Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ли Дж.-Х., О. К. Пашаев, Киральные солитоны в квантовом потенциале, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 133–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:25:55

© 2009 г.

Дж.-Х. Ли*, О. К. Пашаев†

КИРАЛЬНЫЕ СОЛИТОНЫ В КВАНТОВОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Киральные солитоны в квантовом потенциале исследуются с помощью размерной редукции задачи для $(2+1)$ -мерных анионов. Показано, что интегрируемая версия модели задается семейством резонансных нелинейных уравнений Шредингера с производной. Для напряженности квантового потенциала $s > 1$ показано, что киральное взаимодействие солитонов имеет резонансную природу. Исследуется процедура квазиклассического квантования солитонов.

Ключевые слова: киральные солитоны, квантовый потенциал, размерная редукция.

1. РЕДУКЦИИ ТЕОРИИ ЧЕРНА–САЙМОНСА

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), модифицированное с помощью квантового потенциала, исследовалось в задачах теории гравитации, физики плазмы, теории капиллярных волн и теории информации [1], [2]. Влияние такого потенциала на анионы в размерности $2+1$ рассматривалось в работе [3]. В настоящей работе исследуется размерная редукция НУШ с калибровочным полем Черна–Саймонса (модель Джакива–Пи) с нелинейным квантовым потенциалом напряженности s [3]:

$$L = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{i}{2} (\bar{\psi} D_0 \psi - \psi \bar{D}_0 \bar{\psi}) - \bar{\mathbf{D}} \bar{\psi} \mathbf{D} \psi + s \nabla |\psi| \nabla |\psi| + V(\bar{\psi} \psi), \quad (1)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, $\mu = 0, 1, 2$. Производя редукцию, т.е. полагая, что все поля не зависят от пространственной переменной x_2 (это дает $\partial_2 = 0$), получим в терминах полей $\tilde{A}_0 \equiv A_0 + eA_2^2$ и $B \equiv A_2$ уравнения движения (будем опускать знак тильды над A_0):

$$i(\partial_0 + ieA_0)\psi + (\partial_1 + ieA_1)^2\psi + V'\psi = s \frac{\partial_1^2 |\psi|}{|\psi|} \psi, \quad (2)$$

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = 0, \quad (3)$$

$$\partial_1 B = \frac{e}{\kappa} \bar{\psi} \psi, \quad \partial_0 B = i \frac{e}{\kappa} [\bar{\psi}(\partial_1 + ieA_1)\psi - \psi(\partial_1 - ieA_1)\bar{\psi}]. \quad (4)$$

*Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan.
E-mail: leejh@math.sinica.edu.tw

†Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla-Izmir, Turkey.
E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

Последние два уравнения оказываются совместными в силу уравнения (2), а соответствующее уравнение непрерывности имеет вид

$$\partial_0(\bar{\psi}\psi) = i\partial_1[\bar{\psi}(\partial_1 + ieA_1)\psi - \psi(\partial_1 - ieA_1)\bar{\psi}].$$

Интегрируя эти уравнения, получим B в виде

$$B = \frac{e}{\kappa} \int^x \bar{\psi}\psi dx'. \quad (5)$$

С другой стороны, из условия плоскостности для связности (3) получим, что $A_0 = \partial_0\phi$, $A_1 = \partial_1\phi$, так что потенциалы могут быть исключены с помощью калибровочного преобразования $\psi = e^{-e\phi}\Psi$. В результате получим уравнение Шредингера с самодействующим нелинейным потенциалом $V(\bar{\psi}\psi)$, модифицированное с помощью квантового потенциала. Если считать, что взаимодействие между частицами выражается через попарные дельта-функции, то $V(\rho) = g\rho^2/2$, и уравнение принимает вид

$$i\partial_0\Psi + \partial_1^2\Psi + g|\Psi|^2\Psi = s\frac{\partial_1^2|\Psi|}{|\Psi|}\Psi. \quad (6)$$

Будем называть это уравнение резонансным НУШ (РНУШ) [1]. Оно возникает при исследовании низкоразмерных теорий гравитации на прямой, в модели Джакива–Тейтельбойма [4] и при описании холодной плазмы [2]. Оно интегрируемо при произвольном s и в надкритическом режиме $s > 1$ описывает резонансные явления. Тем не менее в дальнейшем обсудим другую редукцию теории Черна–Саймонса с динамическим полем B и покажем, что в этом случае возникают РНУШ, версии НУШ с током (НУШТ) и НУШ с производной (НУШП).

