Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Хен, М. Карлинер, Решеточная структура бэйби-скирмионов, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 69–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:16:28

© 2009 г.

И. Хен*, М. Карлинер*

РЕШЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА БЭЙБИ-СКИРМИОНОВ

Исследуется решеточная структура бэйби-скирмионов при нулевой температуре с использованием численного алгоритма, производящего минимизацию по всем полям. Бэйби-скирмионы помещаются внутрь различных единичных ячеек, имеющих форму параллелограмма, после чего налагаются периодические граничные условия. Получено, что минимальная энергия достигается на шестиугольной решетке и что в данной конфигурации скирмион расщепляется на четверть-скирмионы. В частности, энергия в случае шестиугольной решетки оказывается ниже, чем в хорошо исследованном случае прямоугольной решетки, где наблюдается расщепление на полускирмионы.

Ключевые слова: бэйби-скирмион, скирмион, кристаллическая структура.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Скирма [1] представляет собой $SU(2)$ -значную нелинейную теорию адронов в размерности $3 + 1$ с топологическими солитонными решениями, называемыми скирмионами. Кроме кинетического члена, лагранжиан модели содержит “скирмионный” член, имеющий четвертый порядок по производным и вводящий в модель масштабный параметр [2]. Существование устойчивых решений в модели Скирма является следствием нетривиальной топологии отображений $\mathcal{M}$ физического пространства в пространство полей при фиксированном времени, $\mathcal{M}: S^3 \rightarrow SU(2) \cong S^3$, где физическое пространство $\mathbb{R}^3$ компактифицируется до S^3 с помощью наложения требования эквивалентности всех направлений на пространственной бесконечности. Топология, которая возникает из этой одноточечной компактификации, позволяет объединить эти отображения в классы эквивалентности, в каждом из которых имеется единственная сохраняющаяся величина, называемая топологическим зарядом.

В размерности $2 + 1$ модель Скирма имеет аналог, известный как бэйби-модель Скирма; она также допускает устойчивые полевые конфигурации солитонной природы [3]. Из-за меньшей размерности эта модель представляет собой упрощенный вариант исходной модели; тем не менее она имеет и самостоятельное физическое значение, связанное с несколькими приложениями к системам с квантовым эффектом

*Raymond and Beverly Sackler School of Physics and Astronomy, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel. E-mail: itayhe@post.tau.ac.il, marek@proton.tau.ac.il

Холла, в которых бэйби-скирмионы возникают как низкоэнергетические возбуждения основного состояния вблизи ферромагнитных чисел заполнения [4]–[9].

Таргет-многообразие в бэйби-модели Скирма описывается трехмерным вектором $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, на который наложена связь $\phi \cdot \phi = 1$. По аналогии с $(3+1)$ -мерным случаем область $\mathbb{R}^2$ определения этой модели компактифицируется до S^2 , что приводит к топологии, на основании которой можно разбить полевые конфигурации этой модели на классы с сохраняющимися топологическими зарядами. Плотность лагранжиана бэйби-модели Скирма состоит из кинетического, скирмионного и потенциального членов:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi - \frac{\kappa^2}{2} [(\partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi)^2 - (\partial_\mu \phi \cdot \partial_\nu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi \cdot \partial^\nu \phi)] - U(\phi_3). \quad (1)$$

Если в размерности $3+1$ последнее слагаемое можно включать или не включать [10], то в $(2+1)$ -мерной модели его присутствие необходимо для устойчивости решений. Однако за исключением требования обращения потенциала в нуль на бесконечности для заданного вакуумного значения поля (обычно выбираемого в виде $\phi^{(0)} = (0, 0, 1)$) точный вид потенциала является произвольным, что приводит к богатому семейству возможных бэйби-моделей Скирма.

В литературе подробно исследовались модели с несколькими конкретными потенциалами [3], [11]–[17]. Простейшей является голоморфная модель, в которой $U(\phi_3) = \mu^2(1 - \phi_3)^4$, при этом известно, что устойчивые решения имеются только в секторе с зарядом единица [11]–[13]. Широко изучалась также модель с потенциалом $U(\phi_3) = \mu^2(1 - \phi_3)$ (обычно называемая “старой” моделью). Этот потенциал приводит к сильно структурированным устойчивым мультискирмионам без вращательной симметрии [3], [14]. Для однопараметрического семейства потенциалов $U = \mu^2(1 - \phi_3)^s$ недавно были найдены многосолитонные решения, которые дают интерполяцию между “старым” и голоморфным потенциалами [17].

В секторе с зарядом единица устойчивые решения с вращательной симметрией существуют при всех значениях s , но скирмионная энергия как функция s не монотонна: она достигает минимума при $s \approx 2.2$ (см. рис. 1).

