-эквивалентными друг другу.

3. ЯВНО КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ КАУПА–КУПЕРШМИДТА И САВАДЫ–КОТЕРА

В этом разделе кратко обсуждаются результаты, полученные к настоящему времени, касающиеся явно калибровочно-инвариантной формулировки двумерных интегрируемых обобщений нелинейных уравнений Каупа–Купершмидта (2DKK) и Савады–Котера (2DCK). Вспомогательные линейные задачи для этих уравнений являются частными случаями (в калибровке $C(u_2 = 0, u_1 \neq 0, u_0 = u_{1x}/2)$ для 2DKK, в калибровке $C(u_2 = 0, u_1 \neq 0, u_0 = 0)$ для 2DCK) следующих задач [7]:

$$\begin{aligned} L_1 \psi &= (\sigma \partial_y + \partial_x^3 + u_2 \partial_x^2 + u_1 \partial_x + u_0) \psi = 0, \\ L_2 \psi &= (\partial_t + \kappa \partial_x^5 + v_4 \partial_x^4 + v_3 \partial_x^3 + v_2 \partial_x^2 + v_1 \partial_x + v_0) \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В терминах чисто калибровочной переменной ρ и инвариантов w_0, w_1 калибровочных преобразований $\psi \rightarrow \psi' = g^{-1} \psi$, заданных выражениями

$$u_2 = 3 \frac{\rho_x}{\rho}, \quad w_1 = u_1 - u_{2x} - \frac{1}{3} u_2^2, \quad (3.2)$$

$$w_0 = u_0 - \frac{1}{3} u_1 u_2 - \frac{1}{3} u_{2xx} + \frac{2}{27} u_2^3 - \frac{\sigma}{3} \partial_x^{-1} u_{2y}, \quad (3.3)$$

получается следующая явно калибровочно-инвариантная интегрируемая система нелинейных уравнений 2DKK–2ДСК:

$$\begin{aligned} \rho_t + \kappa \rho_{xxxxx} - \rho v_0 + \frac{5}{3} \kappa (\rho_{xx} w_1)_x + \frac{5}{3} \kappa (\rho_x w_0)_x + \frac{5}{9} \kappa \rho_x w_1^2 + \frac{10}{9} \kappa \rho_x w_{1xx} + \\ + \frac{10}{9} \kappa \rho w_{0xx} + \frac{10}{9} \kappa \rho w_0 w_1 - \frac{5}{9} \kappa \sigma \rho_x \partial_x^{-1} w_{1y} - \frac{5}{9} \kappa \sigma \rho \partial_x^{-1} w_{0y} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} w_{1t} - \frac{1}{9} \kappa w_{1xxxxx} - \frac{5}{9} \kappa (w_1 w_{1xx})_x - \frac{5}{3} \kappa (w_0 w_{1x})_x - \frac{5}{9} \kappa w_1^2 w_{1x} + \frac{10}{3} \kappa w_0 w_{0x} - \\ - \frac{5}{9} \kappa \sigma w_{1xxy} - \frac{5}{9} \kappa \sigma w_1 w_{1y} + \frac{5}{9} \kappa \sigma^2 \partial_x^{-1} w_{1yy} - \frac{5}{9} \kappa \sigma w_{1x} \partial_x^{-1} w_{1y} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} w_{0t} - \frac{1}{9} \kappa w_{0xxxxx} - \frac{5}{9} \kappa (w_0 w_1)_{xxx} - \frac{5}{9} \kappa (w_0 w_{1xx})_x + \frac{5}{3} \kappa (w_0 w_{0x})_x - \frac{5}{9} \kappa (w_0 w_1^2)_x - \\ - \frac{5}{9} \kappa \sigma w_{0xxy} - \frac{10}{9} \kappa \sigma w_0 w_{1y} - \frac{5}{9} \kappa \sigma w_1 w_{0y} + \frac{5}{9} \kappa \sigma^2 \partial_x^{-1} w_{0yy} - \frac{5}{9} \kappa \sigma w_{0x} \partial_x^{-1} w_{1y} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эта система состоит из калибровочно-инвариантной системы уравнений (3.5), (3.6) для калибровочных инвариантов w_0 , w_1 и уравнения (3.4) для чисто калибровочной переменной ρ с добавлением слагаемых, содержащих калибровочные инварианты w_0 , w_1 и дополнительную переменную v_0 . Для инвариантов с нулевыми значениями $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ система 2DKK–2ДСК (3.5), (3.6) сводится к линейному эволюционному уравнению для чисто калибровочной переменной ρ :

$$\rho_t + \kappa \rho_{xxxxx} - \rho v_0 = 0. \quad (3.7)$$

Калибровочно-инвариантная система уравнений (3.5), (3.6) для инвариантов w_0 и w_1 совпадает по форме с системой, полученной в работе [7]. Эта система допускает следующие редукции.

1. При $w_0 = 0$ для инварианта w_1 получается уравнение, в точности совпадающее с уравнением 2ДСК [7], [16].
2. При $w_0 = w_{1x}/2$ для инварианта w_1 получается уравнение, в точности совпадающее с уравнением 2DKK [7], [16].

