Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Джианфреда, Д. Ландольфи, М. Дж. А. Парис, Проблема квантовой фазы для систем гармонического осциллятора и зависящего от времени осциллятора, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 59–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:38:47

© 2009 г.

М. Джанфреда*, Дж. Ландольфи*,
М. Дж. А. Парис†

ПРОБЛЕМА КВАНТОВОЙ ФАЗЫ ДЛЯ СИСТЕМ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассматриваются обобщенные измерения линейных мультимодовых операторов и обсуждается ряд аспектов, относящихся к построению операторов угла для произвольных квадратичных гамильтоновых систем путем вейль-упорядоченных разложений в терминах операторов координаты и импульса.

Ключевые слова: квантовый оператор угла, обобщенное измерение, система гармонического осциллятора, линейный мультимодовый оператор, гетеродинная регистрация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение обладающих хорошим поведением квантовых операторов фазы для гармонических систем является интригующей и сложной проблемой с самого начала развития квантовой механики; эту проблему пытались решить с использованием самых разных физических и математических подходов (см., например, [1]–[3]). Попытки удовлетворительного определения эрмитова оператора, удовлетворяющего каноническим коммутационным соотношениям с оператором Гамильтона (или, в общем случае, с оператором действия), привели к возникновению нескольких вопросов. Довольно быстро стало понятно, что существуют фундаментальные проблемы на пути к этой цели, особенно в свете предложения Дирака использовать схожее с полярным разложение для операторов мод с целью определения квантовых эрмитовых амплитуд и фаз, близких к их классическим аналогам, являющимся комплексными числами, согласно предписанию $\hat{a} = e^{i\hat{\phi}} \hat{N}^{1/2}$, где $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ [4]. Помимо необходимости учитывать периодичность фазовой переменной (свойство, которое несложно было бы установить, если выбрать область определения оператора по модулю 2π и ввести δ -функции для того, чтобы базисные канонические коммутационные соотношения выполнялись всюду, за исключением одной границы области определения), встречается еще одно препятствие, состоящее в том, что спектр оператора числа квантов $\hat{N}$

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento, Lecce, Italy. E-mail: landolfi@le.infn.it

†Dipartimento di Fisica, Università di Milano, Milano, Italy; CNISM, UdR Milano, Milano, Italy; Institute for Scientific Interchange Foundation, Torino, Italy.

не продолжается на отрицательные значения и оператор $e^{i\hat{\phi}}$ в действительности не унитарен. Более того, невозможно должным образом поделить обе части оператора типа $\hat{a} = \hat{u}\hat{N}^{1/2}$ на $\hat{N}^{1/2}$. Можно было бы вместо этого использовать $(\hat{N}^-)^{1/2}$, где оператор $\hat{N}^- = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|n\rangle\langle n|$ является псевдообратным к $\hat{N}$.

При рассмотрении путей преодоления запрета Паули (т.е. ситуации, когда не существует самосопряженного оператора, канонически сопряженного гамильтониану, если спектр гамильтониана ограничен снизу) было предложено и исследовано несколько концепций кратности квантовой фазы. Среди них имеется подход, основанный на идее расширить гильбертово пространство так, чтобы в нем присутствовали *состояния с отрицательными числами квантов* (недостижимые для физических систем). Этот подход был развит в работе [5], где было предложено реализовать эрмитов оператор фазы с помощью унитарного оператора $e^{i\hat{\phi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|$. С другой стороны, в работе [6] было выдвинуто предложение работать не с самим оператором, а с его периодическими функциями, вводя при этом анзац $\hat{E} \equiv (\hat{N} + 1)^{-1/2}\hat{a}$ для определения некоторого оператора $\hat{E}$, играющего роль аналога оператора $e^{i\hat{\phi}}$. При этом подходе явная потеря унитарности для $\hat{E}$ превращается в сужение области определения в гильбертовом пространстве. Внимание уделялось также определению квантовой фазы в рамках представления когерентных состояний [7].