В секторе с зарядом два также было установлено существование устойчивых решений, но только при $s < 2$. Они имеют вращательную симметрию и подобны кольцам, что соответствует двум скирмионам с зарядом единица, расположенным один над другим. Как и для скирмиона с зарядом единица, энергия скирмиона с зарядом два также имеет минимум по s при $s \approx 1.3$. Как показано на рис. 1, при $s \approx 2$ энергия кольцеподобной конфигурации достигает значения удвоенной энергии скирмиона с зарядом единица, и устойчивые конфигурации более не существуют. Начиная с этого момента скирмион распадается на составляющие его скирмионы с зарядом единица, которые в свою очередь начинают удаляться друг от друга. Контурные графики распределения энергии для скирмиона с зарядом два показаны на рис. 2 для двух значений параметра s . На этом и последующих контурных рисунках чем больше значение величины, отображаемой на графике, тем светлее тон. Если при $s = 1.5$ существует кольцеподобная устойчивая конфигурация (см. рис. 2а), то при

Рис. 1. Полная энергия (деленная на $4\pi B$) скирмионов с зарядом единица ($\blacklozenge$), с зарядом два ($\blacksquare$) и с зарядом три ($\diamond$) как функция параметра s потенциала U при разных значениях κ ($\mu^2 = 0.1$). Каждый из графиков энергии имеет минимум при некотором s . При $s \approx 2$ энергия на единицу топологического заряда для решений с зарядом два и зарядом три достигает (снизу) энергии решения с зарядом единица, и устойчивых решений более не наблюдается.

$s = 2.6$ скирмион распадается на части. Последний случай показан на рис. 2б, который соответствует продолжающемуся увеличению расстояния между отдельными скирмионами.

Как и в случае скирмионов с зарядом два, существование устойчивых скирмионов с зарядом три также зависит от s . При значениях выше $s \approx 2$ не существует устойчивых решений с зарядом три; энергия скирмиона становится больше, чем утроенная энергия скирмиона с зарядом единица, и устойчивые конфигурации более не реализуются. Это показано на рис. 3, где приведены контурные графики распределения энергии для скирмиона с зарядом три при разных значениях s . При $s = 0.5$ (рис. 3а) решение имеет вращательную симметрию, а при $s = 0.75$ и $s = 1$ (рис. 3б и 3в соответственно) вращательная симметрия решения нарушена. При $s = 3$ устойчивых решений не существует. Последний случай показан на рис. 3г,

Рис. 2. Контурные графики распределений энергии для скирмиона с зарядом два ($\kappa^2 = 1$, $\mu^2 = 0.1$). При $s < 2$ существуют кольцеподобные конфигурации с вращательной симметрией, соответствующие двум скирмионам с зарядом единица, расположенным один над другим (а). При $s > 2$ скирмион с зарядом два распадается на два скирмиона с зарядом единица, расходящиеся на бесконечное расстояние (б).

Плотность энергии

Рис. 3. Плотности энергии и контурные графики для скирмионов с зарядом три при различных s ($\kappa^2 = 0.01$, $\mu^2 = 0.1$). При $s = 0.5$ (а) конфигурация с минимальной энергией вращательно симметрична, что соответствует трем скирмионам с зарядом единица, расположенным один над другим. При $s = 0.75$ (б) и $s = 1$ (в) решения демонстрируют только $\mathbb{Z}(2)$ -симметрию, что соответствует частично перекрывающимся скирмионам с зарядом единица. При $s = 3$ (г) устойчивых решений не существует.

он соответствует дальнейшему увеличению расстояния между отдельными скирмионами. Энергия скирмиона с зарядом три также имеет минимум по s при $s \approx 1.5$ (см. рис. 1).

Итак, установлено, что точный вид потенциального члена в бэйби-модели Скирма оказывает решающее влияние на существование и устойчивость решений. В частности, показатель в потенциальном члене (параметр s) играет роль “управляющего” параметра для интенсивности притяжения (малые значения s) или отталкивания (большие значения s) между отдельными скирмионами.

2. РЕШЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА БЭЙБИ-СКИРМИОНОВ

В данном разделе мы следуем работе [18]. В качестве низкоэнергетической эффективной теории адронов модель Скирма использовалась для описания систем из нескольких нуклонов, кроме того, она применялась при рассмотрении ядерной и кварковой материи [19]–[21]. Одним из наиболее сложных аспектов физики адронов является поведение фазовой диаграммы адронной материи при конечной плотности и низкой или даже нулевой температуре. Свойства скирмионов на решетке при нулевой температуре представляют интерес отчасти ввиду того, что поведение ядерной материи при больших плотностях в настоящее время привлекает к себе значительное внимание. При описании в рамках стандартной модели Скирма при нулевой температуре кристалл нуклонов превращается в кристалл полунуклонов при конечной плотности [22]–[26].