Очевидно, что уравнения 2DKK и 2ДСК, как уравнения, принадлежащие различным наборам инвариантов, не являются калибровочно-эквивалентными друг другу.

4. ЯВНО КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ ДВУМЕРНАЯ ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА ДИСПЕРСИОННЫХ ДЛИННЫХ ВОЛН

Калибровочно-инвариантная формулировка интегрируемых систем нелинейных уравнений может быть получена во всех случаях, когда учтена калибровочная свобода в соответствующих вспомогательных линейных задачах. В работе [17] такая формулировка была получена для следующих вспомогательных линейных задач:

$$L_1 \psi = (\partial_{\xi\eta}^2 + u_1 \partial_\xi + v_1 \partial_\eta + u_0) \psi = 0, \quad (4.1)$$

$$L_2 \psi = (\partial_t + \kappa_1 \partial_\xi^2 + \kappa_2 \partial_\eta^2 + \tilde{u}_1 \partial_\xi + \tilde{v}_1 \partial_\eta + v_0) \psi = 0, \quad (4.2)$$

где κ_1, κ_2 – константы, $\xi = x + \sigma y$ и $\eta = x - \sigma y$ – пространственные переменные, $\sigma^2 = \pm 1$, и производные $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $\partial_\eta = \partial/\partial\eta$, $\partial_\xi^2 = \partial^2/\partial\xi^2$ и т.д. Такой выбор вспомогательных линейных задач (4.1), (4.2) приводит к известному двумерному обобщенному уравнению дисперсионных длинных волн (2D-ОДДВ) [18], системе уравнений Дэви–Стюардсона (ДС) [19], к их редукциям и к некоторым другим уравнениям. Все перечисленные известные интегрируемые нелинейные уравнения были получены ранее из условия совместности вспомогательных линейных задач (4.1), (4.2) в форме триадного представления Манакова [20]

$$[L_1, L_2] = BL_1. \quad (4.3)$$

Для явно калибровочно-инвариантной формулировки соответствующей интегрируемой системы нелинейных уравнений удобно использовать классические калибровочные инварианты w_2 , $\tilde{w}_2$ и w_1 ,

$$\begin{aligned} w_2 &\stackrel{\text{def}}{=} u_0 - u_{1\xi} - u_1 v_1 = u'_0 - u'_{1\xi} - u'_1 v'_1, \\ \tilde{w}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} u_0 - v_{1\eta} - u_1 v_1 = u'_0 - v'_{1\eta} - u'_1 v'_1, \\ w_1 &\stackrel{\text{def}}{=} u_{1\xi} - v_{1\eta} = u'_{1\xi} - v'_{1\eta}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

и чисто калибровочную переменную ρ , связанную с полевой переменной $u_1(\xi, \eta, t)$ следующим образом:

$$u_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\ln \rho)_\eta. \quad (4.5)$$

Переменная ρ соответствует чисто калибровочным степеням свободы и при калибровочных преобразованиях $\psi \rightarrow \psi' = g^{-1}\psi$ преобразуется по простому закону $\rho \rightarrow \rho' = g\rho$.

Отметим, что инварианты w_2 и $\tilde{w}_2$ первой вспомогательной задачи (4.1) являются инвариантами Лапласа $h = w_2$ и $k = \tilde{w}_2$ для соответствующего классического дифференциального уравнения (см., например, известную монографию Форсайта по дифференциальным уравнениям [21]).

В рассматриваемом случае со второй вспомогательной линейной задачей (4.2), задающей эволюцию во времени, соответствующая интегрируемая система нелинейных уравнений в терминах переменных ρ , w_1 и w_2 имеет вид

$$\rho_t = -\kappa_1 \rho_{\xi\xi} - \kappa_2 \rho_{\eta\eta} - 2\kappa_1 \rho \partial_\eta^{-1} w_{2\xi} + 2\kappa_2 \rho_\eta \partial_\xi^{-1} w_1 + v_0 \rho, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} w_{1t} = & -\kappa_1 w_{1\xi\xi} + \kappa_2 w_{1\eta\eta} - 2\kappa_1 w_{2\xi\xi} + 2\kappa_2 w_{2\eta\eta} - \\ & - 2\kappa_1 (w_1 \partial_\eta^{-1} w_1)_\xi + 2\kappa_2 (w_1 \partial_\xi^{-1} w_1)_\eta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$w_{2t} = \kappa_1 w_{2\xi\xi} - \kappa_2 w_{2\eta\eta} - 2\kappa_1 (w_2 \partial_\eta^{-1} w_1)_\xi + 2\kappa_2 (w_2 \partial_\xi^{-1} w_1)_\eta. \quad (4.8)$$

