Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов, Авторезонансные асимптотики в осциллирующей системе со слабой диссипацией, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 102–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:43:48

© 2009 г.

Л. А. Калякин*, М. А. Шамсутдинов†

АВТОРЕЗОНАНСНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ СО СЛАБОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Исследована система двух дифференциальных уравнений первого порядка, которая возникает при усреднении нелинейных осциллирующих систем по быстрым одночастотным колебаниям. Рассматривается ситуация, когда исходная система содержит малые диссипативные слагаемые. Построена асимптотика двухпараметрического решения с неограниченно растущей амплитудой. Этот результат дает ключ к пониманию авторезонанса в слабо диссипативных системах как явления значительного роста вынужденных нелинейных колебаний, инициированных малой внешней накачкой.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, возмущение, малый параметр, асимптотика, резонанс, диссипация.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи. Цель данной статьи – разработка подходов к анализу явления авторезонанса в нелинейных осциллирующих системах с диссипацией. Объектом исследования является система уравнений главного резонанса

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= f(\theta) \sin \psi - \beta\rho, \\ \rho \left[\frac{d\psi}{d\theta} + \lambda\theta - \rho^2 \right] &= g(\theta) \cos \psi, \quad \beta, \lambda = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Наличие диссипации связывается с положительным коэффициентом β . Специфика задачи заключается в неограниченном росте одного из переменных коэффициентов: $f(\theta) = f_0 + f_1\theta$, $f_1 \neq 0$, $g(\theta) = g_0 + g_1\theta$. Для определенности будем считать, что $f_1 < 0$. Это условие на знак f_1 не принципиально ввиду инвариантности уравнений относительно замены $\psi \rightarrow \psi + \pi$ и $f, g \rightarrow -f, -g$. В системах типа (1), которые связаны с приложениями, коэффициенты в правых частях обычно совпадают: $f \equiv g$.

*Институт математики с ВЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: klenru@mail.ru

†Башкирский государственный университет, Уфа, Россия.
E-mail: shamsutdinovMA@bsu.bashedu.ru

Однако в рассматриваемых ниже асимптотических конструкциях такая специфика уравнений не нужна. Допущение $f \neq g$ представляет собой простое математическое обобщение, которое указывает на возможность переноса результатов на более общие системы¹⁾.

Центральным результатом статьи является построение асимптотики на бесконечности для двухпараметрического решения с растущей амплитудой $\rho(\theta) \approx \sqrt{\lambda\theta}$, $\theta \rightarrow \infty$. Такие решения описывают начальный этап авторезонанса.

1.2. Истоки задачи. Авторезонансом принято называть явление, которое наблюдается в нелинейных осцилляторах под действием малых возмущений с переменной частотой накачки. Суть его состоит в значительном изменении амплитуды колебаний (либо энергии) системы благодаря резонансу, который автоматически поддерживается в течение длительного времени. В нелинейной физике известно много приложений этого явления [1]. Нахождение условий существования таких состояний составляет основную задачу теории авторезонанса.

Для системы с одной степенью свободы в качестве примера исходной математической модели можно рассмотреть уравнение нелинейного осциллятора с малыми возмущениями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + U'(x) = -\beta_0 \frac{dx}{dt} + \varepsilon F(t) \cos \phi(t). \quad (2)$$

Здесь потенциал U является гладкой функцией с асимптотикой $U(x) = x^2/2 + \gamma x^4/4 + \mathcal{O}(x^6)$, $x \rightarrow 0$, так что точка $x = 0$ является устойчивым положением равновесия невозмущенного осциллятора. Правая часть представляет собой возмущение с малыми множителями $0 < \beta_0, \varepsilon \ll 1$ и с медленно меняющимися частотой $\phi'(t) = \omega + \alpha t$ и амплитудой $F = f_0 + \delta t$; последнее означает, что $|\alpha| \ll 1$, $|\delta| \ll 1$. Конкретный пример такого типа системы дают задачи магнитодинамики для тонкой ферромагнитной пленки в слабом внешнем магнитном поле [2]. Исследуются решения с начальными значениями вблизи положения равновесия $|x(0)|, |\dot{x}(0)| \ll 1$. Возникновение авторезонанса в такой системе при $\beta_0 = 0$ проанализировано в работах [3].