Для исследования скирмионных кристаллов на поле Скирма налагают периодические граничные условия и работают в пределах единичной ячейки (см. книгу [10]). В работе [22] была предпринята первая попытка построения кристалла с использованием простой кубической решетки скирмионов, симметрии которой делают максимальным притяжение между ближайшими соседями. Предлагались и другие симметрии, приводящие к несколько меньшей, но не минимальной энергии кристаллов [23], [24]. В настоящее время понятно, что лучше всего исходно расставить скирмионы в гранецентрированную кубическую решетку, а их ориентации выбрать симметричными, чтобы обеспечить максимальное притяжение между всеми ближайшими соседями [25], [26].

Бэйби-модель Скирма изучалась также в связи со скирмионными решетками различной структуры [27]–[29]; известно также, что бэйби-скирмионы расщепляются на полускирмионы, когда их помещают внутри прямоугольной решетки [29]. Однако к настоящему моменту не известно, приводят ли в прямоугольнике периодические граничные условия к конфигурациям с энергией, минимальной по всем возможным типам решеток, или же имеются другие, непрямоугольные бэйби-скирмионные решеточные конфигурации, которые имеют меньшую энергию. Поиск ответов на эти вопросы особенно важен как ввиду их актуальности для систем с квантовым эффектом Холла в двумерном пространстве, так и потому, что их можно использовать при построении гипотез о кристаллической структуре нуклонов в трехмерном пространстве.

Ниже мы найдем кристаллическую структуру бэйби-скирмионов, помещая их внутри различных параллелограммов с периодическими граничными условиями, при этом будем искать конфигурации с энергией, минимальной по всем параллелограммам с фиксированной площадью (тем самым плотность скирмионов будет оставаться фиксированной) [30]. Мы покажем, что существует параллелограмм определенного типа, а именно отвечающий шестиугольной решетке, для которого конфигурация имеет минимальную энергию. В частности, эта энергия ниже, чем энергия известной конфигурации из квадратных ячеек, в которой скирмион расщепляется на полускирмионы. Как будет указано ниже, обнаруженная нами шестиугольная структура не уникальна для данной модели, но возникает и в других солитонных моделях, таких как вихри Гинзбурга–Ландау [31], системы с квантовым эффектом Холла [5], [6] и даже в контексте трехмерных скирмионов [32]. Причина такого положения дел обсуждается в заключительном разделе.

3. БЭЙБИ-СКИРМИОНЫ ВНУТРИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Статическими решениями бэйби-модели Скирма являются те полевые конфигурации, которые в каждом топологическом секторе минимизируют функционал энергии

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} dx dy ((\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2 + \kappa^2 (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)^2 + 2\mu^2 (1 - \phi_3)). \quad (2)$$

Это можно получить непосредственно в случае плотности лагранжиана (1), где используется потенциал “старой” модели. В нашем подходе интегрирование ведется по параллелограммам

$$\Lambda = \{\alpha_1(L, 0) + \alpha_2(sL \sin \gamma, sL \cos \gamma); \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1\}, \quad (3)$$

где L – длина одной стороны параллелограмма, sL при $0 < s \leq 1$ – длина другой его стороны, а $0 \leq \gamma < \pi/2$ – угол между стороной длины sL и нормалью к стороне длины L . Каждый параллелограмм задается, таким образом, набором параметров $\{L, s, \gamma\}$, а скирмионная плотность внутри параллелограмма есть $\rho = B/(sL^2 \cos \gamma)$, где B – топологический заряд скирмиона. Периодические граничные условия учитываются за счет отождествления каждой из двух противоположных сторон параллелограмма:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} + n_1(L, 0) + n_2(sL \sin \gamma, sL \cos \gamma)), \quad (4)$$

где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Нас интересуют статические решения с конечной энергией, которые на языке дифференциальной геометрии являются отображениями $\mathbb{T}^2 \mapsto S_2$, где $\mathbb{T}^2$ – двумерный тор. Они разбиваются на гомотопические секторы, параметризованные инвариантным интегралом топологического заряда B – степенью отображения, определяемой как

$$B = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} dx dy (\phi \cdot (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)). \quad (5)$$

Можно показать, что статическая энергия E удовлетворяет условию

$$E \geq 4\pi B, \quad (6)$$

причем равенство возможно только в “чистом” $O(3)$ -случае (т.е. когда и скирмионный, и потенциальный члены отсутствуют) [29]. Заметим, что если в бэйби-модели Скирма на $\mathbb{R}^2$ при фиксированных граничных условиях потенциальный член необходим для предотвращения неограниченного увеличения солитонов, то в нашем формализме в силу периодических граничных условий этого не требуется [29]. В настоящей работе мы исследуем модель как с потенциальным членом, так и без него.

