Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Лебле, Квантовые поправки к статическим решениям моделей синус-Гордон и Нама в терминах обобщенной дзета-функции, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 122–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:23:48

© 2009 г.

С. Б. Лебле*

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ К СТАТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЯМ МОДЕЛЕЙ СИНУС-ГОРДОН И НАМА В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

В терминах класса нелинейных уравнений Клейна–Гордона–Фока рассмотрены одномерные модели Янга–Миллса–Нама и синус-Гордон. Квантование модели выполнено с помощью метода обобщенной дзета-функции, а представления этой квантовой теории построены с помощью диагональной функции Грина для уравнения теплопроводности с эллиптическим потенциалом с применением решений уравнения Эрмита. Сформулирован альтернативный подход, основанный на функции Бейкера–Ахиезера для уравнения Кадомацева–Петвиашвили. Вычислены квантовые поправки к действию моделей Нама и синус-Гордон. Исследованы поля из класса эллиптических функций. В связи с возможными применениями квантованных солитонов модели синус-Гордон в физике твердого тела с помощью модели Френкеля–Конторовой или с помощью других моделей произведен учет дополнительных переменных произвольных размерностей. Для модели Нама, поле которой по построению представлено эллиптическим интегралом (лемнискатой), масса поля Янга–Миллса совпадает с поправкой, вычисляемой с помощью гиперэллиптического интеграла.

Ключевые слова: квантовые поправки, уравнение синус-Гордон, модель Нама, обобщенная дзета-функция, эллиптические решения, уравнение Эрмита.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общие замечания. В настоящей работе рассматривается одномерная полевая теория, которая базируется на нелинейных уравнениях Клейна–Гордона–Фока и появляется, например, в моделях Френкеля–Конторовой для дислокационных дефектов кристаллических структур [1] или в релятивистских моделях [2], принимая вид уравнения синус-Гордон (СГ). Также учитываются дополнительные размерности, с помощью которых удастся проследить за физическим содержанием соответствующих явлений. Основная задача настоящей работы состоит в вычислении квантовых поправок к действию с помощью дзета-функционального представления однопетлевой поправки в фейнмановской теории в формализме ядра уравнения теплопроводности. Выводятся явные выражения, которые могут быть использованы

*Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland. E-mail: leble@mif.pg.gda.pl

впоследствии в теории твердого тела в различных размерностях, в которой делается различие между вкладами от кинков и от эллиптических солитонов.

Теория поля Янга–Миллса обладает помимо всего прочего редукциями к одномерным моделям [3]. Также возможно вложить эту теорию в объемлющую многомерную теорию: конструкция Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина–Нама при этом может возникать в качестве условия эквивалентности между двумя наборами уравнений самодуальности: в размерности 1, как описано выше, и в размерности 3 [4]. Одномерная модель представляет собой частный случай ($m = 0$) другой хорошо известной модели, а именно модели Гинзбурга–Ландау (ГЛ), также известной как ϕ^4 -модель, широко применяемой в теории фазовых переходов. Отсюда вытекает, что масса поля Янга–Миллса в квазиклассическом приближении совпадает с квантовой поправкой к действию модели Нама.

Отметим, что наш выбор вакуумного состояния, который отвечает фиксации сдвига потенциала на константу в соответствующем вакуумном операторе D_0 (5), позволяет избежать дополнительной перенормировки.