Калибровочно-инвариантная подсистема (4.7), (4.8) для инвариантов $w_1 = u_{1\xi} - v_{1\eta}$ и $w_2 = u_0 - u_{1\xi} - u_1 v_1$ системы уравнений (4.6)–(4.8) при $u_1 = 0$, $v_1 = -q/2$, $u_0 = (1 + r - q_\eta)/4$ в терминах переменных q , r принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} q_t = & -\kappa_1 \partial_\eta^{-1} r_{\xi\xi} + \kappa_2 r_\eta - \frac{\kappa_1}{2} (q^2)_\xi + \kappa_2 q_\eta \partial_\xi^{-1} q_\eta, \\ r_t = & -\kappa_1 q_\xi + \kappa_2 \partial_\xi^{-1} q_{\eta\eta} - \kappa_1 q_{\eta\xi\xi} + \kappa_2 q_{\eta\eta\eta} - \kappa_1 (rq)_\xi + \kappa_2 (r \partial_\xi^{-1} q_\eta)_\eta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для частного значения переменной $\kappa_2 = 0$ система уравнений (4.9) сводится к известной интегрируемой системе 2D-ОДДВ [18]:

$$\begin{aligned} q_{t\eta} &= -\kappa_1 r_{\xi\xi} - \frac{\kappa_1}{2} (q^2)_{\xi\eta}, \\ r_{t\xi} &= -\kappa_1 (qr + q + q_{\xi\eta})_{\xi\xi}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В одномерном пределе $\xi = \eta$ системы (4.9), $\kappa_1 - \kappa_2 = 1$, и (4.10), $\kappa_1 = 1$, сводятся к известному дисперсионному уравнению длинных волн (см., например, [22]), поэтому интегрируемую систему нелинейных уравнений (4.6)–(4.8) можно назвать 2D-ОДДВ.

В терминах переменных $\phi = \ln \rho$, w_1 и w_2 интегрируемая система (4.6)–(4.8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi_t &= -\kappa_1 \phi_{\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^2 - \kappa_2 (\phi_\eta)^2 - \\ &\quad - 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1} w_{2\xi} + 2\kappa_2 \phi_\eta \partial_\xi^{-1} w_1 + v_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} w_{1t} &= -\kappa_1 w_{1\xi\xi} - \kappa_2 w_{1\eta\eta} - 2\kappa_1 w_{2\xi\xi} + 2\kappa_2 w_{2\eta\eta} - \\ &\quad - 2\kappa_1 (w_1 \partial_\eta^{-1} w_1)_\xi + 2\kappa_2 (w_1 \partial_\xi^{-1} w_1)_\eta, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$w_{2t} = \kappa_1 w_{2\xi\xi} - \kappa_2 w_{2\eta\eta} - 2\kappa_1 (w_2 \partial_\eta^{-1} w_1)_\xi + 2\kappa_2 (w_2 \partial_\xi^{-1} w_1)_\eta. \quad (4.13)$$

В терминах переменных $\phi = \ln \rho$, w_2 и $\tilde{w}_2 = w_2 + w_1$ интегрируемая система (4.6)–(4.8) принимает более симметричную форму

$$\begin{aligned} \phi_t &= -\kappa_1 \phi_{\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^2 - \kappa_2 (\phi_\eta)^2 - \\ &\quad - 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1} w_{2\xi} + 2\kappa_2 \phi_\eta \partial_\xi^{-1} w_1 + v_0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} w_{2t} &= \kappa_1 w_{2\xi\xi} - \kappa_2 w_{2\eta\eta} - 2\kappa_1 (w_2 \partial_\eta^{-1} (\tilde{w}_2 - w_2))_\xi + \\ &\quad + 2\kappa_2 (w_2 \partial_\xi^{-1} (\tilde{w}_2 - w_2))_\eta, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{2t} &= -\kappa_1 \tilde{w}_{2\xi\xi} + \kappa_2 \tilde{w}_{2\eta\eta} - 2\kappa_1 (\tilde{w}_2 \partial_\eta^{-1} (\tilde{w}_2 - w_2))_\xi + \\ &\quad + 2\kappa_2 (\tilde{w}_2 \partial_\xi^{-1} (\tilde{w}_2 - w_2))_\eta. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Все рассмотренные эквивалентные друг другу интегрируемые системы 2D-ОДДВ нелинейных уравнений (4.6)–(4.8), (4.11)–(4.13) и (4.14)–(4.16) имеют следующую общую характерную калибровочную структуру:

а) содержат явно калибровочно-инвариантные подсистемы (4.7), (4.8) и (4.12), (4.13) нелинейных уравнений для калибровочных инвариантов w_1 и w_2 (или, эквивалентно, подсистему (4.15), (4.16) для калибровочных инвариантов w_2 , $\tilde{w}_2$);

б) включают уравнение (4.6) для чисто калибровочной переменной ρ (или уравнение (4.11) для переменной $\phi = \ln \rho$), имеющей простой закон преобразования $\rho \rightarrow \rho' = g\rho$, с добавлением слагаемых, содержащих калибровочные инварианты и дополнительную полевую переменную v_0 .

Такая структура системы 2D-ОДДВ отражает существующую калибровочную свободу во вспомогательных линейных задачах (4.1) и (4.2).

