Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Иванов, Уравнения иерархии Камассы–Холма,
ТМФ, 2009, том 160, номер 1, 93–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:05:10

© 2009 г.

Р. И. Иванов*

УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ КАМАССЫ–ХОЛМА

Квадраты собственных функций спектральной задачи, связанной с уравнением Камассы–Холма, дают полный базис функций, с помощью которых обратное преобразование рассеяния для иерархии Камассы–Холма описывается как обобщенное преобразование Фурье. Все фундаментальные свойства уравнения Камассы–Холма, такие как существование интегралов движения, описание уравнений всей иерархии и их гамильтоновы структуры, можно естественным образом выразить, используя соотношения полноты и рекурсионный оператор, собственные функции которого являются квадратами решений. Описаны явно некоторые представители иерархии Камассы–Холма, включая интегрируемые деформации этого уравнения. Показано, что можно построить решения некоторых $(1 + 2)$ -мерных представителей иерархии Камассы–Холма, используя результаты для обратного преобразования рассеяния для уравнения Камассы–Холма. В качестве примера приводится пиконное решение одного подобного уравнения.

Ключевые слова: обратное рассеяние, солитоны, пиконы, интегрируемые системы, пара Лакса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Камассы–Холма (КХ) [1] представляет интерес в качестве модели в теории волн на воде. Кроме того, оно описывает аксиально-симметричные волны в гиперупругом стержне [2], [3]. Наиболее известным уравнением, описывающим волны на воде, является уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), однако оно не описывает явление опрокидывания волн. Кроме устойчивых солитонных решений, уравнение КХ, как и недавно полученное нелинейное интегрируемое уравнение Дегаспериса–Прочези, обладает гладкими решениями, в которых за конечное время развиваются сингулярности типа опрокидывающихся волн: решение остается ограниченным, но наклон становится неограниченным [4]. Физическая значимость этих двух уравнений в качестве моделей распространения волн в мелкой воде над плоским дном рассмотрена в работах [5]–[11]. О физических применениях, модификациях и типах решений уравнения КХ можно узнать также из работ [4], [12]–[20].

*School of Mathematical Sciences, Dublin Institute of Technology, Dublin, Ireland.
E-mail: rivanov@dit.ie

Уравнение КХ имеет вид

$$u_t - u_{xxx} + 2\omega u_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где ω – вещественная постоянная. Это уравнение является полностью интегрируемым, оно допускает пару Лакса [1]

$$\Psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m + \omega) \right) \Psi, \quad (2)$$

$$\Psi_t = \left(\frac{1}{2\lambda} - u \right) \Psi_x + \frac{u_x}{2} \Psi + \gamma \Psi, \quad (3)$$

где γ – произвольная постоянная, $m = u - u_{xx}$. Уединенные волны КХ являются устойчивыми солитонами, если $\omega > 0$ [6], [12], [13], [21], или пиконами, если $\omega = 0$ [1], [22], [23].

Уравнения КдФ и КХ можно также интерпретировать как уравнения геодезического потока соответственно для L^2 -метрики и H^1 -метрики на группе Ботта–Вирасоро [24]–[29].

Уравнение КХ является бигамильтоновым, т.е. допускает две согласованные гамильтоновы структуры $J_1 = 2\omega\partial + m\partial + \partial m$ и $J_2 = \partial - \partial^3$ [1], [30]:

$$m_t = -J_2 \frac{\delta H_2[m]}{\delta m} = -J_1 \frac{\delta H_1[m]}{\delta m}, \quad (4)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \int m u \, dx, \quad (5)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int (u^3 + uu_x^2 + 2\omega u^2) \, dx. \quad (6)$$

Бесконечную последовательность законов сохранения (мультигамильтонову структуру) $H_n[m]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, удовлетворяющих равенствам

$$J_2 \frac{\delta H_n[m]}{\delta m} = J_1 \frac{\delta H_{n-1}[m]}{\delta m}, \quad (7)$$

можно вычислить явно [1], [31]–[34].

2. ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

При описании интегрируемой иерархии важную роль играет так называемый рекурсионный оператор, который для иерархии КХ имеет вид $L = J_2^{-1} J_1$. Собственные функции рекурсионного оператора являются квадратами собственных функций спектральной задачи КХ. Рассмотрим более конкретно случай, когда m – функция из класса Шварца, $\omega > 0$ и $m(x, 0) + \omega > 0$. Тогда $m(x, t) + \omega > 0$ при всех t (см., например, [35]). Введем обозначение $q \equiv m + \omega$. Пусть $k^2 = -1/4 - \lambda\omega$, тогда

$$\lambda(k) = -\frac{1}{\omega} \left(k^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (8)$$

В пространстве решений уравнения (2) можно ввести базис $f^+(x, k)$ и $\bar{f}^+(x, \bar{k})$. При всех вещественных $k \neq 0$ этот базис фиксирован асимптотикой при $x \rightarrow \infty$ [35] (см. также [32], [36], [37]):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ikx} f^+(x, k) = 1. \quad (9)$$

Можно также ввести другой базис $f^-(x, k)$ и $\bar{f}^-(x, \bar{k})$, фиксированный асимптотикой при $x \rightarrow -\infty$ для всех вещественных $k \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} f^-(x, k) = 1. \quad (10)$$

Поскольку $m(x)$ и ω вещественны, получаем, что если $f^+(x, k)$ и $f^-(x, k)$ являются решениями уравнения (2), то

$$\bar{f}^+(x, \bar{k}) = f^+(x, -k), \quad \bar{f}^-(x, \bar{k}) = f^-(x, -k) \quad (11)$$

также являются решениями уравнения (2). Квадраты решений суть

$$F^\pm(x, k) \equiv (f^\pm(x, k))^2, \quad F_n^\pm(x) \equiv F^\pm(x, i\kappa_n), \quad (12)$$

где $F_n^\pm(x)$, по-видимому, связаны с дискретным спектром $k = i\kappa_n$, где $0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_n < 1/2$.

Используя асимптотики (9) и (10) и уравнение Лакса (2), можно показать, что

$$L_\pm F^\pm(x, k) = \frac{1}{\lambda} F^\pm(x, k), \quad (13)$$

где

$$L_\pm = (\partial^2 - 1)^{-1} \left[4q(x) - 2 \int_{\pm\infty}^x dy m'(y) \right], \quad (14)$$

является рекурсионным оператором. Оператор, обратный данному, также корректно определен.

Введем обозначение $\partial_\pm^{-1} \equiv \int_{\pm\infty}^x dx$. Квадраты решений (12) образуют полный базис в пространстве Шварца функций $m(x)$, y и t можно считать некоторыми дополнительными параметрами. Обобщенное преобразование Фурье (ОПФ) для q и его вариации относительно этого базиса имеют вид [34]

$$\sqrt{\frac{\omega}{q(x)}} - 1 = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k\mathcal{R}^\pm(k)}{\omega\lambda(k)} F^\pm(x, k) dk + \sum_{n=1}^N \frac{2\kappa_n}{\omega\lambda_n} R_n^\pm F_n^\pm(x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\pm^{-1} \delta(\sqrt{q})}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\delta\mathcal{R}^\pm(k)}{\omega\lambda(k)} F^\pm(x, k) dk \pm \\ &\pm \sum_{n=1}^N \left[\frac{\delta R_n^\pm - R_n^\pm \delta\lambda_n}{\omega\lambda_n} F_n^\pm(x) + \frac{R_n^\pm}{i\omega\lambda_n} \delta\kappa_n \tilde{F}_n^\pm(x) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\tilde{F}_n^\pm(x) \equiv \frac{\partial}{\partial k} F^\pm(x, k) \Big|_{k=i\kappa_n}.$$

Обобщенные коэффициенты Фурье $\mathcal{R}^\pm(k)$, $R_n^\pm$ вместе с множеством дискретных собственных значений называются данными рассеяния. Вариация берется по отношению к любому дополнительному параметру, например y , t .