Принципиальной особенностью постановки задачи является резонансное условие $\phi'(0) = 1$ совпадения вынуждающей частоты в начальный момент с собственной частотой линеаризованного осциллятора. Авторезонансу соответствуют осциллирующие решения возмущенной задачи, амплитуда которых на далеких временах нарастает до величины порядка единицы при том, что возмущение остается малым. Для таких решений главный член асимптотики по малым параметрам представляет собой свободные колебания невозмущенной нелинейной системы с частотой $\Omega(E)$, которая зависит от энергии и медленно меняется. Из резонансного соотношения $\Omega(E) = \phi'(t)$ определяется медленная эволюция энергии $E(t)$ на далеких временах [4].

Захват в такой резонанс случается не всегда и зависит от начальной точки. Вопрос о существовании авторезонанса решается на начальном этапе, и именно здесь

¹⁾ Например, на месте тригонометрических функций $\sin \psi$, $\cos \psi$ могут быть общие периодические функции.

возникают уравнения типа (1) [3]. Они получаются при усреднении исходных уравнений с малым параметром [5]. Функции $\rho(\theta)$, $\psi(\theta)$ представляют собой медленно меняющиеся амплитуду и сдвиг фазы быстрых гармонических колебаний. В случае уравнения (2) асимптотический анзац удобно брать в виде

$$x(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} \frac{2 \operatorname{sign} \gamma}{\sqrt{3|\gamma|}} \rho(\theta) \cos(\phi + \psi(\theta)) + O(\varepsilon^{2/3}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \theta = \varepsilon^{2/3} t. \quad (3)$$

Эта формула описывает асимптотическую связь между решениями исходного уравнения (2) и решениями усредненных уравнений (1). При этом коэффициенты в (1) должны быть взяты из соотношений: $\beta = \beta_0/2\varepsilon$, $\lambda = \alpha/\varepsilon^{4/3} \operatorname{sign} \gamma$, $f_1 = g_1 = -\delta\sqrt{3|\gamma|}/4\varepsilon^{2/3}$, $f_0 = g_0 = -F_0\sqrt{3|\gamma|}/4$.

В усредненных уравнениях (1) никаких малых параметров не предполагается; для их решений исследуется асимптотика на бесконечности по времени θ . Авторезонанс связывается с существованием решений, которые имеют неограниченно растущую по времени амплитуду $\rho(\theta)$. Подобная задача хорошо исследована в отсутствие диссипации и при постоянной амплитуде накачки. Поскольку в этом случае часть коэффициентов обращается в нуль: $\beta, f_1, g_1 = 0$, то уравнения упрощаются, и для них установлено существование двухпараметрического семейства решений с неограниченно растущей амплитудой [6]. Этот результат дает ответ на вопрос о существовании авторезонанса в бездиссипативных системах.

Следует указать, что в бездиссипативном случае (при $\beta = 0$) уравнения (1) связаны с важными задачами астрофизики, и они многократно исследовались (см., например, [7]). Важные результаты получены с использованием идей адиабатических приближений, которые соответствуют асимптотике при $\lambda \rightarrow 0$ [8]–[10]. Однако надо иметь в виду, что во многих ситуациях, встречающихся в приложениях, множитель λ не мал, и поэтому адиабатические приближения не применимы. В частности, в задачах, связанных с ускорением релятивистских частиц и с нагревом плазмы, величина λ^{-1} соответствует характерному времени существенного изменения энергии системы, поэтому параметры накачки (внешние возмущения) желательно выбирать так, чтобы это время не было велико (см., например, [11], с. 178).

Кроме того, в реальных физических системах, в частности в магнитодинамике, всегда присутствуют диссипативные эффекты, которые могут быть малыми и тем не менее ведут к сравнительно быстрому затуханию свободных колебаний. При малой амплитуде внешней накачки диссипация может привести к полному подавлению резонансных эффектов. В частности, в уравнении типа (2) при $\beta_0 > 0$ с постоянной амплитудой накачки авторезонанс невозможен²⁾. Этот факт легко устанавливается из усредненных уравнений (1): в случае $f_1 = 0$ и $\beta > 0$ не существует решений с неограниченно растущей амплитудой.