Рассматриваемую задачу можно упростить с помощью линейного отображения параллелограммов Λ в двумерный тор $\mathbb{T}^2$ с единичной площадью. В новых координатах функционал энергии принимает вид

$$E = \frac{1}{2s \cos \gamma} \int_{\mathbb{T}^2} dx dy (s^2 (\partial_x \phi)^2 - 2s \sin \gamma (\partial_x \phi \partial_y \phi) + (\partial_y \phi)^2) + \frac{\kappa^2 \rho}{2B} \int_{\mathbb{T}^2} dx dy (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)^2 + \frac{\mu^2 B}{\rho} \int_{\mathbb{T}^2} dx dy (1 - \phi_3). \quad (7)$$

Заметим, что энергия зависит от параметров модели Скирма κ и μ и скирмионной плотности ρ только через комбинации $\kappa^2 \rho$ и μ^2 / ρ .

Чтобы найти конфигурации скирмионов с энергией, минимальной по всем параллелограммам с фиксированной площадью (или, что эквивалентно, с заданной плотностью ρ), мы перебираем значения параметров параллелограммов $\{s, \gamma\}$ и находим параллелограмм, для которого получающаяся энергия минимальна по всему пространству параметров. Мы применяем также альтернативный подход к данной задаче, несколько более аналитический по своей природе; он подробно рассматривается в разделе 6. В следующем разделе дано описание процедуры численной минимизации.

4. ПРОЦЕДУРА ЧИСЛЕННОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Уравнения Эйлера–Лагранжа, выводимые из функционала энергии (7), являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, так что, вообще говоря, для их решения требуются численные методы. Мы фиксировали заряд B , параметры s, γ параллелограмма и скирмионную плотность ρ , после чего искали скирмионную конфигурацию с минимальной энергией с помощью метода полной релаксации полей на прямоугольной сетке размера 100×100 на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, где в каждой точке был определен триплет полей $\phi(\chi_m, y_m)$. Для вычисления плотностей энергии и заряда использовалась процедура, разработанная в работе [33], в рамках которой расчет этих величин выполнялся в центрах квадратов сетки. Численные производные также вычислялись в этих точках; x -производные рассчитывались по формуле

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{(x_{m+1/2}, y_{n+1/2})} = \frac{1}{\Delta x} \left(\left\langle \frac{\phi(x_{m+1}, y_n) + \phi(x_{m+1}, y_{n+1})}{2} \right\rangle_{\text{norm.}} - \left\langle \frac{\phi(x_m, y_n) + \phi(x_m, y_{n+1})}{2} \right\rangle_{\text{norm.}} \right), \quad (8)$$

где индекс “norm” указывает, что усредненные поля нормированы на единицу; y -производные рассчитывались аналогично. Мы обнаружили, что эта процедура

прекрасно работает. По поводу более подробного обсуждения данного метода см. работу [33].

Процесс релаксации начинается с задания триплета полей ϕ с вращательно-симметричной конфигурацией

$$\phi_{\text{init}} = (\sin f(r) \cos B\theta, \sin f(r) \sin B\theta, \cos f(r)), \quad (9)$$

где функция профиля $f(r) = \pi e^{-r}$, а r, θ – обычные полярные координаты. Далее энергия бэйби-скирмиона минимизируется путем повторения следующих шагов: на сетке случайным образом выбирается точка (x_m, y_n) вместе с одной из трех компонент поля $\phi(x_m, y_n)$. Выбранная компонента затем сдвигается на значение $\delta\phi$, меняющееся равномерно на интервале $[-\Delta_\phi, \Delta_\phi]$, где исходно $\Delta_\phi = 0.1$. Затем триплетное поле нормируется и вычисляется изменение энергии. Если энергия убывает, то модификация поля принимается, в противном случае она отбрасывается. Затем выбирается меньшее значение Δ_ϕ и процедура повторяется до тех пор, пока дальнейшее уменьшение энергии не перестанет наблюдаться.

Чтобы проверить устойчивость и надежность нашей численной процедуры, мы запускали минимизационный алгоритм, используя различные начальные конфигурации и сетку размера 80×80 для нескольких значений ρ , s и γ . Это делалось с целью удостовериться, что конечные конфигурации не зависят от дискретизации и от выбранной схемы охлаждения. В качестве дальнейшей проверки мы повторяли некоторые из процедур минимизации, вычисляя численные производные с более высокой точностью, с использованием восьми точек поля. Никаких видимых изменений в результатах обнаружено не было.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Используя процедуру минимизации, описанную в предыдущем разделе, мы нашли статические скирмионные конфигурации с энергией, минимальной по всем параллелограммам, для различных конфигураций: в “чистом” $O(3)$ -случае, когда и параметр Сkirма κ , и потенциал взаимодействия μ полагаются равными нулю, в случае Сkirма, когда только $\mu = 0$, и в общем случае, когда ни скирмионный член, ни потенциальный член не равны нулю.