Уравнения иерархии КХ можно записать как

$$P_2(L_\pm) \frac{2\partial_\pm^{-1}(\sqrt{q})_t}{\sqrt{q}} + P_1(L_\pm) \left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1 \right) = 0, \quad (17)$$

где $P_1(z)$, $P_2(z)$ – многочлены. Если $\Omega(z) = P_1(z)/P_2(z)$, можно определить $\Omega(L_\pm) \equiv P_1(L_\pm)P_2^{-1}(L_\pm)$ (при условии, что оператор $P_2(L_\pm)$ обратим). Тогда уравнение (17) можно записать в эквивалентном виде

$$q_t + 2q\tilde{u}_x + q_x\tilde{u} = 0, \quad \tilde{u} = \frac{1}{2} \Omega(L_\pm) \left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1 \right). \quad (18)$$

В силу полноты базиса квадратов собственных функций из (15)–(17) вытекают линейные дифференциальные уравнения для данных рассеяния:

$$\mathcal{R}_t^\pm \mp ik\Omega(\lambda^{-1})\mathcal{R}^\pm(k) = 0, \quad R_{n,t}^\pm \pm \kappa_n\Omega(\lambda_n^{-1})R_n^\pm = 0, \quad \lambda_{n,t} = 0. \quad (19)$$

ОПФ для других интегрируемых систем получено, например, в работах [38]–[43].

ПРИМЕР. Пусть $\Omega(z) = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z$, где a_j – постоянные. Тогда уравнение (17) имеет вид

$$L_\pm \frac{2\partial_\pm^{-1}(\sqrt{q})_t}{\sqrt{q}} + (a_{-1} + a_0L_\pm + a_1L_\pm^2) \left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1 \right) = 0. \quad (20)$$

Учитывая тождества

$$\begin{aligned} L_\pm \frac{2\partial_\pm^{-1}(\sqrt{q})_t}{\sqrt{q}} &= -4\partial_\pm^{-1}u_t, & \frac{1}{2} L_\pm \left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1 \right) &= u, \\ L_\pm u &= -2(1 - \partial^2)^{-1}\partial_\pm^{-1}(uq_x + 2qu_x), \end{aligned}$$

получаем интегрируемое уравнение

$$q_t + a_1(2qu_x + q_xu) - \frac{a_0}{2}q_x - \frac{a_{-1}}{4}(\partial - \partial^3)\sqrt{\frac{\omega}{q}} = 0, \quad (21)$$

которое принимает вид уравнения КХ (1) при $a_1 = 1$, $a_0 = a_{-1} = 0$. Поэтому уравнение (21) можно рассматривать как интегрируемый “деформированный” вариант уравнения КХ. Другой выбор постоянных в (21): $a_{-1} = 1$, $a_0 = a_1 = 0$, приводит к обобщенному уравнению Гарри Дима [1], [34], [44]. Если $a_1 = 1$, $a_{-1} = 0$, но $a_0 \neq 0$, то уравнение обычно называют уравнением Дуллина–Готтвальда–Холма [7], [8], [18], [19].

Гамильтониан задачи (18) относительно скобки Пуассона, связанной с гамильтоновым оператором J_1 ,

$$\{A, B\} = - \int (\omega + m) \left(\frac{\delta A}{\delta m} \partial \frac{\delta B}{\delta m} - \frac{\delta B}{\delta m} \partial \frac{\delta A}{\delta m} \right) dx, \quad (22)$$

имеет вид [36]

$$H^\Omega = \int_0^\infty \frac{k^2 \Omega(\lambda^{-1})}{\pi \omega \lambda(k)^2} \ln(1 - \mathcal{R}^\pm(k) \mathcal{R}^\pm(-k)) dk - \frac{2}{\omega} \sum_{n=1}^N \int \frac{\kappa_n^2}{\lambda_n^2} \Omega(\lambda_n^{-1}) d\kappa_n, \quad (23)$$