Чтобы придать динамику компоненте B калибровочного поля, введем, следуя работе [5], соответствующий кинетический член, так что

$$L = \kappa B(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) + \theta \partial_0 B \partial_1 B + \frac{i}{2} (\bar{\psi}(\partial_0 + ieA_0)\psi - \psi(\partial_0 - ieA_0)\bar{\psi}) - (\partial_1 - ieA_1)\bar{\psi}(\partial_1 + ieA_1)\psi + s\partial_1|\psi|\partial_1|\psi| + V(\bar{\psi}\psi). \quad (7)$$

Уравнения движения при этом имеют вид

$$i(\partial_0 + ieA_0)\psi + (\partial_1 + ieA_1)^2\psi + V'\psi = s\frac{\partial_1^2|\psi|}{|\psi|}\psi, \quad (8)$$

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{2\theta}{\kappa} \partial_0 \partial_1 B, \quad (9)$$

$$\partial_1 B = \frac{e}{\kappa} \rho, \quad \partial_0 B = -\frac{e}{\kappa} J, \quad (10)$$

где плотности частиц и импульсов имеют стандартный вид

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\psi}\psi, & J &= \frac{1}{i} [\bar{\psi}(\partial_1 + ieA_1)\psi - \psi(\partial_1 - ieA_1)\bar{\psi}] = j + 2eA_1\rho, \\ j &= -i[\bar{\psi}\partial_1\psi - \psi\partial_1\bar{\psi}]. \end{aligned}$$

Из уравнения (8) вытекает закон сохранения $\partial_0 \rho + \partial_1 J = 0$, представляющий собой условие совместности для системы (10), откуда можно записать

$$\partial_0 \partial_1 B = \frac{e}{\kappa} [\alpha \partial_0 \rho - (1 - \alpha) \partial_1 J], \quad (11)$$

где α – произвольная вещественная константа. Подставляя (11) в (9) и объединяя члены при одинаковых производных, получим

$$\partial_0 \left(A_1 - \frac{2\theta e}{\kappa^2} \alpha \rho \right) - \partial_1 \left(A_0 - \frac{2\theta e}{\kappa^2} (1 - \alpha) J \right) = 0. \quad (12)$$

Система (8)–(10) инвариантна относительно локальных $U(1)$ -калибровочных преобразований $\psi \rightarrow \psi' = e^{-ie\phi(x,t)} \psi$, $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi$. Тогда разрешая (12),

$$A_1 = \frac{2\theta e}{\kappa^2} \alpha \rho + \partial_1 \phi, \quad A_0 = \frac{2\theta e}{\kappa^2} (1 - \alpha) J + \partial_0 \phi, \quad (13)$$

относительно калибровочно-инвариантного поля $\Psi = e^{ie\phi} \psi$, получим

$$i \left(\partial_0 + i \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} (1 - \alpha) J \right) \Psi + \left(\partial_1 + i \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} \alpha \rho \right)^2 \Psi + V' \Psi = s \frac{\partial_1^2 |\psi|}{|\Psi|} \Psi, \quad (14)$$

где

$$J = j + \frac{4\theta e^2}{\kappa^2} \alpha \rho^2, \quad j = -i[\bar{\Psi} \Psi_x - \Psi \bar{\Psi}_x], \quad \rho = \bar{\Psi} \Psi.$$

Окончательно приходим к уравнению

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + i \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} [(2\alpha + 1)|\Psi|^2 \Psi_x + (2\alpha - 1)\Psi^2 \bar{\Psi}_x] + 4 \frac{\theta^2 e^4}{\kappa^4} \alpha(\alpha - 2)|\Psi|^4 \Psi + V' \Psi = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi, \quad (15)$$

в котором введены очевидные обозначения для частных производных. Остающаяся калибровочная свобода в этом уравнении – это просто свобода глобальных $U(1)$ -преобразований: $\Psi \rightarrow e^{i\lambda} \Psi$, $\lambda = \text{const}$.