В настоящей работе мы представим некоторые результаты, полученные при рассмотрении проблемы квантовой фазы с двух различных, хотя и связанных друг с другом точек зрения. Сначала в разделе 2 рассматриваются обобщенные измерения для мультибозонных линейных операторов. Напомним, что большинство недавних успехов в отношении квантовых операторов фазы было стимулировано исключительно важным замечанием о том, что самосопряженность в действительности налагает на концепцию наблюдаемой ограничение, не являющееся необходимым: квантовые наблюдаемые являются, вообще говоря, положительными операторнозначными мерами [8], и фазовые наблюдаемые определяются как положительные операторнозначные меры, преобразующиеся ковариантно при временных трансляциях [9]. В этой картине постулат квантовой механики о том, что измерению подлежат только наблюдаемые, соответствующие самосопряженным операторам, сохраняется в силу дилатационной теоремы Наймарка. При работе с квантовой переменной, для которой положительная операторнозначная мера не сводится к проекторнозначной мере, различные измерительные системы всегда дадут различные результаты. Так обстоит дело при рассмотрении фазы, и здесь отказываются от концепции *идеального* оператора квантовой фазы и вводят операторы, связанные с *возможными* (feasible) квантовыми фазами, определение которых основано на использовании процессов измерения¹⁾.

Раздел 2 нашей статьи основан на том, что формулировка проблемы квантовой фазы может опираться даже на использование распределений в фазовом пространстве, которые могли бы дать квантовые средние в виде, напоминающем классические средние. Всякий эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}$, для которого фазовое распре-

¹⁾ Тем не менее можно определить *каноническую* переменную фазы [10].

деление $P(\varphi) = \text{tr}[\delta(\hat{\phi} - \varphi)\hat{\rho}]$ сопоставляет правильную четко определенную фазу любому локализованному состоянию $\hat{\rho}$ с большой амплитудой, может быть выражен в виде оператора, получаемого из классической фазы путем прямого квантования переменных фазового пространства с добавлением некоторого правила упорядочения, например упорядочения по Вейлю. Подробное обсуждение применений этого подхода к модам стандартного гармонического осциллятора можно найти в работе [11]. Таким образом, естественно возникает вопрос о возможности использования данного подхода всякий раз, когда имеют дело, например, с зависящими от времени осцилляторами. Раздел 3 посвящен некоторым аспектам, следующим из ответа на данный вопрос.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ОПЕРАТОРЫ ФАЗЫ

Процесс измерения подразумевает взаимодействие между рассматриваемой системой и измерительным прибором. Можно измерять переменную, если она ассоциирована с самосопряженным оператором, определенным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P$ системы и испытательного устройства. Наблюдатель, живущий в $\mathcal{H}_S$, имеет доступ только к наблюдаемым с носителем в самом $\mathcal{H}_S$. Идея, лежащая в основе обобщенных измерений, состоит в расширении заданных на $\mathcal{H}_S$ операторов переменных до подходящих симметричных операторов в $\mathcal{H}$: при выполнении ортогонального измерения в $\mathcal{H}$ наблюдатель в $\mathcal{H}_S$ будет знать только о компонентах состояний в своем пространстве. Операторное описание измерения, ограниченного на $\mathcal{H}_S$, дается в терминах положительной операторнозначной меры, которая получается взятием следа спектральной меры расширенного оператора по степеням свободы испытательного устройства [8].

