Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Иоанниду, П. Г. Кеврекидис, Дискретные двумерные и трехмерные скирмионы, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 84–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:21:19

© 2009 г.

Т. Иоанниду*, П. Г. Кеврекидис†

ДИСКРЕТНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ СКИРМИОНЫ

Представлен решеточный вариант модели Скирма в размерностях $2 + 1$ и $3 + 1$, построенный на основе полученных ранее результатов. Дискретные скирмионы обладают высокой степенью устойчивости, как и их аналоги со своими аналогами в непрерывном случае.

Ключевые слова: решеточный скирмион, устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия усилия многих исследователей были направлены на построение таких дискретных аналогов разнообразных непрерывных систем, которые допускают решения типа уединенных волн и сохраняют отдельные характеристики своих непрерывных аналогов при помещении на решетку. Одной из таких характеристик топологической системы оказывается существование так называемой границы Богомольного [1], для интегрируемых систем такой характеристикой оказывается существование пары Лакса [2]. Тем не менее на решетке граница Богомольного сохраняется лишь в считанном числе примеров [3]–[5], а задание лаксовой пары для соответствующей интегрируемой системы оказывается еще более сложной задачей (особенно в старших размерностях) [2].

Наиболее интересным свойством модели Скирма оказывается устойчивость солитонов, которая связана с топологическими свойствами модели [6]. Вопрос о сохранении этой устойчивости для соответствующей системы на решетке остается открытым. В настоящей работе построены решеточные скирмионы в размерностях $2 + 1$ и $3 + 1$ и показано, что эти скирмионы устойчивы относительно вариаций параметров системы. Следовательно, можно предположить, что наша схема дискретизации сохраняет некоторые важные свойства, присущие соответствующей непрерывной модели, являясь в то же время более удобным объектом при численных расчетах.

*TAT, Eberhard Karls Universitat Tübingen, Tübingen, Germany; School of Mathematics, Physics and Computational Sciences, Faculty of Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, Greece. E-mail: ti3@auth.gr

†Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst, MA, USA

2. ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СКИРМИОНЫ

Начнем с краткого обзора модели Скирма в размерности $2 + 1$ (так называемая модель бэйби-скирмионов). Лагранжева плотность модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{\kappa}{4} (\partial_\alpha \phi \times \partial_\beta \phi)(\partial^\alpha \phi \times \partial^\beta \phi) - \mu^2 (1 - (\mathbf{n} \cdot \phi)^2). \quad (1)$$

Поле ϕ задает отображение $M^3 \rightarrow S^2$, где M^3 – трехмерное пространство Минковского с метрикой $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1)$, а пространство конфигураций S^2 представляет собой двумерную сферу единичного радиуса, погруженную в трехмерное евклидово пространство. Таким образом, поле ϕ представляет собой скалярный 3-вектор с единичной нормой, т.е. $|\phi|^2 = 1$. Постоянные κ, μ суть свободные параметры, имеющие соответствующие размерности длины и энергии. Первое слагаемое в действии (1) есть действие обычной $O(3)$ сигма-модели, второй член есть двумерный аналог члена Скирма, а последний член представляет собой потенциал.

Выбор потенциального члена обусловлен существованием устойчивых радиально-симметричных скирмионных решений. Возможны и два других выбора: голоморфная модель, в которой отсутствуют устойчивые скирмионные решения, и старая бэйби-скирмионная модель, в которой получаются устойчивые, но не радиально-симметричные скирмионы. Чтобы обеспечить применимость нашего метода, нам необходимы радиально-симметричные решения, и, таким образом, предложенный потенциальный член оказывается единственно возможным.

Условие конечности энергии требует, чтобы потенциальный член обращался в нуль на бесконечности, откуда получим, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(t, x, y) = \mathbf{n}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для простоты выберем $\mathbf{n}$ в виде вакуумного состояния, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Следовательно, существует топологическое число, поскольку в силу граничных условий поле ϕ является отображением $\phi: S^2 \rightarrow S^3$.

Чтобы построить дискретный аналог двумерной модели Скирма, предположим, что поле ϕ имеет “ежеподобный” вид:

$$\phi_i = k_i \sin g(r, t), \quad \phi_3 = \cos g(r, t), \quad (2)$$

где k_i , $i = 1, 2$, представляет собой вектор единичной длины, выраженный через азимутальный угол θ , а топологический заряд $N = \deg(\phi)$ при $k_i = (\cos N\theta, \sin N\theta)$, $g(r, t)$ – вещественнозначная функция профиля, удовлетворяющая определенным граничным условиям. Наложим условие радиальной симметрии, отчасти просто для удобства (в том числе и для удобства вычислений), а также из-за того, что нам прежде всего необходимо обеспечить устойчивость радиально-симметричных скирмионов еще до исследования их устойчивости относительно поперечных возмущений (что будет следующим этапом исследования).