Свойства уравнения (15) существенно зависят от величины параметра s . Заменяя $\Psi = e^{R-iS}$, получим систему

$$R_t - (S_{xx} + 2R_x S_x) + \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} 4\alpha R_x e^{2R} = 0, \\ S_t - S_x^2 + (1 - s)(R_{xx} + R_x^2) + \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} 2S_x e^{2R} + \frac{4\theta^2 e^4}{\kappa^4} \alpha(\alpha - 2)e^{4R} + V' = 0,$$

которая описывает динамику жидкости Маделунга

$$\rho_t + \left(\rho v + \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} 2\alpha \rho^2 \right)_x = 0, \\ v_t + vv_x = 2 \left[(1 - s) \frac{\sqrt{\rho_{xx}}}{\sqrt{\rho}} - \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} \rho v + \left(\frac{2\theta e^2}{\kappa^2} \right)^2 \alpha(\alpha - 2) \rho^2 + V' \right]_x. \quad (16)$$

При $s < 1$, переопределяя переменные $t\sqrt{1-s} \equiv \tilde{t}$, $S/\sqrt{1-s} \equiv \tilde{S}$, $\tilde{\Psi} \equiv e^{R-i\tilde{S}}$, получим

$$i\tilde{\Psi}_{\tilde{t}} + \tilde{\Psi}_{xx} + i\frac{2\theta e^2}{\kappa^2\sqrt{1-s}} [(2\alpha+1)|\tilde{\Psi}|^2\tilde{\Psi}_x + (2\alpha-1)\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_x] + \\ + 4\frac{\theta^2 e^4}{\kappa^4(1-s)} \alpha(\alpha-2)|\tilde{\Psi}|^4\tilde{\Psi} + \frac{V'}{1-s} \tilde{\Psi} = 0. \quad (17)$$

Как и в случае $(2+1)$ -мерной теории [3], получим эффективную перенормировку статистического параметра $\kappa^2 \rightarrow \kappa^2\sqrt{1-s}$, но в отличие от этой теории, в нашем случае не возникает никакого условия квантования для этого параметра. Теперь указанное выше преобразование, связывающее волновые функции, имеет нелинейный вид:

$$\Psi(x, t) = |\tilde{\Psi}| \left(\frac{\tilde{\Psi}}{|\tilde{\Psi}|} \right)^{\sqrt{1-s}} (x, t\sqrt{1-s}). \quad (18)$$

При $s > 1$ в терминах переопределенных параметров $t\sqrt{s-1} \equiv \tilde{t}$, $S/\sqrt{s-1} \equiv \tilde{S}$ и двух вещественных функций $E^+ = e^{R+\tilde{S}}$, $E^- = e^{R-\tilde{S}}$ получим

$$\mp E_t^\pm + E_{xx}^\pm \mp \frac{2\theta e^2}{\kappa^2\sqrt{s-1}} [(2\alpha+1)E^+E^-E_x^\pm + (2\alpha-1)E^{\pm 2}E_x^\mp] - \\ - 4\frac{\theta^2 e^4}{\kappa^4(s-1)} \alpha(\alpha-2)(E^+E^-)^2E^\pm - \frac{V'}{s-1} E^\pm = 0. \quad (19)$$

Заметим, что в представлении (13) калибровочная функция $\phi = \phi^{(\alpha)}$ зависит от α :

$$A_1 = \frac{2\theta e}{\kappa^2} \alpha \rho + \partial_1 \phi^{(\alpha)}, \quad A_0 = \frac{2\theta e}{\kappa^2} (1-\alpha)J + \partial_0 \phi^{(\alpha)}. \quad (20)$$

Сравнивая со случаем $\alpha = 0$, при котором $A_1 = \partial_1 \phi^{(0)}$, $A_0 = 2\theta eJ/\kappa^2 + \partial_0 \phi^{(0)}$, получаем систему

$$\partial_1(\phi^{(0)} - \phi^{(\alpha)}) = \frac{2\theta e}{\kappa^2} \alpha \rho, \quad \partial_0(\phi^{(0)} - \phi^{(\alpha)}) = -\frac{2\theta e}{\kappa^2} \alpha J, \quad (21)$$