Чтобы компенсировать диссипативные потери энергии и удержать систему в авторезонансном режиме, предлагается медленно увеличивать амплитуду внешней накачки: $F = f_0 + f_1\theta$. Как раз на этом пути возникают уравнения (1) с $f_1 \neq 0$, которые

²⁾Как показано в работах [12], при параметрическом возмущении в системе с малой диссипацией авторезонанс возможен при постоянной амплитуде накачки.

имеют подходящие решения с растущей амплитудой. Заметим, что в главном члене асимптотики рост амплитуды колебаний $\rho(\theta) \approx \sqrt{\lambda\theta}$, $\theta \rightarrow \infty$, не связан с ростом амплитуды возмущения $f_1\theta$. Более того, при $\delta = O(\varepsilon^{2/3})$, $\alpha = O(\varepsilon^{4/3})$ на временах $t \approx \alpha^{-1}$, характерных для авторезонанса, амплитуда накачки, несмотря на рост, остается малой: $\varepsilon F = O(\varepsilon^{1/3})$. Получаемый здесь эффект с изменением энергии на величину порядка единицы обязан авторезонансу.

2. СТЕПЕННЫЕ АСИМПТОТИКИ

Асимптотические решения с растущей амплитудой проще всего построить в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами:

$$\rho(\theta) = \sqrt{\lambda\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \theta^{-k/2}, \quad \psi(\theta) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \theta^{-k/2}. \quad (4)$$

Подстановка этих функций в уравнения и приравнивание выражений при одинаковых степенях дает рекуррентные формулы для определения коэффициентов. На исходном шаге получается тривиальное уравнение $\sin \psi_0 = 0$, которое имеет два корня $\psi_0 = 0$ и $\psi_0 = \pi$. Все последующие коэффициенты ρ_k , ψ_k находятся однозначно и зависят от выбора ψ_0 . В частности, $\rho_0 = \mp g_1/2\lambda$, $\psi_1 = \pm \beta \sqrt{\lambda}/f_1$, $\rho_1 = \pm 3g_1^2/8\lambda^{5/2}$. Таким способом получаются два асимптотических решения. Одно из них соответствует единственному точному решению, другое соответствует однопараметрическому семейству точных решений, которые экспоненциально близки при $\theta \rightarrow \infty$ [13]. Однако этих результатов недостаточно для предсказания явления авторезонанса. В физических экспериментах авторезонанс обнаруживается лишь в тех системах, математические модели которых допускают достаточно богатое семейство авторезонансных решений: это значит, что двухпараметрическое решение необходимо в случае одной степени свободы.

3. АСИМПТОТИКИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ

Одно из полученных выше решений с растущей амплитудой оказывается устойчивым. Вблизи него можно построить двухпараметрическое семейство решений. Их асимптотика описывается степенными рядами, коэффициенты которых зависят от времени и быстро осциллируют. Сформулируем основной результат для главных членов асимптотики.

ТЕОРЕМА. Пусть $\lambda > 0$ и $(1 + g_1/f_1)\beta > 0$. Тогда для уравнений (1) существует двухпараметрическое семейство решений, которые имеют асимптотику

$$\rho(\theta) = \sqrt{\lambda\theta}[1 + o(\theta^{-1/4})], \quad \psi(\theta) = o(1), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Доказательство теоремы содержит конструкцию полного асимптотического разложения. Формальные построения удобно проводить, выделив из амплитуды главную, растущую часть асимптотики³⁾:

$$\rho(\theta) = \sqrt{\lambda\theta} + \theta^{1/4} r_0 r(\theta), \quad r_0 = \sqrt{-f_1/(4\lambda)}^{1/4} = \text{const}. \quad (6)$$

³⁾ Существует двухпараметрическое решение с ограниченной амплитудой, которое здесь не рассматривается.

При указанной нормировке остатка $r(\theta)$ уравнения приобретают форму, удобную для дальнейшего асимптотического анализа:

$$\frac{dr}{d\theta} + \nu\theta^{3/4} \sin \psi = F(r, \psi, \theta), \quad \frac{d\psi}{d\theta} - \nu\theta^{3/4} r = G(r, \psi, \theta). \quad (7)$$