Рассмотрим некоторые частные калибровки установленных систем уравнений $2D$ -ОДДВ (4.6)–(4.8), (4.11)–(4.13) и (4.14)–(4.16). Калибровку в общем положении обозначим символом $C(u_1, v_1, u_0)$. В калибровке $C(u_1 = \phi_\eta, v_1 = \phi_\xi, u_0 = \phi_{\xi\eta} + \phi_\xi \phi_\eta)$, которая в силу определений инвариантов (4.4) соответствует нулевым значениям инвариантов w_1 и w_2 ,

$$w_1 = u_{1\xi} - v_{1\eta} = 0, \quad w_2 = u_0 - u_{1\xi} - u_1 v_1 = 0, \quad \tilde{w}_2 = 0, \quad (4.17)$$

система уравнений $2D$ -ОДДВ (4.14)–(4.16) сводится к двумерному уравнению Бюргера в потенциальной форме

$$\phi_t = -\kappa_1 \phi_{\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^2 - \kappa_2 (\phi_\eta)^2 + v_0, \quad (4.18)$$

или в терминах переменной ρ , связанной с преобразованием Хопфа–Коула $\phi = \ln \rho$, к линейному уравнению диффузии

$$\rho_t = -\kappa_1 \rho_{\xi\xi} - \kappa_2 \rho_{\eta\eta} + v_0 \rho. \quad (4.19)$$

В силу проведенного выше построения уравнение (4.18) (или (4.19)) является условием совместности вспомогательных задач (4.1) и (4.2) в форме Лакса

$$[L_1, L_2] = B(w_1)L_1 \equiv 0. \quad (4.20)$$

В другой простой калибровке $C(u_1 = \phi_\eta, v_1 = 0, u_0 = 0)$, в силу определений (4.4) соответствующей инвариантам

$$w_1 = \phi_{\xi\eta}, \quad w_2 = -\phi_{\xi\eta}, \quad \tilde{w}_2 = 0, \quad (4.21)$$

система уравнений $2D$ -ОДДВ (4.14)–(4.16) опять сводится к одному уравнению типа Бюргера в потенциальной форме:

$$\phi_t = \kappa_1 \phi_{\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^2 + \kappa_2 (\phi_\eta)^2 + v_0 + v_0 \rho. \quad (4.22)$$

Это уравнение линеаризуется с помощью преобразования Хопфа–Коула $\phi = -\ln \rho$ к соответствующему линейному уравнению

$$\rho_t = \kappa_1 \rho_{\xi\xi} - \kappa_2 \rho_{\eta\eta} - \rho v_0. \quad (4.23)$$

В калибровке $C(u_1 = 0, v_1 = -q\xi/q, u_0 = pq)$ инварианты w_1 , w_2 и $\tilde{w}_2$ в силу (4.4) даются выражениями

$$w_1 = (\ln q)_{\xi\eta}, \quad w_2 = u_0 = pq, \quad \tilde{w}_2 = pq + (\ln q)_{\xi\eta}, \quad (4.24)$$

при этом переменная ρ согласно (4.5) имеет постоянное значение, а переменная $\phi = 0$. Согласно (4.14) имеем для переменной v_0 :

$$v_0 = -2\kappa_1 \partial_\eta^{-1} w_{2\xi} = -2\kappa_1 \partial_\eta^{-1} (pq)_\xi. \quad (4.25)$$

Из системы уравнений $2D$ -ОДДВ (4.14)–(4.16) в рассматриваемом случае после некоторых вычислений получается известная система уравнений ДС [19] для переменных p и q :

$$\begin{aligned} p_t &= \kappa_1 p_{\xi\xi} - \kappa_2 p_{\eta\eta} + 2\kappa_1 p \partial_\eta^{-1}(pq)_\xi - 2\kappa_2 p \partial_\xi^{-1}(pq)_\eta, \\ q_t &= -\kappa_1 q_{\xi\xi} + \kappa_2 q_{\eta\eta} - 2\kappa_1 q \partial_\eta^{-1}(pq)_\xi + 2\kappa_2 q \partial_\xi^{-1}(pq)_\eta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В калибровке $C(u_1 = p_\eta, v_1 = q_\xi, u_0 = p_\eta q_\xi)$ в силу (4.4) инварианты в терминах переменных q и p имеют следующие выражения:

$$w_1 = p_{\xi\eta} - q_{\xi\eta}, \quad w_2 = -p_{\xi\eta}, \quad \tilde{w}_2 = -q_{\xi\eta}. \quad (4.27)$$

Подстановка w_1 , w_2 и $\tilde{w}_2$ из (4.27) в систему (4.14)–(4.16) приводит к трем уравнениям для переменных p и q . Из уравнения (4.14) при $\phi \equiv p$ вытекает первое уравнение

$$p_t = \kappa_1 p_{\xi\xi} - \kappa_2 p_{\eta\eta} - \kappa_1 (p_\xi)^2 + \kappa_2 (p_\eta)^2 - 2\kappa_2 p_\eta q_\eta + v_0. \quad (4.28)$$