которая совместна в силу выполнения условия непрерывности. Тогда калибровочно преобразованные волновые функции $\Psi^{(\alpha)}$ и $\Psi^{(0)}$ с $\psi = e^{-ie\phi^{(\alpha)}}\Psi^{(\alpha)} = e^{-ie\phi^{(0)}}\Psi^{(0)}$ связаны соотношением $\Psi^{(\alpha)} = e^{-ie(\phi^{(0)} - \phi^{(\alpha)})}\Psi^{(0)}$. Интегрируя (21) и подставляя результат в последнюю формулу, получим калибровочное преобразование, связывающее уравнение (15) и такое же уравнение с $\alpha = 0$:

$$\Psi^{(\alpha)} = \exp\left(-i\frac{2\theta e^2}{\kappa^2} \alpha \int^x \rho dx'\right) \Psi^{(0)}. \quad (22)$$

С помощью этого соотношения можно установить соответствие между двумя представителями уравнения (15) с различными значениями параметра α :

$$\Psi^{(\alpha)} = \exp\left(-i\frac{2\theta e^2}{\kappa^2} (\alpha - \beta) \int^x \rho dx'\right) \Psi^{(\beta)}. \quad (23)$$

В представлении Маделунга из калибровочного преобразования (23) с $\nu \equiv 2\theta e^2/\kappa^2$ следует, что

$$S^{(\alpha)} - S^{(\beta)} = \nu(\alpha - \beta) \int^x \rho dx', \quad R^{(\alpha)} = R^{(\beta)}. \quad (24)$$

При $s < 1$ отсюда вытекает $U(1)$ -калибровочное преобразование уравнения (17) вида

$$\tilde{\Psi}^{(\alpha)} = \tilde{\Psi}^{(\beta)} \exp \left[-i \frac{\nu}{\sqrt{1-s}} (\alpha - \beta) \int^x \rho dx' \right], \quad (25)$$

а при $s > 1$ оно приводит к локальному масштабному $SO(1,1)$ -преобразованию (преобразованию Вейля) для уравнения (19):

$$E^{\pm(\alpha)} = E^{\pm(\beta)} \exp \left[\pm \frac{\nu}{\sqrt{s-1}} (\alpha - \beta) \int^x \rho dx' \right]. \quad (26)$$

2. РЕДУКЦИЯ НУШТ

Если положить $\alpha = 0$ и $V = 0$ в уравнении (15), получим НУШТ [5] с квантовым потенциалом

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} j\Psi = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi, \quad (27)$$

где $j = -i[\bar{\Psi}\Psi_x - \Psi\bar{\Psi}_x]$. При $s = 1$ с помощью подстановки $\Psi = e^{R+iS}$ и $\rho = e^{2R}$, $v = 2\partial_1 S$ получим бездисперсионную (квазиклассическую) систему для одномерных анионов

$$v_t + vv_x + \frac{4\theta e^2}{\kappa^2} (\rho v)_x = 0, \quad \rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (28)$$

Эта система исследовалась на предмет возникновения ударных волн в работе [6]. При $s < 1$, вводя $\tilde{S} = S/\sqrt{1-s}$, $\tilde{t} = \sqrt{1-s}t$ и $\tilde{\Psi} = e^{R-i\tilde{S}}$, можно переписать (27) в виде стандартного уравнения НУШТ с перенормированной константой связи

$$i\tilde{\Psi}_{\tilde{t}} + \tilde{\Psi}_{xx} - \frac{2\theta e^2}{\kappa^2 \sqrt{1-s}} \tilde{j}\tilde{\Psi} = 0. \quad (29)$$

Хотя и неизвестно, интегрируемо ли НУШТ (29), можно построить билинейное представление

$$(iD_{\tilde{t}} + D_x^2)(g \cdot f) = 0, \quad D_x^2(f \cdot f) = \frac{2\theta e^2}{i\kappa^2 \sqrt{1-s}} D_x(\bar{g} \cdot g), \quad (30)$$

где $\Psi = g/f$, а g и f – комплексная и вещественная функции соответственно. С помощью разложения Хироты $g = g_1$, $f = 1 + f_2$ построим точное решение

$$g_1 = e^{\eta_1}, \quad f_2 = \frac{\theta e^2}{i\kappa^2 \sqrt{1-s}} \frac{\bar{k}_1 - k_1}{(\bar{k}_1 + k_1)^2} e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1}, \quad (31)$$