В каждой из этих конфигураций производился перебор в пространстве параметров параллелограммов при фиксированной скирмионной плотности ρ , что при каждом наборе $\{s, \gamma\}$ приводило к некоторой конфигурации с минимальной энергией. Выбор числа скирмионов, которые следует разместить внутри единичной ячейки, делался после некоторого предварительного тестирования, в ходе которого исследовались также скирмионы с другими зарядами (до $B = 8$). Оказалось, что конфигурации с минимальной энергией с нечетными зарядами имеют существенно большие энергии, чем конфигурации с четными зарядами, причем среди последних наиболее фундаментальным оказался скирмион с зарядом два, поскольку было видно, что он служит “строительным элементом” для скирмионов с большими зарядами. Ниже представлена сводка результатов.

Рис. 4. Скримионы с зарядом два в чистом $O(3)$ -случае: контурные графики зарядовых плотностей для различных конфигураций параллелограммов, из которых все дают минимальное значение в ограничении на энергию (6): $E = 4\pi B = 8\pi$.

5.1. Чистый $O(3)$ -случай ($\kappa = \mu = 0$). Чистый $O(3)$ -случай соответствует ситуации, когда κ и μ равны нулю. В этом случае можно найти аналитические решения в терминах эллиптических функций Вейерштрасса [29], а конфигурациям с энергией, минимальной по всем параллелограммам, отвечает предельный случай равенства в ограничении на энергию (6), т.е. для них $E = 4\pi B$. Таким образом, сравнение численных результатов с аналитическими решениями служит полезной проверкой точности нашей численной процедуры. Наблюдается согласие с точностью до шести значащих цифр. Контурные графики зарядовых плотностей для различных параллелограммов в случае скримионов с зарядом два показаны на рис. 4, все они имеют энергию $E = 8\pi$.

5.2. Случай Скирма ($\kappa \neq 0, \mu = 0$). Как отмечалось выше, при $\mu = 0$ функционал энергии зависит от параметра Скирма κ только через $\kappa^2 \rho$, так что без потери общности можно варьировать ρ , держа при этом фиксированным $\kappa^2 = 0.03$ (такой специальный выбор κ был сделан для удобства численных расчетов). На рис. 5 показаны полные энергии (деленные на 8π) и соответствующие контурные графики зарядовых плотностей для шестиугольной, квадратной и других конфигураций (для сравнения), все при $\rho = 2$. Минимизация функционала энергии (7) по всем

Рис. 5. Скирмионы с зарядом два в случае Скирма при $\kappa^2 = 0.03$ и $\rho = 2$: контурные графики зарядовых плотностей для шестиугольной, квадратной и других фундаментальных ячеек. Шестиугольная конфигурация имеет наименьшую энергию.

Рис. 6. Зависимости полной энергии E (деленной на 8π) скирмиона с зарядом два от скирмионной плотности в шестиугольной решетке ($\square$ – случай Скирма и $\diamond$ – общий случай) и в квадратной решетке ($\blacksquare$ – случай Скирма и $\blacklozenge$ – общий случай), в случае Скирма $\kappa^2 = 0.03$, в общем случае $\kappa^2 = 0.03$ и $\mu^2 = 0.1$. В общем случае существует оптимальная плотность (при $\rho \approx 0.14$), при которой энергия достигает глобального минимума. Рисунок “б” представляет собой увеличенный нижний левый фрагмент на рисунке “а”.

параллелограммам дает следующее. Для любой фиксированной плотности ρ минимальная энергия получается при $s = 1$ и $\gamma = \pi/6$. Этот набор значений соответствует “шестиугольной” решетке, т.е. решетке из “равносторонних треугольников.” В этой конфигурации любые три соседних местоположения с нулевой энергией (или “дыры”) являются вершинами равносторонних треугольников и наблюдаются восемь различных пиков высокой плотности (как показано на рис. 5а). Эту конфигурацию можно, таким образом, интерпретировать как расщепление два-скирмиона на восемь четверть-скирмионов, причем этот результат не зависит от скирмионной плотности ρ . Оказалось, что хорошо исследованная конфигурация квадратных ячеек с минимальной энергией (рис. 5б), в которой два-скирмион расщепляется на четыре полускирмиона, имеет более высокую энергию, чем в случае шестиугольных ячеек.