Функционалы энергии, связанные с лагранжианом (1), имеют вид

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \pi \int r \dot{g}^2 \left(1 + \frac{\kappa^2 N^2}{r^2} \sin^2 g \right) dr, \\ E_{\text{pot}} &= \pi \int \left(r g_r^2 + \frac{\kappa^2 N^2}{r} g_r^2 \sin^2 g + \frac{N^2}{r} \sin^2 g + \mu^2 r \sin^2 g \right) dr. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия для скирмиона таковы: $g(0, t) = \pi$ и $g(r, t) = 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Здесь и далее переменная r предполагается дискретной с шагом решетки h . Таким образом, вещественнозначное поле $g(r, t)$ зависит от непрерывной переменной t и от дискретной переменной $r = nh$, где $n \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $g_+ = g((n+1)h, t)$ обозначает сдвиг вперед, и разность при сдвиге вперед дается выражением $\Delta g = (g_+ - g)/h$. Имеются разнообразные варианты дискретизации вышеприведенных функционалов энергии. Однако на основе подхода работы [5] для дискретизации $O(3)$ сигма-модели положим

$$g_r = \frac{2f(h)}{h} \sin\left(\frac{g_+ - g}{2}\right), \quad \sin g = \frac{1}{f(h)} \sin\left(\frac{g_+ + g}{2}\right). \quad (4)$$

Параметр $f(h)$ представляет собой произвольную функцию от шага решетки с единственным ограничением $f(h) \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$.

Начало координат требует специального рассмотрения, поскольку функционалы не определены при $n = 0$. Одна из возможностей состоит в том, чтобы предположить (по аналогии с работой [5]), что в начале координат имеет место граничное условие

$$(rg_r^2)|_{r=0} = \left(\frac{N^2}{r} \sin^2 g\right)\Big|_{r=0} = \frac{2N}{h} \cos^2\left(\frac{g(h, t)}{2}\right). \quad (5)$$

Теперь кинетическая и потенциальная энергии дискретной двумерной модели Скирма задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} nh^2 \dot{g}^2 \left\{ 1 + \frac{k^2 N^2}{n^2 h^2 f^2} \sin^2\left(\frac{g_+ + g}{2}\right) \right\}, \\ E_{\text{pot}} &= 4\pi N \cos^2\left(\frac{g(h, t)}{2}\right) \left[1 + \frac{2\kappa^2 f^2}{h^2} \cos^2\left(\frac{g(h, t)}{2}\right) \right] + \\ &+ \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4nf^2 \sin^2\left(\frac{g_+ - g}{2}\right) + \frac{\kappa^2 N^2}{nh^2} \sin^2\left(\frac{g_+ - g}{2}\right) \sin^2\left(\frac{g_+ + g}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{N^2}{nf^2} \sin^2\left(\frac{g_+ + g}{2}\right) + \frac{\mu^2 nh^2}{f^2} \sin^2\left(\frac{g_+ + g}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что при дискретизации второго члена в выражении для энергии в начале координат была использована комбинация формул (4) и (5). На самом деле в случае, когда этот член отсутствует, устойчивый решеточный двумерный скирмион перестает существовать. Заметим, что этот член представляет собой дискретный аналог члена Скирма, который стабилизирует решение, а потому его наличие совершенно необходимо (даже в начале координат). При $\kappa = \mu = 0$ модель (6) становится дискретной версией $O(3)$ сигма-модели, введенной в работе [5].