Класс нелинейных уравнений в случае статических одномерных решений сводится к уравнениям

$$\phi'' - V'(\phi) = 0, \quad \phi = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Первый интеграл уравнения (1), $W = \phi'^2/2 - V(\phi)$, задает дифференциальное уравнение с хорошо известным семейством решений: постоянные, кинки, периодические и так называемые “уходящие” решения [5]. Он содержит постоянную W , которая в случае моделей Нама и СГ выбирается в соответствии с моделью ГЛ:

$$V_N(\phi) = \frac{\phi^4}{2} - W, \quad W = -\frac{b^4}{2}, \quad V_{SG}(\phi) = \frac{2m^4}{3g} \left(1 + \cos \left(\frac{1}{m} \sqrt{\frac{3g}{2}} x \right) \right). \quad (2)$$

Метод, предлагаемый в настоящей работе, открывает новые возможности: например, с его помощью можно вычислять квантовые поправки к периодическим решениям и к матричным моделям сходной структуры. Такие задачи были поставлены в обзорной статье [5]. Отметим, что решение модели Нама с необходимостью выражается через эллиптические функции (см. результаты работ [6], [7]). Необходимость квантования именно эллиптических решений, называемых “твистованными кинками”, объяснена в работе [6].

1.2. Фейнмановское квантование и обобщенная дзета-функция Римана. Интерес к фейнмановскому формализму квантования для классического поля снова появился в последнее время в связи с исследованием квазиклассического условия квантования в суперсимметричных теориях [8]. Теория квантовых поправок в этом формализме была инициирована работой [9]. В работах [10] с помощью дзета-функции Римана были вычислены поправки к нескольким классическим решениям в размерности $d > 1$. Наиболее известными из этих поправок являются поправки к кинку – сепаратрисному решению модели ГЛ [11].

Приближенные квантовые поправки к решениям уравнения (1) получаются с помощью фейнмановского функционального интеграла, вычисляемого методом стационарной фазы. В результате получается следующее соотношение:

$$e^{-S_{\text{qu}}/\hbar} \simeq \frac{A}{\sqrt{\det D}}, \quad (3)$$

где S_{qu} – квантовое действие, соответствующее потенциалу $V(\phi)$, A – некоторая величина, определяемая вакуумным состоянием при $V(\phi) = 0$, $\det D$ – определитель оператора

$$D = -\partial_x^2 - \Delta_y + V''(\phi(x)). \quad (4)$$

Эта поправка возникает при учете второй вариационной производной от функционала квантового действия. Аргумент $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ обозначает поперечные переменные, от которых решение $\phi(x)$ не зависит. Соотношение вида (3) справедливо для квантового действия после замены S_{qu} на S_{vac} и оператора D на оператор “вакуумного состояния” $D_0 = -\partial_x^2 - \Delta_y$. Тогда квантовая поправка $\Delta S_{\text{qu}} = S_{\text{qu}} - S_{\text{vac}}$ получается двукратным применением формулы (3) и имеет вид

$$\Delta S_{\text{qu}} = \frac{\hbar}{2} \ln \frac{\det D}{\det D_0}. \quad (5)$$

Обобщенная дзета-функция появляется в задачах квантовой теории, основанных на фейнмановском функциональном интеграле в квазиклассическом приближении. Пусть множество $\{\lambda_n\} = S$ представляет собой спектр линейного оператора L , тогда с помощью формального суммирования имеем $\sum_{\lambda_n \in S} \ln \lambda_n = \ln(\det L)$.

Обобщенная дзета-функция Римана $\zeta_L(s)$ формально задается равенством

$$\zeta_L(s) = \sum_{\lambda_n \in S} \lambda_n^{-s}. \quad (6)$$

Это определение можно интерпретировать как аналитическое продолжение в комплексную плоскость по переменной s из полуплоскости $\text{Re } s > \sigma$, в которой ряд в выражении (6) сходится. Дифференцируя соотношение (6) по s в точке $s = 0$, получаем

$$\ln(\det L) = \zeta'_L(0). \quad (7)$$

Обобщенная дзета-функция (6) допускает представление с помощью диагонали функции Грина g_L оператора $\partial_t + L$. Связь с диагональю функции Грина (формализм ядра уравнения теплопроводности) применялась в квантовой теории, начиная с работ Фока [12], с помощью спектрального разложения по нормированным собственным функциям $\psi_n(\mathbf{r})$:

$$g_L(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \psi_n(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}_0). \quad (8)$$

Возвращаясь к операторам D , D_0 (4) поставим теперь основную задачу для одномерного оператора

$$D_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \quad (9)$$

с периодическим потенциалом $u(x) = V''(\phi(x))$ и определим

$$\gamma_L(t) = \int g_L(t, x, x) dx = \sum_k e^{-\lambda_k t}. \quad (10)$$

Из соотношения для функции $\gamma_D(t)$ следует важное свойство мультипликативности.