Здесь $\nu = \sqrt{-2f_1} \cdot \lambda^{1/4}$, а правые части определяются выражениями

$$\begin{aligned} F(r, \psi, \theta) &= -\theta^{1/4} \left(\beta + \frac{1}{2} \theta^{-1} \right) \frac{\sqrt{\lambda}}{r_0} - \left(\beta + \frac{1}{4} \theta^{-1} \right) r + \theta^{-1/4} \frac{f_0}{r_0} \sin \psi, \\ G(r, \psi, \theta) &= \theta^{1/2} r_0^2 r^2 + \theta^{1/2} \frac{g_1 + g_0 \theta^{-1}}{\sqrt{\lambda} + \theta^{-1/4} r_0 r} \cos \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видим, главные члены уравнений при $\theta \rightarrow \infty$ представлены левыми частями и соответствуют системе математического маятника. Дальнейшее построение можно выполнять разными способами. Наиболее коротким и прозрачным представляется подход, основанный на стандартном переходе к переменным типа действие–угол в главной части уравнений. Для этой цели используется пара функций, которые являются общим решением автономной системы математического маятника

$$\frac{dR_0}{d\eta} + \sin \Psi_0 = 0, \quad \frac{d\Psi_0}{d\eta} - R_0 = 0.$$

Считается, что такое решение $R_0(\eta; I)$, $\Psi_0(\eta; I)$ параметризовано действием I , которое на периодических решениях соответствует площади, охватываемой фазовой траекторией. Отметим, что период $T(I)$ и частота $\omega(I) = 2\pi/T > 0$ зависят от параметра I , т.е. от выбора фазовой траектории. Действие связано с первым интегралом (с энергией) $P_0^2/2 - \cos \Psi_0 = E(I)$ соотношением $\omega dI = dE$. Далее рассматриваются значения энергии $-1 < E < 1$, соответствующие периодическим решениям.

Путем перенормировки независимой переменной из этих решений строятся функции двух переменных $R(\varphi, I) = R_0(\varphi/\omega(I); I)$, $\Psi(\varphi, I) = \Psi_0(\varphi/\omega(I); I)$, 2π -периодические по φ . Они используются для замены переменных по формулам $r(\theta) = R(\varphi, I)$, $\psi(\theta) = \Psi(\varphi, I)$. В силу тождеств

$$\omega \partial_\varphi R = -\sin \Psi, \quad \omega \partial_\varphi \Psi = R, \quad \frac{R^2}{2} - \cos \Psi = E(I), \quad \frac{dE}{dI} = \omega(I) \quad (9)$$

якобиан преобразования равен единице, $\partial(R, \Psi)/\partial(\varphi, I) = 1$, и уравнения для новых переменных $I(\theta)$, $\varphi(\theta)$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\theta} &= F(R, \Psi, \theta) \partial_\varphi \Psi - G(R, \Psi, \theta) \partial_\varphi R, \quad R = R(\varphi, I), \quad \Psi = \Psi(\varphi, I), \\ \frac{d\varphi}{d\theta} - \nu\theta^{3/4} \omega(I) &= -F(R, \Psi, \theta) \partial_I \Psi + G(R, \Psi, \theta) \partial_I R. \end{aligned} \quad (10)$$

Основная цель дальнейшего изложения – доказать, что имеется двухпараметрическое решение $I(\theta)$, $\varphi(\theta)$, у которого действие стремится к нулю на бесконечности: $I(\theta) \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$.

Правые части в (10) содержат функции, гладкие при $I > 0$ и 2π -периодические по φ . При $\theta \rightarrow \infty$ эти функции растут не быстрее, чем $O(\theta^{1/2})$. Поэтому для больших θ главные члены уравнений содержатся в левых частях. Структура уравнений соответствует задачам с малым параметром, которые решаются методом усреднения или двухмасштабных разложений [5], [14]. Формально дело можно свести к таким задачам путем замены независимой переменной $\theta = \tau/\mu$ с использованием малого параметра $0 < \mu \ll 1$. Это позволяет выписать для получаемых таким образом уравнений асимптотики при $\mu \rightarrow 0$. После этого надо сделать обратную замену $\tau = \mu\theta$, чтобы получить асимптотику при $\theta \rightarrow \infty$. Очевидно, в получаемых таким образом формулах не должен содержаться искусственно введенный параметр μ . Однако чтобы проверить это свойство, надо в коэффициентах асимптотики выявить структуру их зависимости от τ , используя специфику уравнений. Такой способ построения асимптотики по времени не сулит упрощений⁴⁾ и не используется в формальных конструкциях даже для линейных уравнений [16]. Поэтому для простоты мы используем лишь идеи двухмасштабных разложений без введения дополнительного малого параметра. Обсуждаемый подход не нов и применялся ранее для анализа решений уравнений Пенлеве в главных членах асимптотики [17]. Формализация этого подхода для общих систем двух уравнений изложена в работе [18]. В конечном счете проблема состоит не столько в способах асимптотического упрощения задачи, сколько в анализе предельно упрощенного уравнения. Таковым здесь оказывается уравнение для среднего значения действия.