Полная энергия скирмионов в случае шестиугольных ячеек оказалась пропорциональной плотности скирмионов, что отражает масштабную инвариантность модели (рис. 6). В частности, глобальный минимум энергии $E = 4\pi B = 8\pi$ достигается при $\rho \rightarrow 0$. Это находится в согласии с ожиданиями, поскольку случай $\rho = 0$ эквивалентен случаю с нулевым параметром Скирма κ , а тогда данная модель эффективно является чистой $O(3)$ -моделью, и неравенство (6) обращается в равенство.

5.3. Общий случай ($\kappa \neq 0$, $\mu \neq 0$). Оказалось, что шестиугольная структура энергетически предпочтительна также и в общем случае. Поскольку, однако, в этом случае скирмионы обладают определенным размером (в чем можно удостовериться, взглянув на зависимость функционала энергии от ρ), структура скирмионов различна при низких и высоких плотностях, и наблюдается фазовый переход. Если при низких плотностях скирмионы располагаются изолированно друг от друга, то при высоких плотностях они сливаются, образуя четверть-скирмионный кристалл, как и в описанном выше случае Скирма. Когда плотность ρ убывает или, что эквивалентно, значение μ возрастает, размер скирмионов становится малым по сравнению с размером ячейки. Точная форма решетки перестает оказывать влияние, и разность энергий для различных типов решеток становится очень малой (см. рис. 6).

Более того, вследствие конечного размера скирмиона имеется оптимальная плотность, при которой энергия минимальна. На рис. 7 показаны контурные графики зарядовой плотности скирмиона с зарядом два для нескольких плотностей при $\kappa^2 = 0.03$ и $\mu^2 = 0.1$. Энергия скирмиона минимальна при $\rho \approx 0.14$ (см. рис. 6).

6. ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Функционал энергии (7) зависит и от поля Скирма ϕ , и от параметров параллелограмма γ и s . Формально конфигурацию с минимальной энергией по всем параллелограммам можно получить путем функционального дифференцирования по ϕ и обычного дифференцирования по γ и s . Однако поскольку получающиеся уравнения очень сложны, прямое численное решение весьма затруднительно. Тем не менее некоторых аналитических успехов можно добиться следующим образом. Сначала продифференцируем функционал энергии (7) только по γ и s и приравняем частные

Рис. 7. Скирмион с зарядом два в общем случае при $\mu^2 = 0.1$ и $\kappa^2 = 0.03$: на контурных графиках приведены зарядовые плотности для конфигураций с минимальной энергией на шестиугольной решетке при различных плотностях (энергетически предпочтительной оказывается плотность $\rho \approx 0.14$).

производные к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \gamma} &= \frac{1}{2s \cos^2 \gamma} (\sin \gamma (\mathcal{E}^{yy} + s^2 \mathcal{E}^{xx}) - 2s \mathcal{E}^{xy}) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial s} &= \frac{1}{2s^2 \cos \gamma} (\mathcal{E}^{yy} - s^2 \mathcal{E}^{xx}) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathcal{E}^{ij} = \int_{\mathbb{T}^2} dx dy (\partial_i \phi \cdot \partial_j \phi)$ и $i, j \in \{x, y\}$. Решение этих уравнений относительно γ и s дает

$$s = \sqrt{\frac{\mathcal{E}^{yy}}{\mathcal{E}^{xx}}}, \quad \sin \gamma = \frac{\mathcal{E}^{xy}}{\sqrt{\mathcal{E}^{xx} \mathcal{E}^{yy}}}. \quad (11)$$

Подставляя эти выражения в функционал энергии (7), получаем “редуцированный” функционал

$$E = \sqrt{\mathcal{E}^{xx} \mathcal{E}^{yy} - (\mathcal{E}^{xy})^2} + \frac{\kappa^2 \rho}{2B} \mathcal{E}_{\text{Sk}} + \frac{\mu^2 B}{\rho} \mathcal{E}_{\text{pot}}, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{E}_{\text{Sk}} = \int_{\mathbb{T}^2} dx dy (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)^2, \quad \mathcal{E}_{\text{pot}} = \int_{\mathbb{T}^2} dx dy (1 - \phi_3)$$

– энергия Скирма и потенциальная энергия соответственно. Далее, когда и γ , и s исключены из получившегося выражения, а условия их оптимизации встроены в функционал, мы выполняем численную минимизацию. Заметим, однако, что представленную выше процедуру следует воспринимать с осторожностью. Дело в том что

условия (10) для γ и s в действительности являются только условиями экстремума и могут давать максимум или седловую точку. Поэтому важно подтвердить любые результаты, полученные с использованием данного метода, сравнивая их с соответствующими результатами, полученными методом, описанным в разделе 4. Весьма отраднo, что численная минимизация редуцированного функционала (12) дает $\sin \gamma = 0.498$ ($\gamma \approx \pi/6$) и $s = 1$ (и в случае Скирма, и в общем случае), что подтверждает результаты, представленные в предыдущем разделе.

