Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Факау, М. И. Карвальу, Устойчивость темных экран-
нирующих солитонов в светопреломляющих средах,
ТМФ, 2009, том 160, номер 1, 49–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:30:53

© 2009 г.

М. Факау*, М. И. Карвальу†

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕМНЫХ ЭКРАНИРУЮЩИХ СОЛИТОНОВ В СВЕТОПРЕЛОМЛЯЮЩИХ СРЕДАХ

Известно, что в светопреломляющих средах со смещением существуют светлые и темные солитоны. Светлые солитоны в этих средах всегда устойчивы, однако их темные аналоги неустойчивы при интенсивности выше некоторой фоновой и скорости ниже определенной критической. Критерий устойчивости и функция Вахитова–Колоколова использованы для точного определения области неустойчивых параметров. Кроме того, величина неустойчивости предсказана с помощью вычисления неустойчивых собственных значений и собственных мод методом функций Эванса. Результаты подтверждаются численным моделированием полного эволюционного уравнения.

Ключевые слова: светопреломляющая среда, темный солитон, устойчивость, функция Эванса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Светопреломляющие материалы поддерживают распространение самонаводящихся пучков, поскольку изменение показателя преломления, вызванное прохождением пучка, может оказаться достаточным для компенсации его дифракции. Такие пучки обычно называются светопреломляющими солитонами. Во всех случаях, когда эффект самонаведения развивается благодаря внешнему электрическому полю, эти солитоны называются экранирующими солитонами. Как яркие, так и темные экранирующие солитоны были предсказаны теоретически [1] и наблюдались экспериментально [2]–[4]. Яркие солитоны параметризуются максимальной амплитудой или мощностью, и все они устойчивы [5]. Темные солитоны параметризуются фоновой интенсивностью и скоростью или минимумом интенсивности [1], [6]. При относительно большой фоновой интенсивности существует критическая скорость, ниже которой темные солитоны неустойчивы. При рассмотрении серых солитонов

*Departamento de Física, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. E-mail: mfacao@ua.pt

†Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal

этот порог легко определить с помощью критерия устойчивости для темных солитонов [7], [8], однако применение этого критерия к черным солитонам (темным солитонам с нулевой минимальной интенсивностью) вызывает сложности при численных расчетах.

В настоящей работе мы исследуем устойчивость черных солитонов, используя значение функции Вахитова–Колоколова в нуле [9]. Величина неустойчивости исследуется с использованием метода функций Эванса для расчета неустойчивых собственных значений и собственных мод.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 вводится обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) для профиля темного солитона, фаза солитона и его общие характеристики. В разделе 3 найден порог устойчивости для черного и серого солитонов и использован метод функций Эванса для вычисления неустойчивых собственных значений и собственных мод. Затем в разделе 4 приведены результаты прямого численного решения уравнения, а раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Распространение темных пучков в смещенных светопреломляющих плоских волноводах моделируется с помощью уравнения [1]

$$iq_z + \frac{1}{2} q_{xx} + (1 + \rho) \frac{q}{1 + |q|^2} = 0. \quad (1)$$

Пучок распространяется вдоль оси z , а дифракция разрешена только вдоль оси x , которая совпадает с кристаллической осью c . Приведенное выше уравнение верно, если дрейф преобладает над переносом заряда, так что диффузией можно пренебречь. Данное условие выполнено для больших полей смещения и относительно больших пучков. Уравнение (1) допускает локализованные стационарные решения, соответствующие дырам на фоне постоянной интенсивности [1], [6], так что ненулевое граничное условие на бесконечности имеет вид

$$q \rightarrow \sqrt{\rho} e^{i(\theta_0 \pm S/2)}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (2)$$

где S – разность фаз вдоль оси x . Пусть $q(z, x) = \sqrt{\rho} y(\eta) e^{i\theta(z, \eta)}$ – решение уравнения (1), где $\eta = x - \omega z + \eta_0$, тогда фаза имеет вид

$$\theta(z, \eta) = z - \omega \int_0^\eta \frac{d\eta'}{y^2} + \omega\eta + \theta_0,$$

где $y(\eta)$ – вещественная неотрицательная функция такая, что $y(\eta) \leq 1$, $y(\eta) \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$, удовлетворяющая ОДУ

$$y'' + (\omega^2 - 2)y - \frac{\omega^2}{y^3} + (1 + \rho) \frac{2y}{1 + \rho y^2} = 0. \quad (3)$$

Профили $y(\eta)$ (см. рис. 1а) параметризуются с помощью ρ и ω так, что $\omega^2 < \rho/(1 + \rho)$. Минимум величины $y(\eta)$ равен $\sqrt{m}$, где m связано со скоростью ω соотношением

$$\omega^2 = \frac{2m}{1 - m} \left[\frac{1 + \rho}{\rho(1 - m)} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 + \rho m} \right) - 1 \right].$$

Рис. 1. Нормированный полевой профиль (а) и фазовый профиль (б) серых солитонов.