Различия в уравнениях для действия и угла указывают на разную по порядку величины $\theta \rightarrow \infty$ скорость изменения функций $I(\theta)$ и $\varphi(\theta)$. Как и в задачах с малым параметром, это свойство дает возможность выделить быструю и медленную переменные и разделить уравнения в асимптотической конструкции. В анзаце для действия I удобно использовать в качестве быстрой переменной угол $\varphi = \varphi(\theta)$. Решение можно искать в виде функции двух переменных $I = \tilde{I}(\varphi, \theta)$, считая зависимость I от θ более медленной по сравнению с $\varphi(\theta)$. Это означает, что $\tilde{I}$ строится в классе функций, обладающих свойством $\partial_\theta \tilde{I}(\varphi, \theta) = o(\varphi'(\theta))$, $\theta \rightarrow \infty$. На первом этапе функция $\varphi = \varphi(\theta)$ в такой конструкции остается неизвестной и в $\tilde{I}(\varphi, \theta)$ входит в качестве независимой переменной. Функция $\varphi(\theta)$ (точнее, ее асимптотика при $\theta \rightarrow \infty$) находится на втором этапе после определения асимптотики для $\tilde{I}(\varphi, \theta)$.

Как обычно, в таком подходе возникают усреднения по быстрой переменной φ . Нетрудно показать, что кандидат на неубывающую на бесконечности часть действия $I(\theta)$ содержится в среднем значении функции $\tilde{I}(\varphi, \theta)$. К несчастью, уравнение для среднего значения не извлекается тривиальным усреднением по φ исходных уравнений (10); из-за медленного убывания правых частей конструкция оказывается более сложной.

Чтобы упростить формализм и сделать его пригодным для построения полного асимптотического решения, можно строить действие в виде функции от трех

⁴⁾ Кроме того, в рассматриваемых задачах при использовании асимптотик по малому параметру μ требуется их обоснование на бесконечном временном промежутке $\tau \in [\mu\tau_0, \infty)$, $\tau_0 = \text{const} > 0$. Здесь опять не обойтись без специфики возникающих уравнений, поскольку даже для гамильтоновых систем обоснование имеется лишь до экспоненциально далеких времен [15].

переменных: $I(\theta) = \mathbf{I} + J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)$ [18]. Быстрая переменная $\varphi = \varphi(\theta)$ содержится лишь в осциллирующей части, которая имеет нулевое среднее $\langle J \rangle = 0$; здесь и далее угловыми скобками обозначается среднее значение по переменной φ . Оставшаяся зависимость от времени θ характеризует медленные изменения и содержится как в осциллирующей части J , так и в функции $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\theta)$, которую будем называть средним значением действия.

Асимптотика осциллирующей части строится в виде степенного ряда

$$J(\mathbf{I}, \varphi, \theta) = \theta^{-1/4} J_1(\varphi, \mathbf{I}) + \sum_{k=2}^{\infty} \theta^{-k/4} J_k(\varphi, \mathbf{I}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Коэффициенты ряда зависят от двух переменных, и их вычисление не представляет труда. Асимптотика функции $\mathbf{I}(\theta)$ определяется отдельно. Ее структура оказывается далеко не тривиальной и может включать дробные степени и логарифмы [18].