Еще два уравнения следуют из уравнений (4.15), (4.16) для инвариантов w_2 , $\tilde{w}_2$ и в терминах переменных p , q имеют вид

$$p_t = \kappa_1 p_{\xi\xi} - \kappa_2 p_{\eta\eta} - \kappa_1 (p_\xi)^2 + \kappa_2 (p_\eta)^2 + 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1}(p_{\xi\eta} q_\xi) - 2\kappa_2 \partial_\xi^{-1}(p_{\xi\eta} q_\eta), \quad (4.29)$$

$$q_t = -\kappa_1 q_{\xi\xi} + \kappa_2 q_{\eta\eta} + \kappa_1 (q_\xi)^2 - \kappa_2 (q_\eta)^2 - 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1}(q_{\xi\eta} p_\xi) + 2\kappa_2 \partial_\xi^{-1}(q_{\xi\eta} p_\eta). \quad (4.30)$$

Уравнения (4.28) и (4.29) совместны при следующем выборе переменной v_0 :

$$v_0 = 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1}(p_{\xi\eta} q_\xi) + 2\kappa_2 \partial_\xi^{-1}(q_{\xi\eta} p_\eta). \quad (4.31)$$

В этом случае система трех уравнений (4.28)–(4.30) сводится к системе двух уравнений (4.29), (4.30), содержащей в нелокальных слагаемых производные $p_{\xi\eta} q_\xi$, $p_{\xi\eta} q_\eta$ и т. д.

Аналогично в калибровке $C(u_1 = p_\eta, v_1 = q_\xi, u_0 = 0)$ в силу (4.4) для инвариантов w_1 , w_2 и $\tilde{w}_2$ получаются выражения

$$w_1 = p_{\xi\eta} - q_{\xi\eta}, \quad w_2 = -p_{\xi\eta} - p_\eta q_\xi, \quad \tilde{w}_2 = -q_{\xi\eta} - p_\eta q_\xi. \quad (4.32)$$

Уравнение (4.11) при $\phi \equiv p$ с учетом (4.32) принимает вид

$$p_t = \kappa_1 p_{\xi\xi} - \kappa_2 p_{\eta\eta} - \kappa_1 (p_\xi)^2 + \kappa_2 (p_\eta)^2 - 2\kappa_2 p_\eta q_\eta + 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1}(p_\eta q_\xi)_\xi + v_0. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.12) после подстановки выражений для w_1 и w_2 из (4.32) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} p_t - q_t &= \kappa_1 (p + q)_{\xi\xi} - \kappa_2 (p + q)_{\eta\eta} - \kappa_1 (p_\xi - q_\xi)^2 + \\ &+ \kappa_2 (p_\eta - q_\eta)^2 + 2\kappa_1 \partial_\eta^{-1}(p_\eta q_\xi)_\xi - 2\kappa_2 \partial_\xi^{-1}(p_\eta q_\xi)_\eta. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Вычитая уравнение (4.34) из (4.33), получаем эволюционное уравнение для переменной q :

$$q_t = -\kappa_1 q_{\xi\xi} + \kappa_2 q_{\eta\eta} + \kappa_1 (q_\xi)^2 - \kappa_2 (q_\eta)^2 - 2\kappa_1 p_\xi q_\xi + 2\kappa_2 \partial_\xi^{-1}(p_\eta q_\xi)_\eta + v_0. \quad (4.35)$$

В силу (4.32) уравнение (4.13) для инварианта w_2 в терминах переменных p, q принимает вид

$$(p_{\xi\eta} + p_{\eta}q_{\xi})_t = \kappa_1(p_{\xi\eta} + p_{\eta}q_{\xi})_{\xi\xi} - \kappa_2(p_{\xi\eta} + p_{\eta}q_{\xi})_{\eta\eta} - \\ - 2\kappa_1((p_{\xi\eta} + p_{\eta}q_{\xi})(p_{\xi} - q_{\xi}))_{\xi} + 2\kappa_2((p_{\xi\eta} + p_{\eta}q_{\xi})(p_{\eta} - q_{\eta}))_{\eta}. \quad (4.36)$$

Уравнения (4.34)–(4.36) совместны друг с другом при выборе переменной v_0 , удовлетворяющей соотношению

$$v_{0\xi\eta} + p_{\eta}v_{0\xi} + q_{\xi}v_{0\eta} = 0. \quad (4.37)$$

При выборе переменной $v_0 \equiv 0$ из системы трех уравнений (4.34)–(4.36) получается следующая эквивалентная система двух уравнений:

$$p_t = \kappa_1 p_{\xi\xi} - \kappa_2 p_{\eta\eta} - \kappa_1 (p_{\xi})^2 + \kappa_2 (p_{\eta})^2 - 2\kappa_2 p_{\eta}q_{\eta} + 2\kappa_1 \partial_{\eta}^{-1}(p_{\eta}q_{\xi})_{\xi}, \\ q_t = -\kappa_1 q_{\xi\xi} + \kappa_2 q_{\eta\eta} + \kappa_1 (q_{\xi})^2 - \kappa_2 (q_{\eta})^2 - 2\kappa_1 p_{\xi}q_{\xi} + 2\kappa_2 \partial_{\xi}^{-1}(p_{\eta}q_{\xi})_{\eta}. \quad (4.38)$$

Впервые эта система уравнений была получена в другом контексте в работе [23].