Уравнения движения на решетке, получаемые при вариации лагранжиана $L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$, задаваемого выражениями (6), имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{g} \left[1 + \frac{\kappa^2 N^2}{h^2 f^2} \sin^2\left(\frac{g_+ + g}{2}\right) \right] &+ \frac{\kappa^2 N^2}{2h^2 f^2} \sin(g_+ + g) \left(\frac{\dot{g}^2}{2} + \dot{g}\dot{g}_+ \right) = \\ &= \frac{N}{h^2} \sin g \left(1 + \frac{4\kappa^2 f^2}{h^2} \cos^2 \frac{g}{2} \right) + \sin(g_+ - g) \left[\frac{g^2}{h^2} + \frac{\kappa^2 N^2}{4h^4} \sin^2\left(\frac{g_+ + g}{2}\right) \right] - \\ &- \sin(g_+ + g) \left[\frac{N^2}{4h^2 f^2} + \frac{\mu^2}{4f^2} + \frac{\kappa^2 N^2}{4h^4} \sin^2\left(\frac{g_+ - g}{2}\right) \right], \quad n = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\ddot{g} \left[1 + \frac{\kappa^2 N^2}{nh^2 f^2} \sin^2 \left(\frac{g_+ + g_-}{2} \right) \right] + \frac{\kappa^2 N^2}{2h^2 f^2} \left[\frac{\sin(g_+ + g_-)}{n} \left(\frac{\dot{g}^2}{2} + \dot{g}_+ \dot{g}_- \right) - \frac{\sin(g_+ - g_-)}{n-1} \frac{\dot{g}^2}{2} \right] = \\
= -\sin(g_+ - g_-) \left[\frac{g_-^2}{h^2} (n-1) + \frac{\kappa^2 N^2}{4h^4} \frac{1}{n-1} \sin^2 \left(\frac{g_+ + g_-}{2} \right) \right] + \\
+ \sin(g_+ - g_-) \left[\frac{g_+^2}{h^2} n + \frac{\kappa^2 N^2}{4h^4} \frac{1}{n} \sin^2 \left(\frac{g_+ + g_-}{2} \right) \right] - \\
- \sin(g_+ + g_-) \left[\frac{N^2}{4f^2 h^2} \frac{1}{n} + \frac{\mu^2}{4f^2} n + \frac{\kappa^2 N^2}{4h^4} \frac{1}{n} \sin^2 \left(\frac{g_+ - g_-}{2} \right) \right] - \\
- \sin(g_+ + g_-) \left[\frac{N^2}{4f^2 h^2} \frac{1}{n-1} + \frac{\mu^2}{4f^2} (n-1) + \right. \\
\left. + \frac{\kappa^2 N^2}{4h^4} \frac{1}{n-1} \sin^2 \left(\frac{g_+ - g_-}{2} \right) \right], \quad n > 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Применим теперь метод итераций по фиксированной точке для идентификации статических решений уравнений (7), т.е. для построения дискретных двумерных скирмионов. В качестве пробной итерации по методу Ньютона с фиксированной точкой выбирается функция $\arccos r$, которая после нескольких шагов итерационной процедуры стремится к точному стационарному решению. Численный анализ показал, что устойчивость волнового решения не разрушается при дискретизации, поскольку двумерный скирмион остается устойчивым во всем диапазоне параметров, используемом в наших численных расчетах. Более детальное описание численного эксперимента содержится в работе [7].

Устойчивость следует из анализа собственных значений соответствующего якобиана линеаризации в окрестности решения:

$$g_n = g_n^{\text{st}} + \epsilon e^{\lambda t} w_n. \tag{8}$$

С помощью этой подстановки строится задача на собственные значения для пар собственных значений и собственных векторов (λ, w_n) ; g_n^{st} представляет собой стационарное решение, полученное с помощью описанной выше процедуры Ньютона. Решение стабильно, если ни одно из собственных значений $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ линеаризованной задачи не имеет строго положительной вещественной составляющей λ_r . Отличительной чертой указанной модели оказывается то, что вторые члены в левых частях уравнений (7) не дают вклада в линеаризацию (их ведущий вклад имеет порядок $O(\epsilon^2)$). Отсюда можно заключить, что даже если решение и получается линейно устойчивым, необходимо рассмотреть полную динамику системы (7), поскольку эта динамика может в принципе приводить к нелинейным неустойчивостям, которые не могут быть обнаружены в линейном приближении.

Наконец, была исследована динамическая эволюция двумерных скирмионов, которая подтвердила свойство устойчивости построенных решений. При исследовании полной динамики модели (7), в которой в точное решение в виде двумерного скирмиона вносилось возмущение случайным полем некоторой амплитуды, оказалось, что исходный дискретный скирмион остается ограниченным в течение эволюции по времени. Это указывает на то, что двумерные скирмионы представляют собой сильно стабилизированные динамические структуры соответствующих дискретных уравнений.

3. ТРЕХМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СКИРМИОНЫ

Лагранжиан $SU(N)$ модели Скирма в размерности $3+1$ записывается в терминах токов $R_\mu = \partial_\mu U U^{-1}$:

$$12\pi^2 \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr}(R_\mu R^\mu) - \frac{1}{16} \text{tr}([R_\mu, R_\nu][R^\mu, R^\nu]), \quad (9)$$

где единицы измерения энергии и длины подвергнуты масштабному преобразованию, а сигнатура метрики пространства-времени выбрана в виде $(+, -, -, -)$. Асимптотическое значение $SU(N)$ поля Скирма $U(x, t)$ должно стремиться к постоянной матрице на пространственной бесконечности, чтобы обеспечить существование конфигурации с конечной энергией.

Барионная плотность, пространственный интеграл от которой задает целочисленный барионный заряд, имеет вид

$$24\pi^2 \mathcal{B} = -\varepsilon_{ijk} \text{tr}(R_i R_j R_k). \quad (10)$$

С математической точки зрения эти полевые конфигурации представляют собой трехмерные топологические солитоны.

Представляя поле Скирма через гармонические отображения из S^2 в CP^{N-1} [8] в виде

$$U(r, \theta, \phi) = e^{2ig(r)(P-1/N)}, \quad (11)$$

можно построить точные скирмионные решения как аналитически, так и численно. Матрица P представляет собой гармоническое отображение из S^2 в CP^{N-1} . В действительности матрица $P = (V \otimes V^{\text{deg}})/|V|^2$ задается в терминах N -компонентного комплексного вектора, зависящего от z и $\bar{z}$, где $z = e^{i\phi} \text{tg}(\theta/2)$. Выражение (11) оказывается хорошо определено в начале координат, если наложить на функцию радиального профиля условие $g(0) = \pi$, в то время как при $r \rightarrow \infty$ необходимо потребовать, чтобы предел поля Скирма имел вид $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$.

Применяя (11), можно упростить выражения для энергии в модели Скирма:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{3\pi} \int \dot{g}^2 (A_N r^2 + 2\mathcal{N} \sin^2 g) dr, \\ E_{\text{pot}} &= \frac{1}{3\pi} \int \left(A_N r^2 g_r^2 + 2\mathcal{N} (g_r^2 + 1) \sin^2 g + \mathcal{I} \frac{\sin^4 g}{r^2} \right) dr, \end{aligned} \quad (12)$$

где интегралы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{I}$ не зависят от r и равны

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{2}{N} (N-1), \quad \mathcal{N} = \frac{i}{2\pi} \int dz d\bar{z} \text{tr}(|P_z|^2), \\ \mathcal{I} &= \frac{i}{4\pi} \int dz d\bar{z} (1 + |z|^2)^2 \text{tr}([P_z, P_{\bar{z}}]^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Наконец, выражение для барионного заряда в этом анзаце принимает вид

$$B = \frac{i}{2\pi} \int dz d\bar{z} \text{tr}(P[P_{\bar{z}}, P_z]), \quad (14)$$

который и представляет собой топологический заряд двумерной CP^{N-1} сигма-модели.

В работе [8] было доказано, что в общем случае голоморфного потенциала V $B = \mathcal{N} = n$ и $\mathcal{I} = n^2$, где $n = \deg(V)$. Однако для специальных нетопологических $SU(3)$ -решений вектор V зависит как от z , так и от $\bar{z}$ (т.е. решение становится не голоморфным). В этом случае барионная плотность тождественно обращается в нуль ($\mathcal{B} = 0$), а решение описывает связанное состояние двух скрмионов и двух антискрмионов, и потому становится неустойчивым, отвечая седловой точке функционала энергии. Подчеркнем, что эта полевая конфигурация представляет собой подлинное (нетривиальное) решение $SU(3)$ модели Скрима при выборе параметров $A_N = 4/3$ и $\mathcal{N} = \mathcal{I} = 4$.

Рассуждения, аналогичные используемым в методе Богомольного в модели Скрима, приводят к следующему ограничению на нижнюю границу энергетического спектра:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{3\pi} \int \left\{ \left(\sqrt{A_N r} g_r + \sqrt{\mathcal{I}} \frac{\sin^2 g}{r} \right)^2 + 2\mathcal{N}(g_r + 1)^2 \sin^2 g - 2(\sqrt{A_N \mathcal{I}} + 2\mathcal{N}) \sin g \partial_r(\cos g) \right\} dr \geq \frac{1}{3} (2\mathcal{N} + \sqrt{A_N \mathcal{I}}) \quad (15)$$

ввиду граничных условий на функцию профиля.