Выбранный для действия анзац представляет собой аналог двухмасштабного разложения. Непривычным здесь является включение среднего значения $\mathbf{I}$ в коэффициенты ряда (11). Конечно, эту зависимость можно исключить, если удастся подобрать асимптотический анзац для функции $\mathbf{I}(\theta)$ и с учетом его переразложить ряд (11). Однако разложение в форме (11) оказывается более удобным. Оно не приводит к значительным проблемам при выяснении рекуррентной структуры формул для коэффициентов⁵⁾. Кроме того, в таком подходе задачи для осциллирующей части $J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)$ и для среднего значения действия $\mathbf{I}(\theta)$ удается разделить так же, как разделили задачи для действия и угла⁶⁾, и локализовать все проблемы в уравнении для среднего значения $\mathbf{I}(\theta)$. Основой для такого разделения служит усредненное уравнение

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = \langle [F(R, \Psi, \theta) \partial_{\varphi} \Psi(\varphi, I) - G(R, \Psi, \theta) \partial_{\varphi} R(\varphi, I)]_{I=\mathbf{I}+J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)} \rangle. \quad (12)$$

Подчеркнем, что это полное усредненное уравнение содержит всю осциллирующую часть действия $J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)$, т.е. все порядки приближения. В этом состоит отличие от тривиального усреднения исходного уравнения (10), когда I просто заменяется на среднее значение $\mathbf{I}$.

Обычно поправки к главному члену асимптотики строятся последовательно в классе функций, периодических по быстрой фазе. При этом среднее значение каждой поправки определяется на последующих шагах из требования периодичности. Мы налагаем это требование сразу для всех порядков, что приводит к уравнению (12) для полного среднего (во всех порядках). Такой подход позволяет отделить задачу по определению среднего от задачи по определению оставшейся осциллирующей части с нулевым значением среднего. Аналог этой идеи можно усмотреть

⁵⁾В подобных ситуациях средние значения коэффициентов асимптотики обычно определяются из секулярных условий на последующих шагах. Из-за этого иногда возникает иллюзия зацепления формул вверх по номерам [19].

⁶⁾Подчеркнем, что речь идет о разделении переменных в асимптотических конструкциях при $\theta \rightarrow \infty$. Получаемые формулы не дают информации о решениях при конечном значении θ .

в конструкции Крылова–Боголюбова, когда выписываются уравнения для амплитуды и фазы (см. [5], с. 43). При вычислениях с конечной степенью точности функция J заменяется на отрезок ряда соответствующей длины. Нетрудно понять, что из-за медленного убывания правой части уравнения (12) для вычисления главного члена асимптотики среднего действия $\mathbf{I}(\theta)$ могут потребоваться несколько первых членов асимптотики осциллирующей части действия.

У авторов имеется соображение, что уравнение (12) обеспечивает правильную асимптотику во всех порядках. Доказательство этого утверждения требует не вполне тривиальных выкладок, которые будут приведены в отдельной работе. Для старшего члена асимптотики приводимый результат совпадает с тем, который получается при использовании стандартной процедуры усреднения.

Таким образом, исходная пара дифференциальных уравнений заменяется на пару уравнений для фазы $\varphi(\theta)$ и для усредненного действия $\mathbf{I}(\theta)$. Две произвольные константы возникают при интегрировании этих уравнений. Они соответствуют двум параметрам в искомом решении.

Задача по определению осциллирующей части действия J , по сути дела, сводится к тривиальным алгебраическим уравнениям. В самом деле, с учетом усредненного уравнения (12) исходное уравнение для действия (10) записывается в виде уравнения в частных производных для функции трех переменных $J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)$. Для дальнейшего анализа удобно для части слагаемых использовать обозначения через F, G из (8):

$$\begin{aligned} \nu\omega(\mathbf{I} + J) \partial_\varphi J = & -\theta^{-3/4} [\partial_\theta J + (1 + \partial_I J) \langle F(R, \Psi, \theta) \partial_\varphi \Psi - G(R, \Psi, \theta) \partial_\varphi R \rangle] - \\ & - \theta^{-3/4} [F(R, \Psi, \theta) \partial_I \Psi - G(R, \Psi, \theta) \partial_I R] \partial_\varphi J + \\ & + \left[\frac{f_0}{r_0} \theta^{-1} \sin \Psi - \theta^{-3/4} \left(\beta + \frac{1}{4} \theta^{-1} \right) R - \theta^{-1/2} \frac{\sqrt{\lambda}}{r_0} \left(\beta + \frac{1}{2} \theta^{-1} \right) \right] \partial_\varphi \Psi - \\ & - \theta^{-1/4} \left[r_0^2 R^2 + \frac{g_1 + g_0^{-1}}{\sqrt{\lambda} + \theta^{-1/4} r_0 R} \right] \partial_\varphi R. \end{aligned} \quad (13)$$