В заключение настоящего раздела обсудим преобразования типа Миуры между различными системами нелинейных уравнений второго порядка ДС-типа, полученными выше в различных калибровках. Для удобства обозначим через $P \equiv p$ и $Q \equiv q$ решения системы нелинейных уравнений ДС (4.26). Используя инварианты w_1 и w_2 , получаем следующие соотношения между переменными P, Q системы ДС (4.26) и переменными p, q системы (4.29), (4.30):

$$w_1 = (\ln Q)_{\xi\eta} = p_{\xi\eta} - q_{\xi\eta}, \quad w_2 = PQ = -p_{\xi\eta}. \quad (4.39)$$

Из соотношения (4.39) находим соответствующее преобразование типа Миуры:

$$Q = e^{p-q}, \quad P = -p_{\xi\eta} e^{q-p}. \quad (4.40)$$

Совершенно аналогично для пары систем уравнений ДС-типа (4.26) и (4.38) получаем

$$w_1 = (\ln Q)_{\xi\eta} = p_{\xi\eta} - q_{\xi\eta}, \quad w_2 = PQ = -p_{\xi\eta} - p_{\eta}q_{\xi}. \quad (4.41)$$

Из (4.41) также следует преобразование типа Миуры между соответствующими решениями

$$Q = e^{p-q}, \quad P = -(p_{\xi\eta} + p_{\eta}q_{\xi})e^{q-p}. \quad (4.42)$$

Преобразования (4.40) и (4.42) позволяют получать решения известной системы уравнений ДС (4.26) из соответствующих решений систем уравнений (4.29), (4.30) и (4.38). Таким образом, эти преобразования являются преобразованиями типа Миуры между решениями калибровочно-эквивалентных друг другу систем уравнений второго порядка ДС-типа.

5. ЯВНО КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ СИСТЕМА ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ НИЖНИКА–ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА

Рассмотрим полученные недавно в работе [17] результаты, касающиеся калибровочно-инвариантной формулировки двумерных нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых с помощью следующих двух вспомогательных линейных задач:

$$L_1\psi = (\partial_{\xi\eta}^2 + u_1\partial_{\xi} + v_1\partial_{\eta} + u_0)\psi = 0, \quad (5.1)$$

$$L_2\psi = (\partial_t + \kappa_1\partial_{\xi}^3 + \kappa_2\partial_{\eta}^3 + u_2\partial_{\xi}^2 + v_2\partial_{\eta}^2 + \tilde{u}_1\partial_{\xi} + \tilde{v}_1\partial_{\eta} + v_0)\psi = 0, \quad (5.2)$$

где κ_1, κ_2 – константы, $\xi = x + \sigma y$ и $\eta = x - \sigma y$ – пространственные координаты, $\sigma^2 = \pm 1$.

С помощью условия совместности в форме триады Манакова [20] (см. (4.3)), вспомогательные линейные задачи (5.1), (5.2) приводят к установленным ранее и хорошо известным уравнениям Нижника–Веселова–Новикова (НВН) и другим [24]–[26] (см. также монографии [12], [13] и ссылки в них).

Удобные для калибровочно-инвариантной формулировки полевые переменные, классические инварианты w_2 , w_1 и чисто калибровочная переменная ρ задаются в рассматриваемом случае, как и для системы уравнений 2D-ОДДВ, формулами (4.4), (4.5). В случае вспомогательной линейной задачи (5.2) первый инвариант w_1 равен нулю ($w_1 \equiv 0$), и соответствующая интегрируемая система нелинейных уравнений [17] в терминах переменных ρ , w_2 имеет вид

$$\rho_t = -\kappa_1\rho_{\xi\xi\xi} - \kappa_2\rho_{\eta\eta\eta} - 3\kappa_1\rho_{\xi}\partial_{\eta}^{-1}w_2_{\xi} - 3\kappa_2\rho_{\eta}\partial_{\xi}^{-1}w_2_{\eta} + v_0\rho, \quad (5.3)$$

$$w_{2t} = -\kappa_1w_{2\xi\xi\xi} - \kappa_2w_{2\eta\eta\eta} - 3\kappa_1(w_2\partial_{\eta}^{-1}w_{2\xi})_{\xi} - 3\kappa_2(w_2\partial_{\xi}^{-1}w_{2\eta})_{\eta}. \quad (5.4)$$