Если оператор D представляется в виде суммы двух дифференциальных операторов, D_1 и D_2 , зависящих от разных переменных, имеет место равенство $\gamma_D(t) = \gamma_{D_1}(t)\gamma_{D_2}(t)$.

Для применяемого в дальнейшем в качестве вакуумного d -мерного оператора D_ν с постоянным потенциалом ν свойство мультипликативности дает

$$\gamma_{D_\nu}(t) = 4\pi^{(1-d)/2} \frac{\Gamma(s + (1-d)/2)}{\Gamma(s)} \nu^{(d-1-2s)/2}. \quad (11)$$

Наконец с помощью преобразования Меллина получаем обобщенную дзета-функцию

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} (\gamma_D(t) - \gamma_{D_0}(t)) dt, \quad (12)$$

соответствующую (5).

2. СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЕЙ НАМА И СГ

2.1. Случай модели Нама. Рассмотрим полную систему уравнений Янга–Миллса в евклидовом пространстве размерности 4

$$D_\mu T_{\mu\nu} = \partial_\mu T_{\mu\nu} - i[T_\mu, T_{\mu\nu}] = 0 \quad (13)$$

для калибровочных полей $T_\mu = T_\mu^+$ и $T_{\mu\nu} = T_{\nu,\mu} - T_{\mu,\nu} - i[T_\mu, T_\nu]$. Налагая условия, что все поля не зависят от переменных x_k , $k = 1, 2, 3$, и полагая $x_4 = z$, найдем, что уравнения самодуальности

$$\frac{dT_i}{dz} = \pm \varepsilon_{ijk} T_j T_k, \quad (14)$$

отвечающие такой модели, приводят к уравнениям (13). В случае простейшего решения системы (14) $T_i = \phi_i \sigma_i$, построенного с помощью матриц Паули, получаем систему уравнений Эйлера для $\phi_i(y)$, решения которой выражаются через функции Якоби [13].

Для уравнений второго порядка аналогичный анзац

$$T_i = \phi(z) \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

с постоянными матрицами α_i и подходящим выбором масштабных преобразований приводит к уравнению

$$\phi''(z) = 2\phi^3. \quad (16)$$

Уравнение (16) оказывается представителем класса нелинейных уравнений (1) с $V'(\phi) = 2\phi^3$. Решение (16) оказывается специальным случаем статической модели СГ с $m = 0$, $g = 2$ (см. (2)).

Решение уравнения (16) выражается через эллиптические функции [14], а именно функции, обратные эллиптическому интегралу (лемнискате),

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^4 - b^4}} = \frac{1}{b} \int_0^{\phi/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}} = z, \quad (17)$$

и приводится к эллиптическому синусу sn с чисто мнимым модулем $k = i$,

$$\phi = b \text{sn}(ibz; i). \quad (18)$$

Этой функции соответствует функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = b^4$, $g_3 = 0$, что непосредственно приводит к решению в виде, приведенном в работе [4]. В случае модели Нама с помощью квантовых поправок удастся вычислить массу поля Янга–Миллса в квазиклассическом представлении.