Простейший и наиболее актуальный в этом отношении пример дается измерениями возможной фотонной фазы в контексте *гетеродинной регистрации*. Гетеродинная регистрация придумана для того, чтобы выполнять совместные измерения двух сопряженных квадратур поля, получающихся посредством смешивания в светоделителе одномодового сигнального поля номинальной частоты ω_1 с локальным осцилляторным полем, частота которого ω_L слегка сдвинута на величину $\omega_I \ll \omega_1$ от частоты сигнала (см., например, монографию [12])²⁾. Фотодетектор располагается после светоделителя, и выходной фототок фильтруется на частоте ω_I . При стандартной оптической гетеродинной регистрации измерение фильтрованного фототока соответствует реализации квантового измерения нормального оператора $\hat{Z}_{SW} = a_1 + a_2^\dagger$, где $\hat{a}_1$ ($\hat{a}_2^\dagger$) – оператор уничтожения (рождения) фотона для входного (преобразованного) сигнала [13]. Измерение вещественной и мнимой частей выходного фототока обеспечивает одновременное измерение вещественной и мнимой частей оператора $\hat{Z}_{SW}$.

²⁾Для мод поля излучения простейшее двухмодовое взаимодействие дается линейным гамильтонианом смешивания $\hat{H} \propto (a_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 a_1^\dagger)$, соответствующим взаимодействию, которое имеет место в линейной оптической среде (светоделителе).

Таким образом, взаимодействие между входным сигналом и светоделительным аппаратом, во-первых, расширяет гильбертово пространство однофотонного сигнала до двухфотонного пространства $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{a_1} \otimes \mathcal{H}_{a_2}$ сигнала и его образа, а во-вторых, позволяет рассматривать состояния с “отрицательным числом” фотонов. Спектр оператора относительного числа квантов $\hat{N}_{12} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ в действительности неограничен, и на $\mathcal{H}_{12}$ существует унитарный оператор $\hat{D}_{12} = e^{i\hat{\phi}_{12}}$, удовлетворяющий соотношению $[\hat{D}_{12}, \hat{N}] = \hat{D}_{12}$. Этот оператор можно записать в виде [14]

$$\hat{D}_{12} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1, m\rangle \langle n, m|, \quad (2.1)$$

где $|n, m\rangle$ обозначает базисный элемент в представлении относительного числа состояний, т.е.

$$|n, m\rangle = \Theta(n) |m+n\rangle_{a_1} |m\rangle_{a_2} + \Theta(-n-1) |m\rangle_{a_1} |m-n\rangle_{a_2}, \quad (2.2)$$

$$\hat{N}_{12} |n, m\rangle = n |n, m\rangle, \quad (2.3)$$

где $-\infty < n < \infty$, $m \geq 0$, $\Theta(n) = 1$ при $n \geq 0$ и $\Theta(n) = 0$ при $n < 0$. Поскольку $[\hat{Z}_{\text{SW}}, \hat{Z}_{\text{SW}}^\dagger] = 0$, можно выполнить совместное измерение вещественной и мнимой частей оператора $\hat{Z}_{\text{SW}}$, что дает реализацию оператора возможной фазы Шапиро–Вигнера. Проблема измерения фазы таким образом сформулирована как оценка фазовых сдвигов, претерпеваемых квантовыми состояниями сигнала и его образа.

2.1. Операторы фазы на гетеродинной основе. Совсем иная ситуация возникает, если частота входного поля лежит за пределами оптического режима и взаимодействие между сигналом и светоделителем приводит к оператору, не являющемуся нормальным [15]:

$$\hat{Z}_\gamma = a_1 + \gamma a_2^\dagger, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega_1 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_1}} < 1, \quad [Z_\gamma, Z_\gamma^\dagger] = 1 - \gamma^2. \quad (2.4)$$

Коммутатор между операторными квадратурами измерения не обращается в нуль, $[\text{Re } \hat{Z}_\gamma, \text{Im } \hat{Z}_\gamma] = i(1 - \gamma^2)/2$, поэтому для их совместного измерения следует придумать другой аппарат. Для этого ищется расширение Наймарка оператора $\hat{Z}_\gamma$. Простейшее из таких расширений включает в себя одну дополнительную бозонную моду, скажем $\hat{a}_3$, и реализуется с помощью оператора