Заметим, что при $\omega = t = 0$ приведенная выше фаза и ОДУ описывают черный солитон. В этом случае для всех ρ разность фаз между обоими хвостами $q(x, z)$ равна π , и это имеет место при наличии разрыва у функции $\theta(z, \eta)$ при тех значениях η , когда $y = 0$. В общем случае разность фаз серых солитонов не равна π (рис. 1б). При малых ρ разность фаз для всех серых солитонов (всех $t > 0$) меньше π , однако при больших ρ и малых t (малых ω) разность фаз больше π (рис. 2). Такие солитоны обычно называются *более темными чем черные* солитонами.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Область устойчивости решений уравнения (1) можно определить, используя критерий устойчивости для темных солитонов, согласно которому пучок устойчив, пока не начнет выполняться условие $\partial P / \partial \omega > 0$ [7], [8], где P – перенормированный импульс, определяемый выражением

$$\begin{aligned} P &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (q_x^* q - q_x q^*) dx - \rho \operatorname{Arg} q|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \omega \rho \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 - 1) d\eta - \rho \operatorname{Arg} q|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из последнего выражения видно, что для неустойчивости темного солитона необходимо (но не достаточно), чтобы солитон был черным или более темным чем черный. Чтобы это доказать, рассмотрим случай $\omega > 0$, когда разность фаз отрицательна, так что второй член в (4) положителен. В пределе $\omega = 0$ первый член равен нулю и $P = \rho\pi$. Если ω удаляется от нуля, то первый член всегда отрицателен, так что он не может вносить вклад в увеличение P , поэтому только для солитонов, разность фаз которых по модулю превосходит π , может выполняться условие $\partial P / \partial \omega > 0$.

Важно понимать, что этот критерий лишь сообщает нам, является ли заданный солитон устойчивым или неустойчивым; зная величину производной, невозможно

Рис. 2. Модуль разности фаз как функция ρ и ω . Часть кривой для $\rho = 100$, показанная жирной линией, соответствует неустойчивым солитонам.

непосредственно получить величину неустойчивости, и для дальнейшего исследования этого вопроса необходимы альтернативные методы.

Рассмотрим далее линейные уравнения устойчивости, которые получены в предположении, что решение уравнения (1) есть сумма описанного выше темного решения и небольшого возмущающего члена:

$$q(z, x) = \sqrt{\rho} e^{i\theta(z, \eta)} [y(\eta) + \Delta(z, \eta)].$$

Подставляя такое решение в (1), получаем уравнение (3) в качестве приближения нулевого порядка, а также уравнение

$$\begin{aligned} i\Delta_z + \frac{1}{2}\Delta_{\eta\eta} - i\omega\frac{\Delta_{\eta}}{y^2} + i\omega\frac{\Delta y'}{y^3} + \left(\frac{\omega^2}{2} - 1 - \frac{\omega^2}{2y^4} + \frac{1+\rho}{1+\rho y^2}\right)\Delta - \\ - \frac{\rho(1+\rho)y^2}{(1+\rho y^2)^2}(\Delta + \Delta^*) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

в качестве приближения первого порядка. Для исследования спектральной устойчивости будем предполагать, что Δ экспоненциально зависит от z , т.е. $\Delta(z, \eta) = u(\eta)e^{i\lambda z} + v^*(\eta)e^{-i\lambda^* z}$ и $\Delta^*(z, \eta) = u^*(\eta)e^{-i\lambda^* z} + v(\eta)e^{i\lambda z}$. Подставляя эти выражения в предыдущее уравнение, мы приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где оператор L имеет вид

$$L = \sigma_3 \left(\frac{1}{2} \partial_{\eta\eta} + F(\eta) - G(\eta) \right) - i\sigma_2 G(\eta) + iI_2 \left(\frac{\omega y'}{y^3} - \frac{\omega}{y^2} \partial_{\eta} \right),$$

I_2 – единичная (2×2) -матрица, а σ_2 и σ_3 – матрицы Паули,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Функции $F(\eta)$ и $G(\eta)$ задаются как

$$F(\eta) = \frac{\omega^2}{2} - 1 - \frac{\omega^2}{2y^4} + \frac{1+\rho}{1+\rho y^2}, \quad G(\eta) = \frac{(1+\rho)\rho y^2}{(1+\rho y^2)^2}.$$

Стационарное решение является спектрально устойчивым, если точки спектра оператора L не имеют строго отрицательной мнимой части.