Применим выражение для потенциала в терминах решения (18):

$$V''(\phi_0(x)) = \left(\frac{\phi^4}{2}\right)'' = 6\phi^2 = -6b^2(1 - \text{cn}^2(bz, i)). \quad (19)$$

2.2. Случай модели СГ. Кратко опишем модель СГ. Уравнение (1) интегрируется с потенциалом V_{SG} из (2), что дает в итоге дифференциальное уравнение с параметром W . Решение (1) задает периодическую функцию, выражающуюся через эллиптические функции Якоби. Для ее нахождения подставляем $\varphi = \pm 2m\sqrt{2/(3g)} \arcsin z$ и получаем

$$(z')^2 = m^2 \left(1 + \frac{3Wg}{4m^4} - z^2\right)(1 - z^2). \quad (20)$$

Решение уравнения (20) похоже на решение (18) и задается выражением

$$z = k \text{sn}(mx; k), \quad k = \sqrt{1 + \frac{3gW}{4m^4}}, \quad (21)$$

в котором k – модуль эллиптической функции. Окончательно имеем

$$\varphi = \pm 2m\sqrt{\frac{2}{3g}} \arcsin k \text{sn}(mx; k). \quad (22)$$

В случае $W = 0$, $k = 1$ нетривиальные решения интерпретируются как кинк и антикинк.

3. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ УРАВНЕНИЕ ЭРМИТА

3.1. Уравнение для диагонали функции Грина. Преобразование Лапласа для уравнения теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)g(t, x, x_0) = \delta(t)\delta(x - x_0) \quad (23)$$

приводит к уравнению для функции Грина $g(p, x, x_0)$ для спектральной задачи оператора D_1 (9).

В духе подхода Эрмита [15] преобразование Лапласа

$$\hat{g}(p, x, x) = \int e^{-pt} g(t, x, x) dt = G(p, x)$$

от диагонали функции Грина представляет собой решение билинейного уравнения

$$2GG'' - (G')^2 - 4(u(x) + p)G^2 + 1 = 0, \quad G' = \frac{dG(p, x)}{dx}, \quad (24)$$

которое может быть более эффективно решено в случаях безотражательных и конечнотонных потенциалов. Все необходимые классы решений модели можно запараметризовать с помощью универсальных представлений в терминах многочленов P, Q :

$$G(p, x) = \frac{P(p, z)}{2\sqrt{Q(p)}}, \quad (25)$$

где $z = \text{sn}^2(bx; k)$ в периодическом случае, или

$$b^2(\rho(z)(2PP'' - (P')^2) + \rho'(z)PP') - (p + u(z))P^2 + Q = 0, \quad (26)$$

штрихи обозначают производные по z , $\rho(z) = z(1 - z)(1 - k^2 + k^2z)$,

$$u(z) = \begin{cases} -6b^2(1 - z) & (\text{модель Нама}), \\ b^2(2k^2 - 1 - 2k^2z) & (\text{модель СГ}). \end{cases} \quad (27)$$

Подставляя (29) в (26), получаем для коэффициентов при каждом степенном множителе $p = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} -2P_1(z) - u(z) + q_2 &= 0, \\ b^2(2\rho(z)P_1'' + \rho'(z)P_1') - P_1^2 - 2u(z)P_1 + q_1 &= 0, \\ b^2(\rho(z)(2P_1P_1'' - P_1'^2) + \rho'(z)P_1P_1') - u(z)P_1^2 + q_0 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

3.2. Случай модели СГ. Рассмотрим модель СГ. Подстановка

$$P = p + P_1(z), \quad Q = p^3 + q_2p^2 + q_1p + q_0 \quad (29)$$

в (26) и (27) приводит к формулам

$$P_1 = k^2b^2z, \quad q_2 = b^2(2k^2 - 1), \quad q_1 = b^4k^2(k^2 - 1), \quad q_0 = 0. \quad (30)$$

Наконец, интегрируя по периоду, можно выразить преобразование Лапласа $\hat{\gamma}(p)$ через полные эллиптические интегралы $K(k), E(k)$:

$$\hat{\gamma}(p) = \frac{2K(k)p + b^2(E(k) - K(k) + 2k^2K(k))}{2\sqrt{p(p + b^2k^2)(p + b^2k^2 - b^2)}}. \quad (31)$$