Хотя в целом это уравнение выглядит громоздко, но главное при $\theta \rightarrow \infty$ слагаемое представлено весьма простой левой частью. Такая структура уравнения позволяет эффективно строить асимптотику для $J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)$ при $\theta \rightarrow \infty$ в виде ряда (11). Коэффициенты определяются по рекуррентным формулам однозначно в классе периодических функций с нулевым средним значением $\langle J_k(\varphi, \mathbf{I}) \rangle = 0$, поскольку правые части на каждом шаге имеют нулевое среднее в силу уравнения (12). Дело сводится к интегрированию по φ , переменная $\mathbf{I}$ присутствует в этих формулах в качестве параметра. В частности, на первом шаге получается следующее выражение в терминах функции $R(\varphi, \mathbf{I})$:

$$J_1(\varphi, \mathbf{I}) = \frac{1}{\nu\omega(\mathbf{I})} \left[\frac{g_1}{\sqrt{\lambda}} E(\mathbf{I}) R(\varphi, \mathbf{I}) - \frac{1}{3} \left(r_0 + \frac{g_1}{2\sqrt{\lambda}} \right) R^3(\varphi, \mathbf{I}) \right]. \quad (14)$$

Для сформулированной выше теоремы старшие поправки осциллирующей части действия $\theta^{-k/4} J_k(\varphi, \mathbf{I})$, $k \geq 1$, не нужны. Тем не менее некоторое число первых поправок используется для вычисления главного члена асимптотики среднего значения $\mathbf{I}(\theta)$ и для оценки остатка. Из грубого анализа усредненного уравне-

ния (12) можно заключить, что для идентификации неубывающих членов асимптотики функции $\mathbf{I}(\theta)$ требуются слагаемые из правой части до порядка $O(\theta^{-1})$. Это ведет к необходимости вычисления осциллирующей части (11) до порядка $O(\theta^{-6/4})$. Однако главный член асимптотики (с грубой оценкой остатка) можно вычислить, используя лишь формулу для первой поправки (14). При этом важную роль играют тождества (9) и структура уравнения (13).

В правой части усредненного уравнения (12) выделим неубывающие члены асимптотики при $\theta \rightarrow \infty$. На первом этапе в силу соотношений (14), (9) в правой части остаются два интеграла среднего значения:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = & \theta^{1/2} \frac{g_1}{\sqrt{\lambda}} \left\langle E(\mathbf{I} + J) \frac{d}{d\varphi} \left[R - \theta^{-1/4} \frac{r_0}{2\sqrt{\lambda}} R^2 + \theta^{-1/2} \frac{r_0^2}{6\lambda} R^3 \right] \right\rangle - \\ & - \frac{\beta}{\omega(\mathbf{I})} \langle R^2(\varphi, \mathbf{I}) \rangle + O(\theta^{-1/4}), \quad \theta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь полная производная $d/d\varphi$ означает дифференцирование по φ сложных функций типа $R(\varphi, \mathbf{I} + J(\varphi, \mathbf{I}, \theta))$. Первый интеграл после взятия по частям можно преобразовать, выделив из него неубывающие слагаемые с учетом структуры первой поправки (14):

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = -\theta^{1/2} \frac{g_1}{\sqrt{\lambda}} \langle \omega(\mathbf{I} + J) R(\varphi, \mathbf{I} + J) \partial_\varphi J \rangle - \frac{\beta}{\omega(\mathbf{I})} \langle R^2(\varphi, \mathbf{I}) \rangle + O(\theta^{-1/4}).$$

На следующем этапе следует заменить производную $\partial_\varphi J$ в силу уравнения (13). Это позволяет исключить члены главного порядка $O(\theta^{1/2})$. Использование еще раз тождеств (9) и структуры первой поправки (14) приводит к доказательству обращения в нуль среднего значения в членах порядка $O(\theta^{1/4})$. В итоге усредненное уравнение приводится к виду

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = -\frac{\beta}{\omega(\mathbf{I})} \left(1 + \frac{g_1}{f_1} \right) \langle R^2(\varphi, \mathbf{I}) \rangle + O(\theta^{-1/4}), \quad (15)$$