Представим решеточную версию модели Скрима, применяя указанную нижнюю границу для энергии, т.е., следуя [4], начнем с той же самой функции $\sin g \partial_r(\cos g)$, которая возникает в выражении (15), и реконструируем ограничение

$$\sqrt{A_N \mathcal{I}} \sin g \Delta(\cos g) = -D_n g_n, \quad (16)$$

где $D_n \rightarrow \sqrt{A_N r} g_r$ и $F_n \rightarrow (\sqrt{\mathcal{I}}/r) \sin^2 g$ в непрерывном пределе $h \rightarrow 0$. Исходя из формулы

$$\Delta(\cos g) = -\frac{2}{h} \sin\left(\frac{g_+ - g}{2}\right) \sin\left(\frac{g_+ + g}{2}\right)$$

можно предположить, что следует выбрать

$$\begin{aligned} D_n &= \sqrt{A_N} n h \frac{2}{h} \sin\left(\frac{g_+ - g}{2}\right), \\ F_n &= \sqrt{\mathcal{I}} \frac{1}{n h} \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g}{2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Начало координат нужно снова исследовать отдельно, так как выражение для F_n в (17) не определено при $n = 0$. Одна из возможностей состоит в том, чтобы обеспечить выполнение равенства $D_0 + F_0 = 0$, откуда имеем

$$D_0 = -F_0 = \frac{(A_N \mathcal{I})^{1/4}}{\sqrt{h}} \sqrt{g(h, t) - \pi} \sin g(h, t), \quad (18)$$

что следует из дискретизации слагаемого $\sqrt{A_N \mathcal{I}} [\Delta(g \sin^2 g) - g \Delta(\sin^2 g)]$ (подробнее см. в [7]).

Теперь потенциальная энергия решеточной модели Скирма принимает вид

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}} = & 8\pi\sqrt{A_N\mathcal{I}}(g(h,t) - \pi)\sin^2 g(h,t) + \\
 & + 4\pi h \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4A_N n^2 \sin^2\left(\frac{g_+ - g_-}{2}\right) + \frac{\mathcal{I}}{n^2 h^2} \sin^2 g \sin^2\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + 2\mathcal{N} \left[\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{g_+ - g_-}{2}\right) + 1 \right] \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Окончательное выражение для дискретной версии кинетической энергии имеет вид

$$E_{\text{kin}} = 4\pi h \sum_n \left[A_N n^2 h^2 + 2\mathcal{N} \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] \dot{g}^2. \quad (20)$$

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа, получаемые из лагранжиана $L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$, в котором потенциальная и кинетическая энергии задаются соответственно формулами (19) и (20), имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \ddot{g} \left[A_N h^2 + 2\mathcal{N} \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] + \mathcal{N} \dot{g}_+ \dot{g} \sin g \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \\
 & + \mathcal{N} \dot{g}^2 \left[\cos g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \frac{\sin g}{2} \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] = \\
 & = - \frac{\sqrt{A_N\mathcal{I}}}{h} [\sin^2 g + (g - \pi) \sin 2g] + A_N \sin(g_+ - g_-) - \\
 & - \mathcal{N} \left[\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{g_+ - g_-}{2}\right) + 1 \right] \left[\cos g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \frac{\sin g}{2} \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] + \\
 & + \frac{2\mathcal{N}}{h^2} \sin(g_+ - g_-) \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) - \\
 & - \frac{\mathcal{I}}{2h^2} \left[\sin 2g \sin^2\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \frac{\sin(g_+ + g_-)}{2} \sin^2 g \right], \quad n = 1, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{g} \left[A_N n^2 h^2 + 2\mathcal{N} \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] + \mathcal{N} \dot{g}_+ \dot{g} \sin g \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \\
 & + \mathcal{N} \dot{g}^2 \left[\cos g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \frac{\sin g}{2} \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) - \frac{\sin g_-}{2} \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] = \\
 & = A_N n^2 \sin(g_+ - g_-) - A_N (n-1)^2 \sin(g - g_-) - \\
 & - \mathcal{N} \left[\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{g_+ - g_-}{2}\right) + 1 \right] \left[\cos g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \frac{\sin g}{2} \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] - \\
 & - \frac{\mathcal{N}}{2} \left[\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{g - g_-}{2}\right) + 1 \right] \sin g_- \cos\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) - \\
 & - \frac{2\mathcal{N}}{h^2} \left[\sin(g - g_-) \sin g_- \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) - \sin(g_+ - g) \sin g \sin\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) \right] - \\
 & - \frac{\mathcal{I}}{2h^2} \left[\frac{\sin 2g}{n^2} \sin^2\left(\frac{g_+ + g_-}{2}\right) + \frac{\sin(g_+ + g_-)}{2(n-1)^2} \sin^2 g_- + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin(g_+ + g_-)}{2n^2} \sin^2 g \right], \quad n > 1. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Мы также численно построили аналоги $SU(2)$ $B = 1$ и $SU(3)$ $B = 0$ скирмионных конфигураций при соответствующем выборе параметров $A_N = 1$, $\mathcal{N} = \mathcal{I} = 1$ и $A_N = 4/3$, $\mathcal{N} = \mathcal{I} = 4$. Численное доказательство существования и устойчивости повторяет аналогичное доказательство для двумерного скирмиона. Принципиально, что скирмионные структуры демонстрируют свойство линейной устойчивости как в случае $SU(2)$ -, так и в случае $SU(3)$ -модели. Отсутствие вещественных собственных значений указывает на спектральную устойчивость волны.