Из симметрии оператора L следует, что если λ – собственное значение, то $-\lambda$, λ^* и $-\lambda^*$ также являются собственными значениями. Согласно работе [10] непрерывный спектр оператора L лежит в областях, которые ограничены кривыми, определяемыми непрерывным спектром оператора L_∞ , где L_∞ обозначает оператор L при $\eta \rightarrow \infty$,

$$L_\infty = \sigma_3 \left(\frac{1}{2} \partial_{\eta\eta} - \frac{\rho}{1+\rho} \right) - i\sigma_2 \frac{\rho}{1+\rho} - iI_2 \omega \partial_\eta.$$

Поскольку непрерывный спектр оператора L_∞ – это $\mathbb{R}$, непрерывным спектром оператора L также является $\mathbb{R}$.

Вследствие симметрии оператора L относительно вещественной оси из существования хотя бы одного дискретного собственного значения следует наличие неустойчивости. Будем искать дискретные собственные значения с помощью стандартного метода функций Эванса. Пусть $Y = (u, u_\eta, v, v_\eta)^T$, тогда Y удовлетворяет уравнению

$$\frac{dY}{d\eta} = A(\eta, \lambda)Y, \quad (7)$$

где

$$A(\eta, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2(G - F - i\omega \frac{y'}{y^3} + \lambda) & 2i \frac{\omega}{y^2} & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2G & 0 & 2(G - F + i\omega \frac{y'}{y^3} - \lambda) & -2i \frac{\omega}{y^2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Будем обозначать матрицу $A(\eta, \lambda)$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$ через $A_\infty(\lambda)$ (предельная матрица не зависит от η). При этом система (7) преобразуется к системе ОДУ с постоянными коэффициентами, которая имеет решения вида $Y_r^\infty(\eta, \lambda) = y_r(\lambda)e^{r(\lambda)\eta}$, где $r(\lambda)$ – одно из собственных значений матрицы $A_\infty(\lambda)$, а $y_r(\lambda)$ – соответствующий собственный вектор. При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ имеются два значения r с положительной вещественной частью и два значения r с отрицательной вещественной частью. Обозначим их $r_{1,2}$ и $r_{3,4}$ соответственно. Система (7) имеет два ограниченных при $\eta \rightarrow -\infty$ решения, удовлетворяющих условиям $Y_{r_{1,2}}^-(\eta, \lambda) \sim Y_{r_{1,2}}^\infty$ при $\eta \rightarrow -\infty$, и два ограниченных решения при $\eta \rightarrow +\infty$, удовлетворяющих условиям $Y_{r_{3,4}}^+(\eta, \lambda) \sim Y_{r_{3,4}}^\infty$ при $\eta \rightarrow +\infty$.

Локализованные собственные функции, соответствующие дискретным собственным значениям, должны представлять собой линейные комбинации $Y_{r_1}^-(\eta, \lambda)$ и $Y_{r_2}^-(\eta, \lambda)$ (которые линейно порождают неустойчивое многообразие), а также линейные комбинации $Y_{r_3}^+(\eta, \lambda)$ и $Y_{r_4}^+(\eta, \lambda)$ (которые порождают устойчивое многообразие).

Рис. 3. Области устойчивости и неустойчивости и модули неустойчивых собственных значений в пространстве параметров (ρ, ω) .

Следуя работе [11], мы будем иметь дело с *внешним пространством* $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, где 2-вектор $U^-(\eta, \lambda) = Y_{r_1}^-(\eta, \lambda) \wedge Y_{r_2}^-(\eta, \lambda)$ представляет неустойчивое многообразие, а 2-вектор $U^+(\eta, \lambda) = Y_{r_3}^+(\eta, \lambda) \wedge Y_{r_4}^+(\eta, \lambda)$ – устойчивое многообразие. Величина λ является собственным значением в $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, если и только если $U^-(\lambda, \eta) \wedge U^+(\lambda, \eta) = 0$. Функция $\tilde{D}(\lambda, \eta) = U^-(\lambda, \eta) \wedge U^+(\lambda, \eta)$ не зависит от η и аналитична при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Здесь мы взяли