где $\eta_1 = k_1 x + ik_1^2 t + \eta_1^{(0)}$. Параметризуя $k_1 = \lambda_1 + i\mu_1$, получим, что решение регулярно только при $\theta\mu_1 < 0$, когда огибающая солитона принимает вид профиля кирального солитона:

$$\tilde{\Psi}(x, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{\kappa^2 \lambda_1^2 \sqrt{1-s}}{2e^2 |\theta\mu_1|}} \frac{e^{i[\mu_1 x + (\lambda_1^2 - \mu_1^2)\tilde{t} + \nu_1]}}{\text{ch } \lambda_1(x - 2\mu_1 \tilde{t} - x_0)}, \quad (32)$$

где

$$x_0 = -\frac{\xi_1}{\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{e^2 |\theta \mu_1|}{2\kappa^2 \lambda_1^2}, \quad \eta_1^{(0)} = \xi_1 + i\nu_1$$

– константы. При $s = 0$ этот результат совпадает с ответом в работах [5]. Скорость солитона $v = 2\mu_1$ и направление распространения зависят от знака θ . При $\theta > 0$ получим $v < 0$, и солитон движется справа налево. В противоположном случае, когда $\theta < 0$, имеем, что $v > 0$, и солитон движется только слева направо. Возвращаясь к исходным переменным, получим решение уравнения (27)

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{\kappa^2}{4e^2 |\theta v|}} \frac{|k| e^{i[vx/2 + (k^2 - v^2/4)t + \tilde{\nu}_1]}}{\text{ch}[k(x - vt - x_0)/\sqrt{1 - s}]}. \quad (33)$$

Из этого решения следует, что квантовый потенциал влияет на огибающую солитона в сторону сжатия профиля солитона (подобно сжатию длины в релятивистской теории с параметром $s = v^2/c^2$). Можно аналогично рассмотреть надкритический режим при $s > 1$ и построить диссипатонное решение [4] и соответствующий солитон для уравнения (27). Но поскольку в этом случае не удастся точно построить двухсолитонное решение, мы не будем следовать этой линии.

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ РЕДУКЦИИ

Если зафиксировать функцию потенциала в виде $V(\rho) = (\theta^2 e^4 / \kappa^4) \rho^3$ (трехчастичное взаимодействие), получим, что при $\alpha = 3/2$ и $\alpha = 1/2$ уравнение (17) сводится к соответствующим интегрируемым моделям НУШП-I и НУШП-II. Тогда из калибровочного преобразования (25) следует, что уравнение (17) интегрируемо при произвольном α и обладает свойством Пенлеве. Общее РНУШП имеет вид

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + i\nu[(2\alpha + 1)|\Psi|^2 \Psi_x + (2\alpha - 1)\Psi^2 \bar{\Psi}_x] + \\ + 4\nu^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\alpha - \frac{3}{2} \right) |\Psi|^4 \Psi = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi, \quad (34)$$

оно оказывается интегрируемым при произвольном α . Имеют место следующие важные частные случаи:

1) РНУШП-I ($\alpha = 3/2$)

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + i \frac{4\theta e^2}{\kappa^2} (|\Psi|^2 \Psi)_x = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi; \quad (35)$$

2) РНУШП-II ($\alpha = 1/2$)

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + i \frac{4\theta e^2}{\kappa^2} \rho \Psi_x = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi; \quad (36)$$

3) РНУШП-III ($\alpha = 1/2$)

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - 2i \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} \Psi^2 \bar{\Psi}_x + 2 \frac{4\theta^2 e^4}{\kappa^4} |\Psi|^4 \Psi = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi; \quad (37)$$

4) РНУШТ ($\alpha = 0$)

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - \frac{2\theta e^2}{\kappa^2} j\Psi + 3 \frac{\theta^2 e^4}{\kappa^4} \rho^2 \Psi = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi. \quad (38)$$

Как легко видеть, общее уравнение (34) можно привести к кубической нелинейности только в случаях $\alpha_1 = 3/2$ и $\alpha_2 = 1/2$, что дает соответствующие РНУШП-I (35) и РНУШП-II (36). Все прочие уравнения с необходимостью содержат член пятого порядка. При этом уравнения с различными α связаны между собой калибровочными преобразованиями (23).

4. РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим в этом разделе общее РНУШП (34) при $s > 1$. В этом случае имеем уравнение реакции-диффузии с производной (РДП)

$$\begin{aligned} \mp E_t^\pm + E_{xx}^\pm \mp \frac{2\theta e^2}{\kappa^2 \sqrt{s-1}} [(2\alpha+1)E^+ E^- E_x^\pm + (2\alpha-1)E^{\pm 2} E_x^\mp] - \\ - 4 \frac{\theta^2 e^4}{\kappa^4 (s-1)} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\alpha - \frac{3}{2} \right) (E^+ E^-)^2 E^\pm = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

которое допускает различные редукции:

1) уравнение РДП-I ($\alpha = 3/2$)

$$\mp E_t^\pm + E_{xx}^\pm \mp 2\tilde{\nu}(E^+ E^- E^\pm)_x = 0; \quad (40)$$

2) уравнение РДП-II ($\alpha = 1/2$)

$$\mp E_t^\pm + E_{xx}^\pm \mp 2\tilde{\nu}E^+ E^- E_x^\pm = 0; \quad (41)$$

3) уравнение РДП-III ($\alpha = -1/2$)

$$\mp E_t^\pm + E_{xx}^\pm \pm 2\tilde{\nu}E^{\pm 2} E_x^\mp - 2\tilde{\nu}^2 (E^+ E^-)^2 E^\pm = 0; \quad (42)$$

4) уравнение реакции-диффузии с током (РДТ) ($\alpha = 0$)

$$\mp E_t^\pm + E_{xx}^\pm - \tilde{\nu}[E_x^+ E^- - E^+ E_x^-]E^\pm - \frac{3}{4}\tilde{\nu}^2 (E^+ E^-)^2 E^\pm = 0. \quad (43)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Вещественнозначные функции $R^+(x, \tilde{t})$, $R^-(x, \tilde{t})$, заданные формулами*

$$\begin{aligned} R^+ &= E^+ \exp \left[- \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \tilde{\nu} \int^x E^+ E^- \right], \\ R^- &= \left[E_x^- + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \tilde{\nu} E^+ E^- E^+ \right] \exp \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \tilde{\nu} \int^x E^+ E^- \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} R^+ &= \left[-E_x^+ + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \tilde{\nu} E^+ E^- E^+ \right] \exp \left[- \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \tilde{\nu} \int^x E^+ E^- \right], \\ R^- &= E^- \exp \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \tilde{\nu} \int^x E^+ E^- \right], \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям системы реакции-диффузии:

$$\pm R_t^\pm = R^\pm + 2\nu R^+ R^- R^\pm, \quad (44)$$

если только функции $E^+(x, \tilde{t})$, $E^-(x, \tilde{t})$ удовлетворяют уравнениям общей системы РДП (39). При $\alpha = 1/2$ это связывает (44) с уравнением РДП-II (41), а при $\alpha = -1/2$ – с уравнением РДП-III (42). Но уравнение (44) можно преобразовать к РНУШ [3]

$$-i\Psi_t + \Psi_{xx} - 2\nu|\Psi|^2\Psi = s \frac{|\Psi|_{xx}}{|\Psi|} \Psi, \quad (45)$$

описывающему солитоны в холодной плазме [2]. Поэтому решения последней задачи можно также получить в терминах общей системы РДП (39) и соответствующей билинейной формы.

При подстановке $E^\pm = \sqrt{(s-1)/2\nu} g^\pm / f^\pm$ получим билинейное представление

$$\begin{aligned} (\mp D_{\tilde{t}} + D_x^2)(g^\pm \cdot f^\pm) &= 0, \\ D_x^2(f^+ \cdot f^-) + \frac{1}{2} D_x(g^+ \cdot g^-) &= 0, \quad D_x(f^+ \cdot f^-) + \alpha g^+ g^- = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

где $\alpha = 1/2$ (случай уравнения РДП-II),

$$\mp E_{\tilde{t}}^\pm + E_{xx}^\pm \mp \frac{4\theta e^2}{\kappa^2 \sqrt{s-1}} E^+ E^- E_x^\pm = 0, \quad (47)$$