С помощью численного продолжения [7], принимая в качестве параметра шаг решетки h , удастся показать, что структура остается устойчивой при изменениях h . Наконец, результаты численного анализа бифуркаций мы сравнили с результатами прямого численного интегрирования уравнений (22). В частности, проверили, можно ли дестабилизировать линейно устойчивые решения, например, с помощью некоторого конечного возмущения точного решения (при $h = 1$) с амплитудой 10^{-3} , выбранной в качестве начального условия. Расчеты показали, что соответствующее возмущение остается ограниченным на протяжении всего численного эксперимента. Этот результат явно свидетельствует в пользу сильной устойчивости полученных решений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена новая дискретная версия модели Скирма в размерностях $2 + 1$ и $3 + 1$. Показано, что обе модели допускают дискретные скирмионные решения, аналогичные решениям в непрерывных моделях, которые имеют правильное асимптотическое поведение и оказываются замечательным образом устойчивы в том смысле, что их не удастся расстроить с помощью малых (и даже не слишком малых) возмущений. Преимущество дискретной версии, предложенной в данной работе, состоит и в том, что шаг пространственной решетки может быть выбран сравнительно большим без угрозы для устойчивости солитонов.

В частности, внимание уделялось не только вопросу о том, что происходит вблизи непрерывного предела, когда шаг решетки стремится к нулю, но нас интересовала и зависимость характеристик от шага решетки, когда этот шаг становится сравнительно большим (порядка $O(1)$). Поэтому наша дискретизация не только прошла проверку соответствия своему непрерывному аналогу, она выдержала испытания и в пределе сильной дискретизации.

Было бы интересно обобщить эту дискретизацию на случай полных двумерных и трехмерных систем, не ограничиваясь радиально-симметричными конфигурациями, и исследовать вопрос построения соответствующих скирмионов. На этом пути можно провести исследование полной динамики дискретных скирмионов и провести прямое сравнение с результатами численных расчетов в непрерывном случае [9].

Благодарности. Т. Иоанниду благодарна Университету Тюбингена за предоставление гостевой профессорской позиции. Работа П.Г. Кеврекидиса получила частичную финансовую поддержку грантами NSF-DMS-0505663, NSF-DMS-0619492 и NSF-CAREER.

Список литературы

- [1] Е. Б. Богомольный, *ЯФ*, **24**:4 (1976), 861–870.
- [2] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [3] R. A. Leese, *Phys. Rev. D*, **40**:6 (1989), 2004–2013.
- [4] J. M. Speight, R. S. Ward, *Nonlinearity*, **7**:2 (1994), 475–484; J. M. Speight, *Nonlinearity*, **10**:6 (1997), 1615–1625; *Nonlinearity*, **12**:5 (1999), 1373–1387.
- [5] T. Ioannidou, *Nonlinearity*, **10**:5 (1997), 1357–1367.
- [6] W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [7] T. Ioannidou, P. Kevrekidis, *Phys. Lett. A*, **372**:45 (2008), 6735–6741; [arXiv:0807.0538](#).
- [8] T. Ioannidou, B. Piette, W. J. Zakrzewski, *J. Math. Phys.*, **40**:12 (1999), 6353–6365; 6223–6233.
- [9] M. Peyrard, B. Piette, W. J. Zakrzewski, *Nonlinearity*, **5**:2 (1992), 563–583; B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B*, **439**:1–2 (1995), 205–235; R. A. Battye, P. M. Sutcliffe, *Phys. Lett. B*, **391**:1–2 (1997), 150–156.