$$D(\lambda) = U^-(\lambda, 0) \wedge U^+(\lambda, 0)$$

в качестве нашей функции Эванса, нули которой являются собственными значениями оператора L . Определим нормированный вариант функции Эванса как

$$E(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{D_\infty}, \quad (9)$$

где D_∞ обозначает $\lim D(\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, соответственно $E(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Теперь можно найти неустойчивые собственные значения, используя функцию Эванса. Поскольку функция Эванса аналитична, существование неустойчивых собственных значений можно исследовать, вычисляя ее значения на бесконечной линии, проходящей параллельно вещественной оси очень близко к ней, и применяя принцип аргумента. При ρ и ω , находящихся внутри области неустойчивости, мы нашли одну пару собственных значений, расположенных симметрично относительно мнимой оси. Для фиксированного ρ при возрастании ω они выходят из некоторых точек $\pm bi$ (b – вещественное положительное число) и двигаются в сторону начала координат. Когда ω достигает границы устойчивости, они достигают начала координат. На рис. 3 с помощью градаций серого цвета представлены модули неустойчивых собственных значений. Коль скоро известны собственные значения, можно также определить соответствующие им собственные моды.

Заметим, что показанная на рис. 3 граница между областями устойчивости и неустойчивости для светопреломляющих темных солитонов согласуется с результатами, полученными путем непосредственного применения критерия устойчивости, т.е. с использованием условия $\partial P/\partial\omega = 0$. Придав окончательную форму некоторым противоречиям, связанным с возможностью определения производной $\partial P/\partial\omega$ при $\omega = 0$ и возможностью применения этой величины как критерия устойчивости для черных солитонов, авторы работы [12] недавно показали, что и то, и другое возможно. Хотя данный критерий можно использовать для всех темных светопреломляющих солитонов, его применение в случае черных солитонов вызывает некоторые численные трудности, связанные с фазовым интегралом в определении (4). Чтобы найти границы устойчивости для черных солитонов, мы выбрали альтернативный подход, предложенный в работе [9]. Начнем с предположения, что Δ и Δ^* задаются формулами

$$(\Delta + \Delta^*)(z, \eta) = U(\eta)e^{i\lambda z} + U^*(\eta)e^{-i\lambda^* z}, \quad (\Delta - \Delta^*)(z, \eta) = V(\eta)e^{i\lambda z} - V^*(\eta)e^{-i\lambda^* z},$$

и получим задачу на собственные значения для черных солитонов ($\omega = 0$)

$$L_0 V = 2\lambda U, \quad L_1 U = 2\lambda V,$$

где L_0 и L_1 – операторы Штурма–Лиувилля,

$$L_0 = \partial_{\eta\eta} - 2 + \frac{2(1 + \rho)}{1 + \rho y^2},$$

$$L_1 = \partial_{\eta\eta} - 2 + \frac{2(1 + \rho)}{1 + \rho y^2} - \frac{4\rho y^2(1 + \rho)}{(1 + \rho y^2)^2}.$$

Следуя той же процедуре, что использовалась в работе [13], определим функцию

$$g(\xi) = \langle y', (L_0 - \xi)^{-1} y' \rangle. \quad (10)$$

Черные солитоны неустойчивы, если $g(0) > 0$, и устойчивы в противоположном случае. В работе [12] было показано, что

$$g(0) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}.$$

Тем не менее численный расчет функции $g(0)$ более предпочтителен, чем численный расчет P вблизи $\omega = 0$.

Таким образом, чтобы определить знак функции $g(0)$, численно найдем $\psi(\eta)$ из $\psi(\eta) = L_0^{-1} y'$. Это можно сделать, решив уравнение

$$\psi'' - 2\psi + (1 + \rho) \frac{2\psi}{1 + \rho y^2} = y',$$

где ψ убывает при $\eta \rightarrow \pm\infty$. В результате находим знак $g(0)$ из равенства

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y'(\eta) \psi(\eta) d\eta.$$

Рис. 4. Эволюция неустойчивого солитона при $\rho = 100$ и $m = 0.001$ ($\omega = 0.0845$).

Следуя этой процедуре, получаем, что решение y_{black} устойчиво при $\rho \leq \rho_c$, где $\rho_c \approx 29.3$, и неустойчиво в других случаях. Эти результаты полностью согласуются с результатами, полученными путем применения условия устойчивости $\partial P / \partial \omega = 0$ в пределе очень малых ω .