$$\hat{Z}_N = \hat{Z}_\gamma + \kappa \hat{a}_3^\dagger, \quad (2.5)$$

определенного на трехмодовом гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{a_1} \otimes \mathcal{H}_{a_2} \otimes \mathcal{H}_{a_3}$ и удовлетворяющего требованиям $\text{Tr}_a(\sigma a_3^\dagger) = 0$ и $\kappa^2 = 1 - \gamma^2$. Его можно построить, используя билинейные взаимодействия между модами и после этого измерение квадратур на выходе [16]. Оптические приборы ассоциируются с операторами эволюции вида

$$\hat{B}_{jk}(\theta_{jk}) = e^{-i\theta_{jk}(a_j a_k^\dagger + a_k a_j^\dagger)} \quad (2.6)$$

Схема аппарата для обобщенного измерения двухфотонного линейного оператора, не являющегося нормальным. Квадратуры $(\hat{A}_1 + \hat{A}_1^\dagger)/\sqrt{2}$ и $i(\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_2)/\sqrt{2}$ выходных мод подлежат измерению.

с трехмодовым делением, задаваемым параметрами

$$\theta_{12} = \arcsin \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad \theta_{13} = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{2}}, \quad \theta_{23} = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}},$$

которые далее подвергаются повороту на π (см. рисунок).

Таким образом, мы видим, что возможную фазу $\hat{\theta}_N$ для квазимонохроматического сигнала вполне можно определить в рамках данного Кейвсом описания гетеродина при условии, что для получения оператора измерения (2.5) вводится мода Наймарка. Эта фаза $\hat{\theta}_N$ получается из однозначного полярного разложения оператора (2.5). Коль скоро введен оператор разности числа квантов для трех мод оператора $\hat{N} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3$, коммутатор $[\hat{\theta}_N, \hat{N}] = i$ можно интерпретировать как каноническое сопряжение возможной фазы Кейвса $\hat{\theta}_N$ по отношению к $\hat{N}$.

Теперь нам понятно, как можно устроить обобщенное измерение оператора $\hat{Z}_\gamma$; далее следует проанализировать, какую роль играют приготовления состояний в статистике измерений при проведении конкретных экспериментов. Очевидно, в эксперименте можно в полной мере использовать допустимый произвол в приготовлении некоторых из мод. Подробности по поводу вычисления плотности вероятности на выходе при заданном начальном приготовлении $R_{12} \otimes \rho_3$ можно найти в работе [16]. Здесь мы просто отметим, что измерение оператора $\hat{Z}_\gamma$ на классе факторизованных сигналов вида $R_{12} = \varrho_1 \otimes |0\rangle_2 {}_2\langle 0|$, где ϱ_1 – приготовление моды a_1 в общем положении, а $|0\rangle_2$ – основное состояние моды a_2 , не приводит к добавлению шума по сравнению с измерением нормального оператора $\hat{a}_1 + \hat{a}_2$, а именно измерения квадратур поля сигнала в рамках стандартной оптической гетеродинной регистрации.

2.2. Мультибозонные линейные операторы. Аргументы, использованные выше для одной моды, можно распространить, по крайней мере в принципе, на системы общего вида. При этом для практической реализации одновременной регистрации сопряженных переменных требуется закодировать расширения Наймарка в устройстве эксперимента. Основную роль в квантовой теории информации играют взаимодействия, линейные и билинейные по модам полей, и их можно экспериментально реализовать в оптических и конденсированных системах. Поэтому на очереди стоит получение ясной картины возможных экспериментальных схем, позволяющих осуществить обобщенные измерения квадратур. Обобщенные измерения

мультимодовых линейных операторов

$$\widehat{Z}^{(m_1, m_2)} = \sum_{k_1=1}^{m_1} A_{k_1} \hat{a}_{k_1} + \sum_{k_2=1}^{m_2} B_{k_2} \hat{a}_{m_1+k_2}^\dagger, \quad (2.7)$$