или $\alpha = -1/2$ (случай уравнения РДП-III),

$$\mp E_{\tilde{t}}^\pm + E_{xx}^\pm \pm \frac{4\theta e^2}{\kappa^2 \sqrt{s-1}} E^{\pm 2} E_x^\mp - 2 \frac{4\theta^2 e^4}{\kappa^4 (s-1)} (E^+ E^-)^2 E^\pm = 0. \quad (48)$$

Заметим, что только в этих двух случаях подстановка Хироты имеет простой билинейный вид. Тогда билинеаризация при произвольном α может быть получена с помощью калибровочного преобразования, так что подстановка

$$E^{+(\alpha)} = \sqrt{\frac{s-1}{2\nu}} \frac{g^+}{(f^+)^{\frac{1}{2}+\alpha}(f^-)^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \quad E^{-(\alpha)} = \sqrt{\frac{s-1}{2\nu}} \frac{g^-}{(f^+)^{\frac{1}{2}-\alpha}(f^-)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \quad (49)$$

билинеаризует уравнение (39) в терминах первого билинейного представления (46). Для общего РНУШП (34) это приводит к билинеаризующей подстановке

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{s-1}{2\nu}} \frac{(g^+)^{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} \sqrt{s-1} (g^-)^{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} \sqrt{s-1}}{(f^+)^{\frac{1}{2}-i\alpha\sqrt{s-1}} (f^-)^{\frac{1}{2}+i\alpha\sqrt{s-1}}} (x, t\sqrt{s-1}). \quad (50)$$

Одно из диссипативных решений билинейной системы имеет вид

$$g^\pm = e^{\eta_1^\pm}, \quad f^\pm = 1 + e^{\phi_{11}^\pm} e^{\eta_1^+ + \eta_1^-}, \quad e^{\phi_{11}^\pm} = \mp \frac{k_1^\pm}{(k_1^+ + k_1^-)^2},$$

где $\eta_1^\pm = k_1^\pm x \pm (k_1^\pm)^2 \tilde{t} + \eta_1^{\pm(0)}$. Сделаем это решение регулярным, наложив условия $k_1^- > 0$ и $k_1^+ < 0$, тогда $-\tilde{v} < k < \tilde{v}$, где $k = k_1^+ + k_1^-$, $\tilde{v} = k_1^- - k_1^+$, $-kx_0^\pm =$

$\eta_1^{+(0)} + \eta_1^{-(0)} + \phi_{11}^\pm$ и скорость положительна, $\tilde{v} > 0$, так что диссипатон оказывается киральным. Для плотности получаем солитоноподобное решение

$$\rho = E^+ E^- = \frac{\kappa^2 \sqrt{s-1}}{2\theta e^2} \frac{k^2}{\sqrt{\tilde{v}^2 - k^2} \operatorname{ch} k(x - \tilde{v}t - x_0) + \tilde{v}}, \quad (51)$$

где $2x_0 = x_0^+ + x_0^-$. Число частиц, полный импульс и энергия задаются при этом следующими выражениями:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = -\frac{1}{\tilde{v}} \ln \left| \frac{f^+}{f^-} \right|_{-\infty}^{\infty}, \\ P &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (E_x^+ E^- - E^+ E_x^-) dx = \frac{1}{2\tilde{v}} \ln (f^+ f^-)_x \Big|_{-\infty}^{\infty}, \\ E &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[E_x^+ E_x^- + \frac{\tilde{v}}{2} E^+ E^- (E_x^+ E^- - E^+ E_x^-) \right] dx. \end{aligned} \quad (52)$$

Подставив в эти формулы решение для уединенного диссипативного солитона (диссипатона), получим

$$N = \frac{1}{\tilde{v}} \ln \frac{\tilde{v} + |k|}{\tilde{v} - |k|}, \quad P = \frac{|k|}{\tilde{v}}, \quad E = \frac{\tilde{v}|k|}{2\tilde{v}}. \quad (53)$$

Масса диссипатона $M = |k|/(\tilde{v}\tilde{v})$ в терминах числа частиц приобретает вид $M = \frac{1}{\tilde{v}} \operatorname{th} \frac{N\tilde{v}}{2}$, а выражения для импульса и энергии принимают вид выражений для нерелятивистской свободной частицы: $P = M\tilde{v}$, $E = M\tilde{v}^2/2$. При процессах слияния и расщепления двух солитонов при этом должны выполняться следующие условия:

$$N = N_1 + N_2, \quad P = P_1 + P_2, \quad E = E_1 + E_2. \quad (54)$$

С учетом (53) после некоторых алгебраических преобразований получим условие резонанса

$$|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2| = |k_1| + |k_2|, \quad (55)$$