Для двухзонного решения в общем случае имеем

$$P = p^2 + P_1(z)p + P_2(z), \quad Q = p^5 + q_4p^4 + q_3p^3 + q_2p^2 + q_1p + q_0. \quad (32)$$

Подстановка выражений (32) в уравнения Эрмита приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} -2P_1 - u + q_4 &= 0, \\ -2P_2 - P_1^2 - 2uP_1 + b^2(2\rho P_1'' + \rho' P_1') + q_3 &= 0, \\ b^2(\rho(2P_2'' + 2P_1P_1'' - (P_1')^2) + \rho'(P_2' + P_1P_1')) - 2P_1P_2 - u(2P_2 + P_1^2) + q_2 &= 0, \\ b^2(2\rho(2P_1'P_2 - P_1'P_2' + P_1P_2'') + \rho'(P_1P_2' + P_1'P_2)) - P_2^2 - 2uP_1P_2 + q_1 &= 0, \\ b^2(\rho(2P_2P_2'' - P_2'^2) + \rho'P_2P_2') - uP_2^2 + q_0 &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где мы опустили аргументы.

3.3. Случай модели Нама. В случае уравнения Нама имеем $q_4 = 0$, $q_3 = -21b^4$, $q_2 = 0$, $q_1 = 108b^8$, $q_0 = 0$, отсюда

$$P_1(z) = -3b^2(z - 1), \quad P_2 = 18b^4z^2 - 36b^4z.$$

Далее

$$Q(p) = \prod_{i=1}^5 (p - p_i) = p(p + 3b^2)(-p + 3b^2)(12b^4 - p^2), \quad (34)$$

где простые корни p_i многочлена Q можно легко упорядочить для вещественных b .

Найдем выражение, определяющее $\hat{\gamma}(p)$ с помощью интегрирования по периоду:

$$\hat{\gamma}(p) = \int \frac{(p^2 - 3b^2(z - 1)p + 18b^4z^2 - 36b^4z) dx}{2\sqrt{Q}}. \quad (35)$$

Возвращаясь к переменной z , имеем $dz = d(\operatorname{cn}^2 x) = -2 \operatorname{cn} x \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x dx$, и снова интегрируя, получаем

$$\hat{\gamma}(p) = \frac{6b^4K(i) + 2p^2K(i) + 36b^4(K(i) - E(i)) - 3b^2p(E(i) - 3K(i))}{\sqrt{Q}}, \quad (36)$$

что с помощью (12) позволяет выразить дзета-функцию через полные эллиптические интегралы (лемнискаты) $K(i)$ и $E(i)$ [14]. Например, при $k = i$ получаем

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{2}, \quad K(i) = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} K\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right).$$

4. ФУНКЦИИ ГРИНА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИИ БЕЙКЕРА–АХИЕЗЕРА

Рассмотрим функцию Грина для уравнения теплопроводности, определенную в разделе 1. Предлагаемый здесь метод основан на технике конечнозонного интегрирования уравнения Кадомцева–Петвиашвили [16]. Как было отмечено в разделе 3, одномерное уравнение теплопроводности (23) с периодическим потенциалом $u(x) = V''(\phi(x))$ представляет собой исходную часть задачи.

Проинтегрируем (23) по x в пределах $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d^2}{dx^2} + u(x) \right) g(t, x, x_0) dx = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{dg(t, x_0 + \epsilon, x_0)}{dx} + \frac{dg(t, x_0 - \epsilon, x_0)}{dx} \right] = \delta(t). \end{aligned} \quad (37)$$

Предполагается, что функция $g(t, x, x_0)$ непрерывна при $t > 0$.