в котором правая часть не содержит слагаемых, растущих при $\theta \rightarrow \infty$. Оценка остатка здесь является равномерной по $\mathbf{I}$ на любом компакте в области, где решение маятника $R_0(\psi, \mathbf{I})$, $\Psi_0(\psi, \mathbf{I})$ остается периодическим по ψ . Поскольку в правой части уравнения (15) главный член асимптотики является отрицательной величиной, то среднее значение действия $\mathbf{I}(\theta)$ не может оставаться строго положительной величиной. После этого аналогично [3] можно доказать существование однопараметрического асимптотического решения $\mathbf{I}(\theta)$, которое стремится к нулю на бесконечности⁷⁾. Второй параметр появляется в функции $\varphi(\theta)$ при интегрировании фазового уравнения из системы (10). Поскольку действие $I(\theta) = \mathbf{I}(\theta) + J(\varphi, \mathbf{I}, \theta)$ стремится к нулю на бесконечности, то ввиду формул (6) и выбранной замены переменных получаем требуемую асимптотику для функций $r(\theta)$, $\psi(\theta)$. Это завершает доказательство теоремы.

⁷⁾При доказательстве следует проявить осторожность, так как в правой части остаток имеет слабую особенность $O(\sqrt{\mathbf{I}})$ при $\mathbf{I} \rightarrow 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-92436) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2215.2008.01).

Список литературы

- [1] B. Meerson, L. Friedland, *Phys. Rev. A*, **41**:9 (1990), 5233–5236; I. Fajans, L. Friedland, *Amer. J. Phys.*, **69**:10 (2001), 1096–1102.
- [2] В. Деринг, “Инерция границ между ферромагнитными областями”, *Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных полях*, ред. С. В. Вонсовский, Иностранная литература, М., 1952, 312–320; М. А. Шамсутдинов, И. Ю. Ломакина, В. Н. Назаров, А. Т. Харисов, Д. М. Шамсутдинов, *Ферро- и антиферромагнитодинамика*, Нелинейные колебания, волны и солитоны, Гилем, Уфа, 2007.
- [3] Л. А. Калякин, *Докл. РАН*, **378**:5 (2001), 594–597; *ТМФ*, **137**:1 (2003), 142–152; “Авторезонанс в динамической системе”, *Асимптотические методы функционального анализа*, Современ. матем. и ее прил., **5**, АН Грузии, Институт кибернетики, Тбилиси, 2003, 79–109.
- [4] Л. А. Калякин, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 449–452.
- [5] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [6] Л. А. Калякин, “Обоснование асимптотик для уравнений главного резонанса”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **9**, № 1, 2003, 88–101.
- [7] A. T. Sinclair, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **160** (1972), 169–187.
- [8] А. И. Нейштадт, *ПММ*, **39**:4 (1975), 621–632.
- [9] R. Haberman, E. K. Ho, *J. Appl. Mech.*, **62**:4 (1995), 941–946.
- [10] A. P. Itin, A. I. Neishtadt, A. A. Vasiliev, *Phys. D*, **141**:3–4 (2000), 281–296.
- [11] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, *Теория циклических ускорителей*, Физматгиз, М., 1962.
- [12] Л. А. Калякин, Р. Н. Гарифуллин, М. А. Шамсутдинов, *ЖВМ и МФ*, **47**:7 (2007), 1208–1220; Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов, Р. Н. Гарифуллин, Р. К. Салимов, *Физика металлов и металловедение*, **104**:2 (2007), 115–128.
- [13] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Изд-во МГУ, М., 1996.
- [14] Г. Е. Кузмак, *ПММ*, **23**:3 (1959), 515–526; В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНТИ, М., 1985, 5–290.
- [15] А. И. Нейштадт, *ПММ*, **48**:2 (1984), 197–204.
- [16] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.
- [17] P. Boutroux, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **30** (1913), 255–375; **31** (1914), 99–159; N. Joshi, “Asymptotic Studies of the Painlevé Equations”, *The Painlevé Property. One Centure Later*, CRM Ser. Math. Phys., ed. R. Conte, Springer, New York, 1999, 181–227.
- [18] Л. А. Калякин, “Асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым”, *Итоги науки и техники. Современ. матем. и ее прил.*, **53**, 2008, 138–160.
- [19] Л. А. Калякин, *Докл. РАН*, **360**:3 (1998), 328–331.