где гамильтониан выражен в терминах данных рассеяния. В общем случае сложно найти соответствующие выражения в терминах полевых переменных $q(x)$ (или $m(x)$). Например, гамильтониан задачи (21) относительно (22) имеет вид

$$H^\Omega = a_1 H_1^{\text{CH}} - \frac{a_0}{2} I_0 - \frac{a_{-1}}{4} H_{-1}^{\text{CH}},$$

где

$$H_1^{\text{CH}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} m u dx$$

– первый гамильтониан КХ (5),

$$H_{-1}^{\text{CH}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\sqrt[4]{\frac{\omega}{q}} - \sqrt[4]{\frac{q}{\omega}} \right)^2 + \frac{\sqrt{\omega} q_x^2}{4 q^{5/2}} \right] dx \quad (24)$$

– (-1) -й гамильтониан для уравнения КХ, а интеграл

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} m dx = H_0^{\text{CH}} + 2\omega\alpha \quad (25)$$

связан с двумя другими интегралами КХ [34]

$$H_0^{\text{CH}} = \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{q} - \sqrt{\omega})^2 dx, \quad \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1 \right) dx.$$

3. ПИКОННЫЕ РЕШЕНИЯ $(1+2)$ -МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ИЕРАРХИИ КХ

Рассмотрим интегрируемого представителя иерархии КХ с двумя “временными” переменными t и y (ср. [45])

$$q_t + 2(U_{xy} + \eta U_{xx})q + (U_y + \eta U_x + \gamma)q_x = 0, \quad q = U_x - U_{xxx} + \omega, \quad (26)$$

при произвольных постоянных ω , γ и η . Пара Лакса для уравнения (26) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= \left(\frac{1}{4} + \lambda(m + \omega) \right) \Psi, \\ \left(\partial_t - \frac{1}{2\lambda} \partial_y \right) \Psi &= - \left(U_y + \eta U_x + \gamma - \frac{\eta}{2\lambda} \right) \Psi_x + \frac{1}{2} (U_{xy} + \eta U_{xx}) \Psi. \end{aligned}$$

Пара Лакса представляет собой неизоспектральную задачу. Действительно, уравнение (26) можно записать в виде условия совместности

$$\left(\partial_t - \frac{1}{2\lambda} \partial_y \right) \Psi_{xx} = \partial_x^2 \left(\partial_t - \frac{1}{2\lambda} \partial_y \right) \Psi,$$

где λ удовлетворяет условию $\lambda_t - \lambda_y/(2\lambda) = 0$. Ниже, однако, мы предполагаем, что спектр не зависит от t и y , так что можно обобщить решения, полученные для уравнения КХ.

Уравнение (26) можно записать в виде

$$(\sqrt{q})_t + [(U_y + \eta U_x + \gamma)\sqrt{q}]_x = 0. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\partial_{\pm}^{-1}(\sqrt{q})_t + (U_y + \eta U_x + \gamma)\sqrt{q} + \beta = 0, \quad (28)$$

где β – постоянная интегрирования. При $\beta = -\gamma\sqrt{\omega}$ в силу тождеств

$$U_y = -\frac{1}{2}L_{\pm}\left(\frac{\partial_{\pm}^{-1}(\sqrt{q})_y}{\sqrt{q}}\right), \quad U_x = \frac{1}{2}L_{\pm}\left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1\right) \quad (29)$$

уравнение (28) можно записать в виде

$$\frac{\partial_{\pm}^{-1}(\sqrt{q})_t}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2}L_{\pm}\left(\frac{\partial_{\pm}^{-1}(\sqrt{q})_y}{\sqrt{q}}\right) + \left(\frac{\eta}{2}L_{\pm} - \gamma\right)\left(\sqrt{\frac{\omega}{q}} - 1\right) = 0. \quad (30)$$

Учитывая (15), (16), (30) и рассматривая вариации по y и t , получаем линейные уравнения для данных рассеяния