В терминах переменных $\phi = \ln \rho$ и w_2 система уравнений (5.3), (5.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \phi_t = & -\kappa_1\phi_{\xi\xi\xi} - \kappa_2\phi_{\eta\eta\eta} - \kappa_1(\phi_{\xi})^3 - \kappa_2(\phi_{\eta})^3 - 3\kappa_1\phi_{\xi}\phi_{\xi\xi} - 3\kappa_2\phi_{\eta}\phi_{\eta\eta} - \\ & - 3\kappa_1\phi_{\xi}\partial_{\eta}^{-1}w_{2\xi} - 3\kappa_2\phi_{\eta}\partial_{\xi}^{-1}w_{2\eta} + v_0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$w_{2t} = -\kappa_1w_{2\xi\xi\xi} - \kappa_2w_{2\eta\eta\eta} - 3\kappa_1(w_2\partial_{\eta}^{-1}w_{2\xi})_{\xi} - 3\kappa_2(w_2\partial_{\xi}^{-1}w_{2\eta})_{\eta}. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.4) (или (5.6)) для калибровочного инварианта $w_2 = u_0 - u_1\xi - u_1v_1$ последних двух систем в точности совпадает по форме с известным уравнением НВН [24], [25]

$$u_t = -\kappa_1u_{\xi\xi\xi} - \kappa_2u_{\eta\eta\eta} - 3\kappa_1(u\partial_{\eta}^{-1}u_{\xi})_{\xi} - 3\kappa_2(u\partial_{\xi}^{-1}u_{\eta})_{\eta}. \quad (5.7)$$

Поэтому можно назвать интегрируемую систему (5.3), (5.4) (или (5.5), (5.6)) системой уравнений НВН.

Интегрируемая система уравнений НВН (5.3), (5.4) (или (5.5), (5.6)) имеет следующую калибровочную структуру:

а) явно калибровочно-инвариантное уравнение (5.4) (или (5.6)) для инварианта w_2 ;

б) уравнение (5.3) (или (5.5)) для чисто калибровочной переменной ρ (или ϕ) с некоторыми дополнительными слагаемыми, содержащими калибровочный инвариант w_2 и дополнительную полевую переменную v_0 из вспомогательной линейной задачи (5.2).

При $w_2 = 0$ система уравнений НВН (5.3), (5.4) (или (5.6), (5.7)) сводится к одному линейному уравнению

$$\rho_t = -\kappa_1 \rho_{\xi\xi\xi} - \kappa_2 \rho_{\eta\eta\eta} + v_0 \rho. \quad (5.8)$$

В терминах переменной $\phi = \ln \rho$ линейное уравнение (5.8) выглядит как уравнение Бюргерса третьего порядка

$$\phi_t = -\kappa_1 \phi_{\xi\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^3 - \kappa_2 (\phi_\eta)^3 - 3\kappa_1 \phi_\xi \phi_{\xi\xi} - 3\kappa_2 \phi_\eta \phi_{\eta\eta} + v_0, \quad (5.9)$$

которое линейризуется подстановкой $\phi = \ln \rho$ и, следовательно, является C -интегрируемым.

Обозначим символом $C(\phi, u_0, v_0)$ калибровку, соответствующую ненулевым полевым переменным $u_1 = \phi_\eta$, $v_1 = \phi_\xi$, u_0 и v_0 вспомогательных линейных задач (5.1), (5.2) и, следовательно, системе НВН (5.5), (5.6) в общем положении. В различных калибровках из системы НВН получаются различные калибровочно-эквивалентные друг другу интегрируемые нелинейные уравнения. Решения этих уравнений связаны преобразованиями типа Миуры.

Например, в калибровке $C(0, u_0, 0)$ система уравнений НВН (5.5), (5.6) сводится к известному уравнению НВН [24], [25] для полевой переменной u_0 :

$$u_{0t} = -\kappa_1 u_{0\xi\xi\xi} - \kappa_2 u_{0\eta\eta\eta} - 3\kappa_1 (u_0 \partial_\eta^{-1} u_{0\xi})_\xi - 3\kappa_2 (u_0 \partial_\xi^{-1} u_{0\eta})_\eta. \quad (5.10)$$

В другой калибровке $C(\phi, 0, v_0)$ система НВН (5.5), (5.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \phi_t = & -\kappa_1 \phi_{\xi\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^3 - \kappa_2 (\phi_\eta)^3 + \\ & + 3\kappa_1 \phi_\xi \partial_\eta^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\xi + 3\kappa_2 \phi_\eta \partial_\xi^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\eta + v_0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi\eta}^2 + \phi_\eta \partial_\xi + \phi_\xi \partial_\eta) \phi_t = & (\partial_{\xi\eta}^2 + \phi_\eta \partial_\xi + \phi_\xi \partial_\eta) [-\kappa_1 \phi_{\xi\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^3 - \\ & - \kappa_2 (\phi_\eta)^3 + 3\kappa_1 \phi_\xi \partial_\eta^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\xi + 3\kappa_2 \phi_\eta \partial_\xi^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\eta]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В силу (5.11), (5.12) система НВН (5.5), (5.6) сводится в калибровке $C(\phi, 0, v_0)$ к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \phi_t = & -\kappa_1 \phi_{\xi\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^3 - \kappa_2 (\phi_\eta)^3 + \\ & + 3\kappa_1 \phi_\xi \partial_\eta^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\xi + 3\kappa_2 \phi_\eta \partial_\xi^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\eta + v_0, \\ (\partial_{\xi\eta}^2 + \phi_\eta \partial_\xi + \phi_\xi \partial_\eta) v_0 = & 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

При $v_0 = 0$ система уравнений (5.13) переходит в известное модифицированное уравнение НВН (мНВН):

$$\begin{aligned} \phi_t = & -\kappa_1 \phi_{\xi\xi\xi} - \kappa_2 \phi_{\eta\eta\eta} - \kappa_1 (\phi_\xi)^3 - \kappa_2 (\phi_\eta)^3 + \\ & + 3\kappa_1 \phi_\xi \partial_\eta^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\xi + 3\kappa_2 \phi_\eta \partial_\xi^{-1} (\phi_\xi \phi_\eta)_\eta, \end{aligned} \quad (5.14)$$

полученное впервые в другом контексте в работе Конопельченко [26]. Отметим, что уравнение мНВН (5.14) отличается от уравнения мНВН, полученного в работе Богданова [27].