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Мы проинтегрировали эволюционное уравнение (1) численно, используя метод распространения пучка, с уединенными волнами в качестве входных пучков. Полученные результаты численных расчетов находятся в хорошем согласии с нашими результатами, вытекающими из анализа устойчивости. Действительно, темные солитоны эволюционируют устойчивым образом, если значения параметров лежат внутри области устойчивости, и теряют устойчивость в других случаях, как показано на рис. 4 для солитона при $\rho = 100$ и $m = 0.001$. Более того, для относительно малых z возмущение неустойчивых солитонов экспоненциально растет в зависимости от расстояния распространения, причем скорость роста совпадает с модулем неустойчивого собственного значения.

Это иллюстрируется рис. 5, где показана эволюция максимума абсолютного значения возмущения для этого солитона, а также ожидаемая скорость роста, определяемая его неустойчивым собственным значением (приблизительно равным $-2.03i$). С другой стороны, наше численное моделирование также указывает, что возрастающие возмущения неустойчивых солитонов весьма схожи с соответствующими собственными функциями. Это ясно видно из рис. 6, где представлена неустойчивая собственная функция, связанная с солитоном, который мы рассматривали ранее, и возмущение, полученное путем численного моделирования для различных значений z . Для сравнения функции на рис. 6а нормированы на свои максимальные значения. Более того, интересно отметить, что, как можно заключить из нашего

Рис. 5. Скорость роста возмущения при $\rho = 100$ и $m = 0.001$, соответствующее неустойчивое собственное значение $\lambda \approx -2.03i$.

Рис. 6. Сравнение неустойчивых собственных функций и возмущений, полученных путем прямого интегрирования уравнения (1) для нескольких значений z . Результаты соответствуют серому солитону при $\rho = 100$ и $m = 0.001$: модуль (а) и фаза (б).

моделирования, неустойчивые солитоны эволюционируют в устойчивые по мере того, как излучается часть их энергии. Такая вызванная неустойчивостью динамика будет рассмотрена в отдельной работе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы определили область параметров, отвечающую устойчивости светопреломляющих экранирующих темных солитонов. При малых ρ ($\rho < \rho_c \approx 29.3$) все темные солитоны являются устойчивыми. Заметим, что в пределе малых ρ модель напоминает дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера, для которого все темные солитоны устойчивы. При $\rho > \rho_c$ имеется критическая скорость (зависящая

от ρ), ниже которой солитоны неустойчивы, а в противном случае они устойчивы. Используя метод функций Эванса, мы определили неустойчивые собственные значения и собственные моды линейной задачи на устойчивость собственных значений. Модуль неустойчивого собственного значения (величина неустойчивости) убывает в зависимости от ω при фиксированном ρ . Скорость роста и собственные моды находятся в разумном согласии с начальной эволюцией неустойчивости, наблюдаемой путем прямого численного решения полного уравнения.

Благодарности. Мы благодарны И. Барашенкову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] D. N. Christodoulides, M. I. Carvalho, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **12**:9 (1995), 1628–1633.
- [2] M. Shih, M. Segev, G. C. Valley, G. Salamo, B. Crosignani, P. di Porto, *Electron. Lett.*, **31**:10 (1995), 826–827.
- [3] M. Shih, P. Leach, M. Segev, G. Salamo, M. H. Garret, G. C. Valley, *Opt. Lett.*, **21**:5 (1996), 324–326.
- [4] G. C. Duree Jr., J. L. Shultz, G. J. Salamo, M. Segev, A. Yariv, B. Crosignani, P. di Porto, E. J. Sharp, R. R. Neurgaonkar, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:4 (1993), 533–536.
- [5] M. Facão, D. F. Parker, *Phys. Rev. E*, **68**:1 (2003), 016610.
- [6] A. G. Grandpierre, D. N. Christodoulides, T. H. Coskun, M. Segev, Y. S. Kivshar, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **18**:1 (2001), 55–63.
- [7] I. V. Barashenkov, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:7 (1996), 1193–1197.
- [8] Z. Lin, *Adv. Differential Equations*, **7**:8 (2002), 897–918.
- [9] L. Di Menza, C. Gallo, *Nonlinearity*, **20**:2 (2007), 461–496.
- [10] Д. Хенри, *Геометрическая теория полуминейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [11] J. Alexander, R. Gardner, C. Jones, *J. Reine Angew. Math.*, **410** (1990), 167–212.
- [12] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, *Z. Angew. Math. Phys.*, **59**:4 (2008), 559–599.
- [13] Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, *Изв. вузов. Сер. радиофизика*, **16**:7 (1973), 1020–1028.