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t^{\pm} - \frac{1}{2\lambda}\mathcal{R}_y^{\pm} \pm 2ik\left(\gamma - \frac{\eta}{2\lambda}\right)\mathcal{R}^{\pm} &= 0, \\ R_{n,t}^{\pm} - \frac{1}{2\lambda_n}R_{n,y}^{\pm} \mp 2\left(\gamma - \frac{\eta}{2\lambda_n}\right)\kappa_n R_n^{\pm} &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где полагаем $\lambda_{n,t} = 0$. Например, при $\gamma = \eta = 0$ решением является любая убывающая определенным образом функция комбинации $t + 2\lambda y$:

$$\mathcal{R}^{\pm}(y, t) = \mathcal{R}^{\pm}(t + 2\lambda y), \quad R_n^{\pm}(y, t) = R_n^{\pm}(t + 2\lambda_n y). \quad (32)$$

Уравнение КХ (1) можно получить при $x = y$, $u = U_x$, $\gamma = \eta = 0$.

Покажем, как можно записать явные пиконные решения этого уравнения при $\gamma = \eta = \omega = 0$. До сих пор мы считали ω строго положительной величиной. При $\omega \rightarrow 0$ мы получаем пиковые солитоны и уравнения для данных рассеяния должны в этом случае остаться верными [46]. Предположим, что $x_k = x_k(t, y)$, $p_k = p_k(t, y)$, и введем обозначения $\varepsilon(x) \equiv \text{sign } x$, $p'_k(t, y) = \partial p_k / \partial y$. Анзац, из которого следует N -пиконное решение уравнения КХ, можно обобщить следующим образом:

$$q(x; t, y) = \sum_{k=1}^N p_k \delta(x - x_k).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} U(x; t, y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k \varepsilon(x - x_k) (1 - e^{-|x-x_k|}), \\ U_y(x; t, y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [p'_k \varepsilon(x - x_k) (1 - e^{-|x-x_k|}) - p_k e^{-|x-x_k|} x'_k], \\ U_{xy}(x; t, y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [p'_k e^{-|x-x_k|} + p_k \varepsilon(x - x_k) e^{-|x-x_k|} x'_k]. \end{aligned}$$

Используя этот анзац и равенство

$$f(x) \delta'(x - x_0) = f(x_0) \delta'(x - x_0) - f'(x_0) \delta(x - x_0),$$

из (26) получаем следующую систему уравнений для величин $x_k(t, y)$, $p_k(t, y)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [p'_k \varepsilon(x_l - x_k) (1 - e^{-|x_l-x_k|}) - p_k e^{-|x_l-x_k|} x'_k], \\ \dot{p}_l &= -\frac{1}{2} p_l \sum_{k=1}^N [p'_k e^{-|x_l-x_k|} + p_k \varepsilon(x_l - x_k) e^{-|x_l-x_k|} x'_k], \end{aligned} \quad (33)$$

где $\dot{x}_k(t, y) = \partial x_k / \partial t$, $\dot{p}_k(t, y) = \partial p_k / \partial t$. Решения этой системы можно получить из N -пиконного решения уравнения КХ [22], [23], где данные рассеяния являются теперь произвольными убывающими определенным образом функциями своего аргумента: $R_n \equiv R_n^+(t + 2\lambda_n y)$. Например, если $N = 1$, то система (33) принимает вид

$$\dot{x}_1 + \frac{1}{2} p_1 x'_1 = 0, \quad \dot{p}_1 + \frac{1}{2} p_1 p'_1 = 0$$

и имеет решение $p_1 = -1/\lambda_1 = \text{const}$, $x_1 = \ln R_1(t + 2\lambda_1 y)$ (ср. [22], [23]). Система (33) для $N = 2$ пиконов (в предположении, что $x_1 < x_2$ при всех y и t , т.е. в случае, для которого N -пиконное решение уравнения КХ получено в работах [22], [23]) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{2} [-p'_2 (1 - e^{-|x_1-x_2|}) - p_1 x'_1 - p_2 e^{-|x_1-x_2|} x'_2], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} [p'_1 (1 - e^{-|x_1-x_2|}) - p_1 e^{-|x_1-x_2|} x'_1 - p_2 x'_2], \\ \dot{p}_1 &= -\frac{1}{2} p_1 [p'_1 + p'_2 e^{-|x_1-x_2|} - p_2 e^{-|x_1-x_2|} x'_2], \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2} p_2 [p'_1 e^{-|x_1-x_2|} + p'_2 + p_1 e^{-|x_1-x_2|} x'_1], \end{aligned} \quad (34)$$