Новая система уравнений (5.13) также может быть названа системой уравнений мНВН.

Очевидно, решения u_0 и ϕ уравнений НВН (5.10) и мНВН (5.14) посредством калибровочного инварианта $w_2 = u_0 = -\phi_{\xi\eta} - \phi_{\xi}\phi_{\eta}$ (вычисленного в различных калибровках $C(0, u_0, 0)$ и $C(\phi, 0, 0)$) связаны преобразованием типа Миуры

$$u_0 = -\phi_{\xi\eta} - \phi_{\xi}\phi_{\eta}. \quad (5.15)$$

В одномерном пределе при совпадении производных $\partial_{\xi} = \partial_{\eta}$ уравнение мНВН (5.14) сводится к уравнению мКдФ в потенциальной форме

$$\phi_t = -\kappa \phi_{\xi\xi\xi} + 2\kappa(\phi_{\xi})^3, \quad (5.16)$$

где $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$. В терминах переменной $v_1 = \phi_{\xi}$ это уравнение мКдФ

$$v_{1t} = -\kappa v_{1\xi\xi\xi} + 6\kappa v_1^2 v_{1\xi}. \quad (5.17)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что идеи калибровочной инвариантности в настоящее время широко используются в теории интегрируемых нелинейных уравнений. Явно калибровочно-инвариантная формулировка интегрируемых систем нелинейных уравнений может быть приведена во всех случаях, когда в соответствующих вспомогательных линейных задачах должным образом учтена калибровочная свобода.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы Министерства науки и образования РФ “Развитие потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)” (грант № 2.1.1/1958) и Новосибирского государственного технического университета (грант по фундаментальным исследованиям 2008–2009 гг.).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функци, анализ и его прилож.*, **8:3** (1974), 43–53.
- [2] Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов, *ТМФ*, **30:3** (1977), 303–314.
- [3] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **74:6** (1978), 1953–1973.
- [4] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, *ТМФ*, **38:1** (1979), 26–35.
- [5] B. G. Konopelchenko, *Phys. Lett. A*, **92:7** (1982), 323–327.
- [6] B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky, *Phys. Lett. A*, **95:9** (1983), 457–462.
- [7] B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky, *Ann. Phys.*, **156:2** (1984), 265–302.
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [9] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [10] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

- [11] B. G. Konopelchenko, *Nonlinear Integrable Equations: Recursion Operators, Group-Theoretical and Hamiltonian Structures of Soliton Equations*, Lecture Notes in Phys., **270**, Springer, Berlin, 1987.
- [12] B. G. Konopelchenko, *Introduction to Multidimensional Integrable Equations: The Inverse Spectral Transform in $2 + 1$ Dimensions*, Plenum Press, New York, 1992.
- [13] B. G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions: Inverse Spectral Transform Method*, World Sci., Singapore, 1993.
- [14] B. G. Konopelchenko, C. Rogers, “Bäcklund and reciprocal transformations: gauge connections”, *Nonlinear Equations in the Applied Sciences*, Math. Sci. Engrg., **185**, eds. W. F. Ames, C. Rogers, Academic Press, New York, 1992, 317–362.
- [15] В. С. Дрюма, *Письма в ЖЭТФ*, **19**:12 (1974), 753–755.
- [16] B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky, *Phys. Lett. A*, **102**:1–2 (1984), 15–17.
- [17] V. G. Dubrovsky, A. V. Gramolin, *J. Phys. A*, **41**:27 (2008), 275208.
- [18] M. Boiti, J. J. P. Leon, F. Pempinelli, *Inverse Problems*, **3**:3 (1987), 371–387.
- [19] A. Davey, K. Stewartson, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **338**:1613 (1974), 101–110.
- [20] С. В. Манаков, *УМН*, **31**:5(191) (1976), 245–246.
- [21] A. R. Forsyth, *Theory of Differential Equations*, vol. VI, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1906.
- [22] L. J. F. Broer, *Appl. Sci. Res.*, **31**:5 (1975), 377–395.
- [23] B. G. Konopelchenko, *Inverse Problems*, **4**:1 (1988), 151–163.
- [24] Л. П. Низник, *ДАН СССР*, **254**:2 (1980), 332–335.
- [25] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24.
- [26] B. G. Konopelchenko, *Rev. Math. Phys.*, **2**:4 (1990), 399–440.
- [27] Л. В. Богданов, *ТМФ*, **70**:2 (1987), 309–314.