где

$$[\widehat{Z}^{(m_1, m_2)}, \widehat{Z}^{(m_1, m_2)\dagger}] = \sum_{k_1=1}^{m_1} |A_{k_1}|^2 - \sum_{k_2=1}^{m_2} |B_{k_2}|^2 \neq 0, \quad (2.8)$$

обсуждаются в работе [17]. Наиболее экономный выбор для допустимого расширения Наймарка $\widehat{Z}_N^{(m_1, m_2)}$ снова состоит, очевидно, в добавлении к (2.7) всего одной моды посредством или оператора уничтожения, или оператора рождения, как это диктуется знаком коммутатора (2.8). В силу условия $[\widehat{Z}_N^{(m_1, m_2)}, \widehat{Z}_N^{(m_1, m_2)\dagger}] = 0$ наблюдаемую возможную фазу $\hat{\theta}^{(m_1, m_2)}$ для $\widehat{Z}^{(m_1, m_2)}$ можно без опасений определить как фазу одномодового расширенного оператора $\widehat{Z}_N^{(m_1, m_2)}$. Оператор $\hat{\theta}^{(m_1, m_2)}$ канонически сопряжен $(m_1 + m_2 + 1)$ -модовому оператору относительного числа квантов

$$\widehat{N} = \sum_{k=1}^{m_2+1} \widehat{N}_{m_1+k} - \sum_{k=1}^{m_1} \widehat{N}_{m_1+k}, \quad \widehat{N}_r = a_r^\dagger a_r.$$

Аналогично ранее рассмотренному случаю можно реализовать схему линейного усилителя для обобщенного измерения путем обработки всех мод (входной моды и моды Наймарка), которые линейно связаны с исходными, чтобы получить выходной сигнал, переносимый другим набором мод. Моды $\hat{a}_k$ взаимодействуют через унитарный оператор $\widehat{U}^{(m_1, m_2)}$, который осуществляет линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \vdots \\ \hat{A}_{m_1+m_2} \\ \hat{A}_{m_1+m_2+1} \end{pmatrix} = \widehat{U}_{(m_1, m_2)}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{m_1+m_2} \\ \hat{a}_N \end{pmatrix} \widehat{U}_{(m_1, m_2)} = M^{(m_1, m_2)} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{m_1+m_2} \\ \hat{a}_N \end{pmatrix}$$

($[\hat{A}_i, \hat{A}_j^\dagger] = \delta_{i,j} \hat{1}$). Что касается подлежащих измерению квадратур выходных мод, отождествление последовательности светоделителей, естественно обобщающих оптическую схему на рисунке, осуществляется путем наложения требования разложения (которое завершается вращением на π) оператора $\widehat{U}_{(m_1, m_2)}$:

$$\widehat{U}_{(m_1, m_2)} = \widehat{\mathfrak{B}}_{m+1, m} \widehat{\mathfrak{B}}_{m+1, m-1} \dots \widehat{\mathfrak{B}}_{m+1, 1} \widehat{\mathfrak{B}}_{m, m-1} \widehat{\mathfrak{B}}_{m, m-2} \dots \widehat{\mathfrak{B}}_{2, 1},$$

где

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{j, k} = \left[\widehat{B}_{j, k}(\theta_{j, k}) \prod_{s \neq j, k} \otimes \mathbb{I}_s \right], \quad \widehat{B}_{j, k}(\theta_{j, k}) = e^{-i\theta_{j, k}(\hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \hat{a}_j^\dagger)}.$$

Например, к схеме, изображенной на рисунке, можно прибегнуть для обобщенного измерения оператора

$$\widehat{Z}^{(2, 0)} = A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (2.9)$$

при условии, что светоделители имеют характеристики

$$\theta_{21}^{(2,0)} = \arcsin \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}, \quad \theta_{31}^{(2,0)} = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{32}^{(2,0)} = \frac{\pi}{2},$$

но та же последовательность светоделителей позволяет реализовать измерение квадратур оператора $\hat{Z}^{(2,0)\dagger}$ (0, 2)-типа, не требующее завершающего вращения на π . Содержанием дальнейших исследований должен стать поиск возможно более эффективных схем обобщенных измерений фазы, а также схем регистрации с целью выполнения обобщенных измерений для представляющих интерес нелинейных усилителей.

3. ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ ДЛЯ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Как уже отмечалось во введении, для эффективного рассмотрения проблемы определения подходящих операторов квантовой фазы использовались различные физические основания. Несмотря на то что основные концептуальные проблемы не решены и что требуется и далее сохранять осторожность, поскольку нелинейные канонические преобразования координат и импульсов в переменные действие–угол не являются, как правило, биективными³⁾, аргументы и эффективные средства, развитые для стандартного гармонического осциллятора, можно приспособить к более сложным системам, по крайней мере, в принципе. Имеет смысл более подробно рассмотреть случай зависящих от времени осцилляторов с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{m(t)\omega^2(t)q^2}{2} \quad (3.1)$$

ввиду их широкого распространения в физике. Переменные действие–угол для системы, описываемой данным гамильтонианом, принимают вид

$$J = \frac{m}{2\sqrt{\kappa}\sigma^2}q^2 + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{m}}p - \sqrt{m}\sigma q \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right)\right]^2, \quad (3.2)$$

$$\theta = \arctg\left\{\frac{\sigma^2}{\sqrt{\kappa}}\left[\frac{p}{mq} - \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right)\right]\right\}, \quad (3.3)$$

где κ – произвольная положительная постоянная, а функция $\sigma(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left[\omega^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2m} \frac{dm}{dt}\right) - \left(\frac{1}{2m} \frac{dm}{dt}\right)^2\right]\sigma = \frac{\kappa}{\sigma^3}. \quad (3.4)$$

Явное формальное представление в терминах операторов координаты и импульса для вейль-упорядоченного оператора квантового угла, связанного с зависящим от времени осциллятором, можно получить по аналогии с процедурой, использованной

³⁾Мы предполагаем, что операторы, с которыми мы здесь будем иметь дело, не приводят к неоднозначным интерпретациям.

в работе [18] для стандартного гармонического осциллятора. Это позволяет найти фундаментальный оператор угла в виде [19]

$$\hat{\theta}_W(\hat{q}, \hat{p}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{-k,k}(t) \hat{T}_{-k,k}(\hat{q}, \hat{p}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= \frac{\Delta}{J_{pp}} \operatorname{arctg} \tilde{J}_{qp}^{-1}, \\ \alpha_{-1-2k,1+2k} &= \frac{(-1)^k}{1+2k} \frac{\Delta}{J_{pp}} \left[-\frac{\tilde{J}_{qq}\Delta}{1+\tilde{J}_{qp}^2} \right]^{1+2k} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}-k, -k, \frac{1}{2}, -\tilde{J}_{qp}^2\right), \\ \alpha_{-2-2k,2+2k} &= (-1)^{k+1} \frac{\tilde{J}_{qp}\Delta}{J_{pp}} \left[-\frac{\tilde{J}_{qq}\Delta}{1+\tilde{J}_{qp}^2} \right]^{2+2k} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}-k, -k, \frac{3}{2}, -\tilde{J}_{qp}^2\right), \\ \Delta &= \frac{\sqrt{\kappa}}{2\sigma^2 \sqrt{\tilde{J}_{qq} - \tilde{J}_{qp}^2}}, \quad J_{pp} = \frac{\sigma^2}{2m\sqrt{\kappa}}, \\ \tilde{J}_{qp} &= -m \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right), \quad \tilde{J}_{qq} = \kappa \frac{m^2}{\sigma^4} + m^2 \left(\ln \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

и

$$\hat{T}_{-n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{q}^j \hat{p}^{-n} \hat{q}^{n-j}. \quad (3.7)$$