а ее решения суть [22], [23]

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\lambda_1^2 R_1 + \lambda_2^2 R_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)}, & p_2 &= -\frac{R_1 + R_2}{\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2}, \\ x_1 &= \ln \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 R_1 R_2}{\lambda_1^2 R_1 + \lambda_2^2 R_2}, & x_2 &= \ln(R_1 + R_2), \end{aligned}$$

где $R_k = R_k(t + 2\lambda_k y)$ (что несложно проверить). Заметим, что полный импульс $p_1 + p_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_1 \lambda_2)$ сохраняется. В общем случае при произвольном N можно использовать N -пиконное решение уравнения КХ, полученное в работах [22], [23], поскольку метод обратной задачи рассеяния для иерархии (18) совпадает с соответствующим методом для решения уравнения КХ [34], [36]. Единственное отличие имеется в зависимости данных рассеяния от времени (и/или в дополнительной зависимости от y и других параметров). В этом примере y имеет смысл второй “временной” переменной. Ясно, что сохраняющиеся величины в терминах x_k и p_k имеют тот же вид, что и для КХ-пиконов, и их можно выразить через величины λ_k , которые уже предполагаются независимыми от y и t . Однако с гамильтоновой формулировкой имеются проблемы, поскольку для пиконного решения формально $\Omega(z) \equiv 0$ и согласно (23) гамильтониан относительно скобки (22) вырожден. Более того, в правую часть системы (34) входят не только величины x_k и p_k , но и их производные по y .

Для N -солитонных решений иерархии КХ можно таким же образом использовать явную зависимость от данных рассеяния из работы [36]. Если условия $q(x, 0) \equiv m(x, 0) + \omega > 0$ на начальные данные не выполняются, то ситуация оказывается более сложной и требует отдельного рассмотрения [4], [35], [47].

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору А. Константину за возможность посетить Lund University Sweden, где была получена часть результатов, представленных в настоящей работе. Работа поддержана фондом G. Gustafsson Foundation for Research in Natural Sciences and Medicine (Sweden).

Список литературы

- [1] R. Camassa, D. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:11 (1993), 1661–1664.
- [2] H.-H. Dai, *Acta Mech.*, **127**:1–4 (1998), 193–207.
- [3] A. Constantin, W. A. Strauss, *Phys. Lett. A*, **270**:3–4 (2000), 140–148.
- [4] A. Constantin, J. Escher, *Acta Math.*, **181**:2 (1998), 229–243.
- [5] R. S. Johnson, *J. Fluid Mech.*, **455** (2002), 63–82.
- [6] R. S. Johnson, *Fluid Dynam. Res.*, **33**:1–2 (2003), 97–111.
- [7] H. R. Dullin, G. A. Gottwald, D. D. Holm, *Fluid Dynam. Res.*, **33**:1–2 (2003), 73–95.
- [8] H. R. Dullin, G. A. Gottwald, D. D. Holm, *Phys. D*, **190**:1 (2004), 1–14.
- [9] R. I. Ivanov, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, **365**:1858 (2007), 2267–2280; [arXiv:0707.1839](#).
- [10] A. Constantin, D. Lannes, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **192**:1 (2009), 165–186; [arXiv:0709.0905](#).
- [11] D. Ionescu-Kruse, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**:3 (2007), 531–543.
- [12] A. Constantin, W. A. Strauss, *Comm. Pure Appl. Math.*, **53**:5 (2000), 603–610.
- [13] A. Constantin, W. Strauss, *J. Nonlinear Sci.*, **12**:4 (2002), 415–422.
- [14] A. Constantin, H. P. McKean, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:8 (1999), 949–982.
- [15] D. Henry, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 342–347.
- [16] R. Ivanov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 462–468; [arXiv:nlin.SI/0606046](#).
- [17] Z. Liu, Z. Ouyang, *Phys. Lett. A*, **366**:4–5 (2007), 377–381.
- [18] O. G. Mustafa, *Comm. Math. Phys.*, **265**:1 (2006), 189–200.
- [19] O. G. Mustafa, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**:3 (2007), 575–594.
- [20] M. Stanislavova, A. Stefanov, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **18**:1 (2007), 159–186; [arXiv:math.DS/0612321](#).