где $\tilde{v}_a = k_a^- - k_a^+$, $k_a = k_a^- + k_a^+$, $a = 1, 2$. Для двухдиссипатонного решения имеем

$$\begin{aligned} g^\pm &= e^{\eta_1^\pm} + e^{\eta_2^\pm} + \alpha_1^\pm e^{\eta_2^+ + \eta_2^- + \eta_1^\pm} + \alpha_2^\pm e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \eta_2^\pm}, \\ f^\pm &= 1 + \sum_{i,j=1}^2 e^{\phi_{ij}^\pm} e^{\eta_i^+ + \eta_j^-} + \beta^\pm e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \eta_2^+ + \eta_2^-}, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\eta_i^\pm = k_i^\pm x \pm (k_i^\pm)^2 \tilde{t} + \eta_{i0}^\pm$, $k_{ij}^{nm} = (k_i^n + k_j^m)$ и

$$\begin{aligned} \alpha_1^\pm &= \pm \frac{1}{2} \frac{k_2^\mp (k_1^\pm - k_2^\pm)^2}{(k_{22}^{+-})^2 (k_{12}^{\pm\mp})^2}, \quad \alpha_2^\pm = \pm \frac{1}{2} \frac{k_1^\mp (k_1^\pm - k_2^\pm)^2}{(k_{11}^{+-})^2 (k_{21}^{\pm\mp})^2}, \\ \beta^\pm &= \frac{(k_1^+ - k_2^+)^2 (k_1^- - k_2^-)^2}{4(k_{11}^{+-} k_{12}^{+-} k_{21}^{+-} k_{22}^{+-})^2} k_1^\pm k_2^\pm, \\ e^{\phi_{ii}^\pm} &= \mp \frac{k_i^\pm}{2(k_{ii}^{+-})^2}, \quad e^{\phi_{ij}^+} = \frac{-k_i^+}{2(k_{ij}^{+-})^2}, \quad e^{\phi_{ij}^-} = \frac{k_j^-}{2(k_{ij}^{+-})^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Профили типичных солитонных резонансных состояний с одним солитонным резонансом (а) и с четырьмя солитонными резонансами (б).

Из условия регулярности получим, что $k_i^+ \leq 0$, $k_i^- \geq 0$ при $\alpha = 1/2$ для уравнения (47) и $k_i^+ \geq 0$, $k_i^- \leq 0$ при $\alpha = -1/2$ для уравнения (48). Разрешая теперь резонансное условие (55), получим, что для любого решения этого алгебраического уравнения коэффициент β обращается в нуль или в бесконечность. В обоих случаях двухсолитонное решение приводится к односолитонному. Таким образом, это решение описывает слияние двух солитонов, распространяющихся в одном и том же направлении и создающих резонансное состояние при некотором значении исходных параметров (см. рисунок).

Благодарности. Работа была поддержана Izmir Institute of Technology, Turkey (грант BAP IYTE 25 2008) и Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan.

Список литературы

- [1] O. K. Pashaev, J.-H. Lee, *Modern Phys. Lett. A*, **17**:24 (2002), 1601–1619.
- [2] J.-H. Lee, O. K. Pashaev, C. Rogers, W. K. Schief, *J. Plasma Phys.*, **73**:2 (2007), 257–272.
- [3] O. K. Pashaev, J.-H. Lee, *Chaos Solitons Fractals*, **11**:14 (2000), 2193–2202.
- [4] O. K. Pashaev, *Nucl. Phys. B*, **57**:1–3 (1997), 338–341.
- [5] U. Aglietti, L. Griguolo, R. Jackiw, S.-Y. Pi, D. Seminaraet, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:21 (1996), 4406–4409; R. Jackiw, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **4**:3–4 (1997), 261–270; H. Min, Q.-H. Park, *Phys. Lett. B*, **388**:3 (1996), 621–625.
- [6] J.-H. Lee, C.-K. Lin, O. K. Pashaev, *Chaos Solitons Fractals*, **19**:1 (2004), 109–128.