Для оператора, связанного с зависящим от времени квантовым углом осциллятора, формулы (3.5)–(3.7) дают его выражение через операторы координаты и импульса (определенные в начальный момент времени). Чтобы прояснить действие оператора $\hat{\theta}_W$ на квантовые состояния, а также выяснить, как на состояния влияет механизм потери когерентности, следует получить картину действия операторов $\hat{T}_{-n,n}$. Чтобы избежать проблем из-за их несамосопряженности на вещественной прямой, можно потребовать пространственный конфайнмент между двумя точками, скажем, положить $q \in [-\ell, \ell]$ ⁴⁾. Это можно обсуждать в свете недавно осуществленных пересмотров теоремы Паули и концепции канонической сопряженности (см. работу [22]), имея при этом в виду, что самосопряженный оператор, канонически сопряженный оператору координаты в ограниченной области, не является, вообще говоря, единственным. Для свободной частицы в ограниченной области известно, что непротиворечивым выбором будет любой оператор $\hat{p}^\gamma = -i\partial_q$, область определения которого задается векторами из области определения оператора координаты $\hat{q}$ с квадратично интегрируемыми первыми производными, нормы которых удовлетворяют симметричному граничному условию, например $\phi(-\ell) = e^{-2i\gamma}\phi(\ell)$ при $\gamma \in [0, 1)$ [22]. Тогда импульсная спектральная задача немедленно решается, что

⁴⁾Напомним, что для свободной частицы распределение Кийовски по временам прибытия и оператор времени Ааронова–Бома $\hat{T}_{-1,1}$ были формально связаны друг с другом как в рамках концепции положительной операторнозначной меры без предположения об ограниченности координаты [20], так и как предел распределения, получаемого ограничением координатной области на конечный вещественный интервал [21].

дает собственные векторы $e^{ip_{\gamma,k}q}/\sqrt{2}$ с собственными значениями $p_{\gamma,k} = \gamma + k\pi$. Для каждого допустимого значения параметра γ получается ограниченный и самосопряженный оператор обратного импульса (при $\gamma = 0$ расходящийся вклад от собственного значения с нулевым импульсом следует устранить “вручную”, как обычно). Из (3.5) можно соответственно получить самосопряженные операторы $\hat{T}_{-n,n}^\gamma$. Для системы, описываемой гамильтонианом (3.1) и заключенной в пределах конечной области изменения координаты, этот результат можно использовать, чтобы определить локальный самосопряженный оператор угла в достаточно малой окрестности начала координат (см., например, работы [23]) при симметричном ($\gamma = 0$), или антисимметричном ($\gamma \neq 0$) граничном условии для импульса. В этом отношении интересно исследовать свойства операторов $\hat{T}_{-n,n}^\gamma$, которым до сих пор уделялось мало внимания. В координатном представлении каждый из них принимает вид интегрального оператора Фредгольма:

$$\langle q' | \hat{T}_{-n,n}^\gamma | \psi \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} T_{-n,n}^\gamma(q' | q) \psi(q) dq. \quad (3.8)$$

В силу (3.5) прямое вычисление ядра оператора $T_{-n,n}^0$ дает, например,

$$\begin{aligned} T_{-n,n}^0(q' | q) = & \frac{[i\pi(q+q')]^n}{n!} B_n\left(\frac{q-q'}{2}\right) \Theta(q'-q) + \\ & + \frac{[-i\pi(q+q')]^n}{n!} B_n\left(\frac{q'-q}{2}\right) \Theta(q-q'), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $B_n(x)$ и $\Theta(x)$ обозначают многочлены Бернулли n -го порядка и ступенчатую функцию Хевисайда. Спектральная задача для операторов с ядром (3.9) принимает вид линейного дифференциального уравнения порядка $2n$, общие решения которого (вне зависимости от начальных и граничных условий) таковы:

$$\begin{aligned} \Psi_{-2,2}^0(q) = & \xi_{2,0} + \sum_{r=1}^3 \xi_{2,r} q^{r-1} F_{2,r}\left(-\frac{q^4}{16\ell\lambda_{-2,2}^0}\right), \\ \Psi_{-3,3}^0(q) = & \xi_{3,0} + \sum_{r=1}^5 \xi_{3,r} q^{r-1} F_{3,r}\left(-i\frac{q^6}{216\ell\lambda_{-3,3}^0}\right) \quad \text{и т.д.,} \end{aligned}$$