- [21] R. Camassa, A. Zenchuk, *Phys. Lett. A*, **281**:1 (2001), 26–33.
- [22] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski, *Adv. Math.*, **140**:2 (1998), 190–206.
- [23] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski, *Inverse Problems*, **15**:1 (1999), L1–L4.
- [24] G. Misiołek, *J. Geom. Phys.*, **24**:3 (1998), 203–208.
- [25] A. Constantin, B. Kolev, *Comment. Math. Helv.*, **78**:4 (2003), 787–804.
- [26] A. Constantin, B. Kolev, *J. Nonlinear Sci.*, **16**:2 (2006), 109–122.
- [27] B. Kolev, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **11**:4 (2004), 480–498.
- [28] A. Constantin, R. Ivanov, “The Camassa–Holm equation as a geodesic flow for the H^1 right-invariant metric”, *Topics in Contemporary Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics*, eds. S. Dimiev, K. Sekigawa, World Sci., New York, 2007, 33–41; [arXiv: 0706.3810](#).
- [29] A. Constantin, T. Kappeler, B. Kolev, P. Topalov, *Ann. Global Anal. Geom.*, **31**:2 (2007), 155–180.
- [30] A. Fokas, B. Fuchssteiner, *Lett. Nuovo Cimento*, **28**:8 (1980), 299–303.
- [31] M. Fisher, J. Schiff, *Phys. Lett. A*, **259**:5 (1999), 371–376.
- [32] A. Constantin, R. I. Ivanov, *Lett. Math. Phys.*, **76**:1 (2006), 93–108; [arXiv: nlin.SI/0602049](#).
- [33] R. I. Ivanov, *Z. Naturforsch.*, **61a** (2006), 133–138; [arXiv: nlin.SI/0601066](#).
- [34] A. Constantin, V. S. Gerdjikov, R. I. Ivanov, *Inverse Problems*, **23**:4 (2007), 1565–1597; [arXiv: 0707.2048](#).
- [35] A. Constantin, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **457**:2008 (2001), 953–970.
- [36] A. Constantin, V. S. Gerdjikov, R. I. Ivanov, *Inverse Problems*, **22**:6 (2006), 2197–2207; [arXiv: nlin.SI/0603019](#).
- [37] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [38] D. J. Kaup, *J. Math. Anal. Appl.*, **54**:3 (1976), 849–864.
- [39] V. S. Gerdjikov, E. H. Hristov, *Bulgar J. Phys.*, **7**:1 (1980), 28–41; **7**:2 (1980), 119–133.
- [40] V. S. Gerdjikov, *Inverse Problems*, **2**:1 (1986), 51–74.
- [41] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, *Inverse Problems*, **8**:6 (1992), 831–847.
- [42] V. S. Gerdjikov, A. B. Yanovski, *J. Math. Phys.*, **35**:7 (1994), 3687–3725.
- [43] I. D. Iliev, E. Kh. Khristov, K. P. Kirchev, *Spectral Methods in Soliton Equations*, Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **73**, Pitman, New York, 1994.
- [44] A. S. Fokas, P. J. Olver, P. Rosenau, “A plethora of integrable bi-Hamiltonian equations”, *Algebraic Aspects of Integrable Systems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **26**, eds. A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Birkhäuser, Boston, 1997, 93–101.
- [45] P. Clarkson, P. Gordoa, A. Pickering, *Inverse Problems*, **13**:6 (1997), 1463–1476.
- [46] A. Boutet de Monvel, D. Shepelsky, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**:10 (2006), 627–632.
- [47] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **117**:2 (2006), 149–164.