Решения уравнения (23) с нулевой правой частью выражаются в терминах функций Бейкера–Ахиезера (БА) $\psi_s(x, t; P)$, построенных с помощью многочлена $q(s)$ от локального параметра s на римановой поверхности. Общий формализм для этой конструкции хорошо известен (см., например, [16]), а список соответствующих формул можно найти в работе [7].

Функция БА (формула Итса–Матвеева) для случая модели СГ выражается в терминах тета-функций Якоби и задает решение соответствующего уравнения Ламе с $u_L(x) = 2k^2(1 - \text{sn}^2(x, k))$ и спектральным параметром h [14]:

$$\psi_+(x; h) = \frac{\exp[\eta(2v\rho + \rho^2)/(2\omega) + v\zeta(\wp^{-1}(3 - 2(1 + k^2)))] \vartheta((v + \rho)/(2\omega))}{\vartheta(v/(2\omega))}, \quad (38)$$

где $\rho = \wp^{-1}(3h - 2(1 + k^2))$, $\eta = \zeta(\omega)$, $\omega = \wp^{-1}(2 - k^2)$, $v = (x - iK')/\sqrt{3}$, $K'(k')$ – полный эллиптический интеграл, $\wp$ – функция Вейерштрасса, $\zeta(\omega)$ – дзета-функция Вейерштрасса ($\zeta' = -\wp$) [14]. Потенциал $u_L(x)$ стандартного уравнения Ламе отличается от $u(x)$ на константу и сдвиг: $u_L = b^2 u + b^2$ (ср. с (27)). В этом разделе положим для простоты $b = 1$. Спектральные параметры, таким образом, связаны между собой: $h = p + 1$.

Базисная тета-функция представления (38) определяется формулой

$$\vartheta(w) = \vartheta(w | \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(m^2\tau + 2mw)}, \quad (39)$$

где $e^{i\pi\tau} = \eta$ и величина $\text{Im } \tau$ должна быть положительной для сходимости ряда. Ряд сходится достаточно быстро, поэтому представление (38) удобно для численных расчетов интегралов в формализме дзета-функции (12).

Функцию Грина g_h спектральной задачи Ламе можно построить как произведение двух независимых решений ψ_+ , ψ_- спектрального уравнения с одним и тем же h :

$$g_h(x, x_0) = \frac{1}{\mathbb{W}} \begin{cases} \psi_+(x; h)\psi_-(x_0; h), & x < x_0, \\ \psi_-(x; h)\psi_+(x_0; h), & x > x_0. \end{cases} \quad (40)$$

Множитель $\mathbb{W}$ (вронскиан) добавлен для нормировки функции (40) таким образом, чтобы она имела единичный скачок первой производной по переменной x :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{dg_h(x_0 + \epsilon, x_0)}{dx} - \frac{dg_h(x_0 - \epsilon, x_0)}{dx} \right] = -1. \quad (41)$$

Независимое решение $\psi_-(x, t; h)$ можно выбрать нечетным относительно отражения $x \rightarrow -x$, т.е. его можно выразить через функцию $\vartheta(w + 1/2)$.

Граничное условие при $t = 0$ можно учесть с помощью интеграла по спектральному параметру h (см. также (8)) от произведения линейно независимых решений:

$$g(t, x, x_0) = \int \frac{1}{\mathbb{W}} \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_+(x, t; h) \Psi_-(x_0, t; h), & x < x_0 \\ \Psi_+(x_0, t; h) \Psi_-(x, t; h), & x > x_0 \end{array} \right\} dh, \quad (42)$$

где $\Psi_+(x, t; h) = e^{-ht} \psi_+(x; h)$.

Проинтегрируем диагональные значения функции Грина (42) по периоду решения, получим $\gamma_{D_1}(t, x) = \int g(t, x, x) dx$, после этого применим определение (12) обобщенной дзета-функции с учетом (42).

5. КВАНТОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТИПА КИНКА ДЛЯ МОДЕЛИ СГ

Представим теперь в деталях формулы, имеющие место для кинков модели СГ. Подстановка выражений из (25), (29) приводит к появлению расходимости в интеграле (35) для $\hat{\gamma}(p)$. Чтобы произвести регуляризацию, обратимся к выражению (31) с соответствующим модулем эллиптической функции ($k = 1$)

$$G(p, x) = G_c(p) + G_k(p, x) = \frac{1}{2\sqrt{p+b^2}} + \frac{b^2 \operatorname{sech}^2(bx)}{2p\sqrt{p+b^2}}. \quad (43)$$

Слагаемое $G_c(p)$ в этом выражении является диагональной частью функции Грина (решения уравнения (24)) для постоянного потенциала, а кинковая составляющая может быть легко вычислена с помощью формул (25), (29).

Из представления (43) следует, что квантовые поправки в массу кинка (антикин-ка) появляются в двух местах: во-первых, изменяется $\nu = m^2$ в выражении (11),

$$\gamma_{D_0}(t) = 4\pi^{(1-d)/2} \frac{\Gamma(s + (1-d)/2)}{\Gamma(s)} m^{d-1-2s}, \quad (44)$$

во-вторых, поправка возникает в результате применения общей схемы, в которой выражение для функции Грина $G_k(p, x)$ из (43) подставляется в аналог формулы (10), что дает

$$\gamma_k(p) = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(p, x) dx = \frac{b}{p\sqrt{p+b^2}}. \quad (45)$$

Это табличная функция, но здесь хотелось бы остановиться на объяснении этого результата, предполагая дальнейшее развитие метода. Заметим, что разрез для функции $\sqrt{p+b^2}$ выбирается вдоль оси $\operatorname{Re} p$ от $-\infty$ до $-b^2$, причем сверху разреза выбирается значение $\sqrt{p+b^2} = i\sqrt{|p+b^2|}$, снизу разреза – значение $\sqrt{p+b^2} = -i\sqrt{|p+b^2|}$. После деформирования контура интегрирования получающийся при $t > 0$ интеграл

$$\gamma_k(t) = 1 - \frac{b}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{(\xi+b^2)t}}{(\xi+b^2)\sqrt{\xi}} d\xi \quad (46)$$

можно выразить с помощью функции ошибок. После некоторой замены переменных получаем

$$\gamma_k(t) = \operatorname{erf}(b\sqrt{t}) = \frac{2b\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-b^2 t \tau^2} d\tau. \quad (47)$$

Зависимость поправочного члена для массы от параметра m при $d = 1, 2, 3$.

Преобразование Меллина от этого выражения приводит к регуляризованной дзета-функции для нашей задачи. Интеграл в выражении (12) сходится только при $\text{Re } s < 0$, но он допускает аналитическое продолжение на все $s \in \mathbb{C}$, кроме полюсов функции $\Gamma(s + 1)$. Формула (12) с учетом (11) приводит при $b = m$ к выражению

$$\zeta_{\text{SG}}(s) = -4(4\pi)^{d/2} m^{d-1-2s} \frac{\Gamma(s + 1 - d/2)}{(2s + 1 - d)\Gamma(s)}. \quad (48)$$

Дифференцируя (48) по s ,

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{qu}} = \frac{\hbar}{2} \frac{d(\zeta_{\text{SG}}(s))}{ds} &= \frac{2\hbar(4\pi)^{d/2} m^{d-2s-1} \Gamma(s - d/2 + 1)}{\Gamma(s)(2s - d + 1)^2} \times \\ &\times ((d - 2s - 1)(\Psi(-d/2 + s + 1) - 2\ln m - \Psi(s)) + 2), \end{aligned} \quad (49)$$