В общем случае ($\mu \neq 0$) функционал энергии (12) можно дифференцировать по скирмионной плотности ρ , что дает оптимальную плотность, для которой энергия скирмиона минимальна. Дифференцирование по ρ и подстановка полученного выражения в функционал энергии приводит к функционалу

$$E = \sqrt{\mathcal{E}^{xx}\mathcal{E}^{yy} - (\mathcal{E}^{xy})^2} + \kappa\mu \sqrt{2\mathcal{E}_{\text{Sk}}\mathcal{E}_{\text{pot}}} . \quad (13)$$

Численная минимизация приведенного выражения при $\kappa^2 = 0.03$ и различных значениях μ ($0.1 \leq \mu^2 \leq 10$) дает шестиугольную конфигурацию, как и в случае Скирма. В частности, при $\mu^2 = 0.1$ оптимальная плотность оказывается равной $\rho \approx 0.14$, что согласуется с результатами из п. 5.3.

7. ИТОГИ И ЗАМЕЧАНИЯ О ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Мы исследовали решеточную структуру бэйби-скирмионов в двумерном пространстве путем поиска при периодических граничных условиях конфигураций с минимальной энергией, образованных бэйби-скирмионами, расположенными внутри единичной ячейки в форме параллелограмма. В чистом $O(3)$ -случае (когда и скирмионный, и потенциальный члены отсутствуют) мы проверили, что нет предпочтительных решеток, в которых скирмионы самоупорядочиваются, поскольку все конфигурации параллелограммов дают одну и ту же минимальную энергию. Эта энергия отвечает минимальной величине в ограничении на энергию, задаваемом неравенством (6).

В случае Скирма, т.е. без потенциального члена, результаты иные. При любой фиксированной скирмионной плотности параллелограммы, для которых скирмионная энергия минимальна, образуют шестиугольную решетку ($s = 1$ и $\gamma = \pi/6$). В частности, шестиугольная решетка имеет более низкую энергию, чем конфигурация из четырех полускирмионов на прямоугольной решетке. Например, при $\rho = 2$ для шестиугольной решетки $E = 1.433$, для прямоугольной решетки $E = 1.446$.

Шестиугольная структура оказывается энергетически наиболее предпочтительной также и в общем случае, когда имеются и скирмионный, и потенциальный члены. В этом случае, однако, модель не является масштабно-инвариантной и скирмион имеет определенный размер. Это приводит к существованию точки фазового перехода, зависящей от плотности, и к появлению оптимальной плотности, при которой полная энергия скирмиона минимальна. Это аналогично скирмионному поведению в трехмерной модели Скирма, где скирмионы также обладают определенным размером [22].

Как уже отмечалось выше, обнаруженная в настоящей работе специальная роль шестиугольных решеток не уникальна для бэйби-модели Скирма: она возникает и в других солитонных моделях. В контексте моделей Скирма существование шестиугольной двумерной структуры трехмерных скирмионов было обнаружено в работе [32], где отмечено, что оптимальная с энергетической точки зрения бесконечная плоская структура трехмерных скирмионов представляет собой решетку, напоминающую структуру листа графита – термодинамически наиболее устойчивой формы углерода (см. книгу [10]). Другими примерами, в которых проявляется шестиугольная структура, являются вихри Гинзбурга–Ландау, о которых известно, что в шестиугольной конфигурации они имеют более низкую энергию, чем в конфигурации квадратной решетки [31]. Таким образом, не следует удивляться тому, что шестиугольная структура оказывается наиболее предпочтительной в бэйби-модели Скирма.

Бэйби-скирмионы определенного вида также возникают в системах с квантовым эффектом Холла, где они появляются как низкоэнергетические возбуждения основного состояния вблизи ферромагнитных чисел заполнения (особенно вблизи 1 и $1/3$) [5]. Уже указывалось [34], что это состояние содержит конечную плотность скирмионов, в работе [6] шестиугольная конфигурация была предложена в качестве кандидата на их решеточную структуру. Наши результаты могут служить дополнительным свидетельством в этом направлении, хотя здесь и требуется более подробный анализ.

Проведенные нами исследования также дают основание поставить некоторые интересные вопросы: как динамические свойства бэйби-скирмионов на шестиугольной решетке отличаются от их поведения на обычной прямоугольной решетке, как ведут себя скирмионы при ненулевой температуре? Можно также поинтересоваться и обобщением этих результатов на трехмерный случай, коль скоро будет выполнено систематическое исследование, подобное проведенному в настоящей работе. Действительно ли среди всех решеток в форме параллелепипеда гранецентрированная кубическая решетка является кристаллической структурой трехмерных скирмионов с минимальной энергией? Если нет, то какова будет структура с минимальной энергией? Как эти результаты изменятся в присутствии массового члена? Мы надеемся ответить на эти вопросы в дальнейших исследованиях.