где $\xi_{n,m}$ – постоянные, $F_{n,m}$ – функции $(n, 2n-1)$ -гипергеометрического типа, а $\lambda_{-n,n}^0$ – собственные значения. Общее рассмотрение спектральной задачи для операторов $\hat{T}_{-n,n}^\gamma$ будет приведено в следующей работе.

Список литературы

- [1] P. Carruthers, M. M. Nieto, *Rev. Modern Phys.*, **40**:2 (1968), 411–440; J. Bergou, B. Englert, *Ann. Phys.*, **209**:2 (1991), 479–505; R. Lynch, *Phys. Rep.*, **256**:6 (1995), 367–436; D. T. Pegg, S. M. Barnett, *J. Modern Opt.*, **44**:2 (1997), 225–264.
- [2] V. Perinova, A. Luks, J. Perina (eds.), *Phase in Optics*, World Sci., Singapore, 1998.
- [3] D. A. Dubin, M. A. Hennings, T. B. Smith, *Mathematical Aspects of Weyl Quantization and Phase*, World Sci., Singapore, 2000.

- [4] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **114**:767 (1927), 243–265.
- [5] D. T. Pegg, S. M. Barnett, *Phys. Rev. A*, **39**:4 (1989), 1665–1675.
- [6] L. Susskind, J. Glogower, *Physics*, **1** (1964), 49–61.
- [7] H. Paul, *Fortschr. Phys.*, **22**:11 (1974), 657–689.
- [8] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, Наука, М., 1980.
- [9] P. Lehti, J.-P. Pellonpää, *J. Math. Phys.*, **40**:10 (1999), 4688–4698.
- [10] M. G. A. Paris, *Nuovo Cimento B*, **111**:9 (1996), 1151–1159; *Fizika B*, **6**:2 (1997), 63–74.
- [11] A. Royer, *Phys. Rev. A*, **53**:1 (1996), 70–108.
- [12] A. Ferraro, S. Olivares, M. G. A. Paris, *Gaussian States in Quantum Information*, Napoli Ser. Phys. and Astrophys., Bibliopolis, Napoli, 2005.
- [13] J. H. Shapiro, S. S. Wagner, *IEEE J. Quantum Electron*, **20**:7 (1984), 803–813.
- [14] M. Ban, *Phys. Rev. A*, **50**:3 (1994), 2785–2787.
- [15] C. M. Caves, *Phys. Rev. D*, **26**:8 (1982), 1817–1839.
- [16] M. Paris, G. Landolfi, G. Soliani, *J. Phys. A*, **40**:26 (2007), F531–F537.
- [17] G. Landolfi, M. G. A. Paris, *Generalized measurement of non normal multiboson operators by minimal linear coupling*, preprint, 2008.
- [18] C. M. Bender, G. V. Dunne, *Phys. Rev. D*, **40**:8 (1989), 2739–2742; **40**:10, 3504–3511.
- [19] G. Landolfi, *J. Phys. A*, **41** (2008), 185302.
- [20] R. Giannitrapani, *Internat. J. Theor. Phys.*, **36**:7 (1997), 1575–1584.
- [21] E. A. Galapon, F. Delgado, J. Gonzalo Muga, I. Egusquiza, *Phys. Rev. A*, **72**:4 (2005), 042107.
- [22] E. A. Galapon, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **458**:2018 (2002), 451–472; **458**:2027, 2671–2689.
- [23] E. A. Galapon, *J. Math. Phys.*, **45**:8 (2004), 3180–3215; E. A. Galapon, R. F. Caballar, R. T. Bahague Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **93**:18 (2004), 180406.