в предельной точке $s = 0$, получаем простое выражение для искомой поправки, которое можно легко представить графически. На рисунке представлена зависимость безразмерного поправочного члена $d(\zeta_L^D(0))/ds$ от параметра m . Перейдем к заключению относительно выбора вида поправочного члена для массы поля Янга–Миллса. Интегралы в периодическом случае находились численно с помощью быстро сходящегося ряда для тета-функции. Читателю, интересующемуся более подробным описанием модели, видом различных функций, вычислениями и сравнениями, можно порекомендовать ознакомиться со статьей [7]. Некоторые современные работы открывают новые области применений метода [11]. Исследования динамики дислокационных особенностей с помощью модели Френкеля–Конторовой обеспечивают возможность прямой проверки эффектов квантовых солитонов, которые приводят к тому, что вклады кинка и эллиптических солитонов оказываются разными ввиду разной зависимости энергии от параметров. Интересно применить полученные здесь результаты в реальной термодинамике кристаллов в рамках подхода статистической

физики [17] или с помощью прямого вычисления функции отклика с соответствующими измерениями [18]. Очень схожие с нашими результаты для кинков модели СГ (и некоторых других моделей) в $(1+1)$ -случае опубликованы в работе [19].

Благодарности. Автор благодарит Г. Квятковского за ценные обсуждения и за помощь в построении графика зависимости массы кинка модели СГ от параметра m .

Список литературы

- [1] O. M. Braun, H. Bambi, A. Zeltser, *Phys. Rev. E*, **62**:3 (2000), 4235–4245.
- [2] S. V. Ketov, *Fortschr. Phys.*, **45**:3–4 (1997), 237–292; [arXiv: hep-th/9611209](#).
- [3] W. Nahm, *Phys. Lett. B*, **90**:4 (1980), 413–414.
- [4] E. Corrigan, P. R. Wainwright, S. M. J. Wilson, *Comm. Math. Phys.*, **98**:2 (1985), 259–272.
- [5] J. A. Tuszynski, J. M. Dixon, A. M. Grundland, *Fortschr. Phys.*, **42**:4 (1994), 301–337.
- [6] M. Pawellek, *J. Phys. A*, **42**:4 (2009), 045404; [arXiv: 0802.0710v1](#).
- [7] S. Leble, *Quantum corrections to static solutions of Nahm equation and Sin-Gordon models via generalized zeta-function*, [arXiv: 0806.2679](#).
- [8] A. Comtet, A. Bandrauk, D. K. Campbell, *Phys. Lett. B*, **150**:1–3 (1985), 159–162.
- [9] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, *Phys. Rev. D*, **10**:12 (1974), 4114–4129; **11**:12 (1975), 3424–3450; L. D. Faddeev, V. E. Korepin, *Phys. Rep.*, **42**:1 (1978), 1–87.
- [10] P. В. Коноплич, *ТМФ*, **73**:3 (1987), 379–392; **78**:3 (1989), 444–457.
- [11] M. Bordag, A. S. Goldhaber, P. van Nieuwenhuizen, D. Vassilevich, *Phys. Rev. D*, **66**:12 (2002), 125014; [arXiv: hep-th/0203066](#).
- [12] В. А. Фок, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, 1937, № 4–5, 551–568.
- [13] S. Leble, “Nahm equations as an integrable system: difference Lax pair, gauge-Darboux covariance, chains and solutions”, *Selected Problems of Modern Mathematics*, Proc. of 200-year of K. Jacobi birthday conf., Kaliningrad State Univ., Kaliningrad, 2005, 97–99.
- [14] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1966.
- [15] M. Adler, J. Moser, *Comm. Math. Phys.*, **61**:1 (1978), 1–30.
- [16] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer, Berlin, 1994.
- [17] A. Seeger, *Mat. Sci. and Engrg. A*, **370**:1–2 (2004), 50–66.
- [18] H. Koizumi, M. Tachibana, K. Kojima, I. Yonenaga, *Phys. B*, **401–402** (2007), 691–694.
- [19] A. Alonso Izquierdo, W. García Fuertes, M. A. González León J. Mateos Guilarte, *Nucl. Phys. B*, **635**:3 (2002), 525–557.