Благодарности. Данная работа частично поддержана со стороны Israel Science Foundation под управлением Israel Academy of Sciences and Humanities.

Список литературы

- [1] T. H. R. Skyrme, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **260**:1300 (1961), 127–138; *Nucl. Phys.*, **31** (1962), 556–569.
- [2] G. S. Adkins, C. R. Nappi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **228**:3 (1983), 552–566.
- [3] B. M. A. G. Piette, B. J. Schoers, W. J. Zakrzewski, *Z. Phys. C*, **65**:1 (1995), 165–174.
- [4] А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ*, **22**:10 (1975), 503–506.
- [5] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, E. H. Rezayi, *Phys. Rev. B*, **47**:24 (1993), 16419–16426.

- [6] N. R. Walet, T. Weidig, *Full 2D numerical study of the quantum Hall skyrme crystal*, [arXiv: cond-mat/0106157](#).
- [7] S. M. Girvin, “The quantum Hall effect: novel excitations and broken symmetries”, *Topological Aspects of Low Dimensional Systems*, eds. A. Comtet, J. Jolicœur, S. Ouvry, F. David, Springer, Berlin, 1999, 53–175.
- [8] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics*, World Sci., Singapore, 2000.
- [9] D.-H. Lee, C. L. Kane, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:12 (1990), 1313–1317.
- [10] N. S. Manton, P. M. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [11] R. A. Leese, M. Peyrard, W. J. Zakrzewski, *Nonlinearity*, **3**:3 (1990), 773–807.
- [12] B. Piette, W. J. Zakrzewski, *Chaos Solitons Fractals*, **5**:12 (1995), 2495–2508.
- [13] P. M. Sutcliffe, *Nonlinearity*, **4**:4 (1991), 1109–1121.
- [14] B. M. A. G. Piette, B. J. Schoers, W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B*, **439**:1–2 (1995), 205–235.
- [15] T. Weidig, *Nonlinearity*, **12**:6 (1999), 1489–1503.
- [16] P. Eslami, M. Sarbishaei, W. J. Zakrzewski, *Nonlinearity*, **13**:5 (2000), 1867–1881.
- [17] I. Hen, M. Karliner, *Nonlinearity*, **113**:3 (2008), 399–408.
- [18] I. Hen, M. Karliner, *Phys. Rev. D*, **77**:5 (2008), 054009.
- [19] E. Braaten, S. Townsend, L. Carson, *Phys. Lett. B*, **235**:1–2 (1990), 147–152.
- [20] R. A. Battye, P. M. Sutcliffe, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:3 (1997), 363–366.
- [21] N. R. Walet, *Nucl. Phys. A*, **606**:3–4 (1996), 429–458.
- [22] I. Klebanov, *Nucl. Phys. B*, **262**:1 (1985), 133–143.
- [23] A. S. Goldhaber, N. S. Manton, *Phys. Lett. B*, **198**:2 (1987), 231–234.
- [24] A. D. Jackson, J. J. M. Verbaarschot, *Nucl. Phys. A*, **484**:3–4 (1988), 419–431.
- [25] M. Kugler, S. Shtrikman, *Phys. Lett. B*, **208**:3–4 (1988), 491–494.
- [26] L. Castellejo, P. S. J. Jones, A. D. Jackson, J. J. M. Verbaarschot, *Nucl. Phys. A*, **501**:4 (1989), 801–812.
- [27] O. Schwindt, N. R. Walet, *Europhys. Lett.*, **55**:5 (2001), 633–639.
- [28] R. S. Ward, *Nonlinearity*, **17**:3 (2004), 1033–1040.
- [29] R. J. Cova, W. J. Zakrzewski, *Nonlinearity*, **10**:5 (1997), 1305–1317; *Eur. Phys. J. B*, **15**:4 (2000), 673–678; *Rev. Mexicana Fis.*, **50**:5 (2005), 527–535.
- [30] J. Bamberg, G. Cairns, D. Kilminster, *Amer. Math. Monthly*, **110**:3 (2003), 202–209.
- [31] W. H. Kleiner, L. M. Roth, S. H. Antler, *Phys. Rev. A*, **133**:5A (1964), A1226–A1227.
- [32] R. A. Battye, P. M. Sutcliffe, *Phys. Lett. B*, **416**:3–4 (1998), 385–391.
- [33] M. Hale, O. Schwindt, T. Weidig, *Phys. Rev. E*, **62**:3 (2000), 4333–4346.
- [34] L. Brey, H. A. Fertig, R. Côté, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:13 (1995), 2562–2565.