Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Манько, В. И. Манько, Квантовое преобразование Фурье и неравенства для томографической энтропии Реньи, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 143–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:03:06

© 2009 г.

М. А. Манько*, В. И. Манько*

КВАНТОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ РЕНЬИ

Показано, что энтропия Реньи, ассоциированная со спиновыми томограммами квантовых состояний, удовлетворяет новым неравенствам, зависящим от квантового преобразования Фурье. Получено предельное неравенство для энтропии фон Неймана спиновых квантовых состояний и введен новый вид энтропии, ассоциированный с квантовым преобразованием Фурье. Рассмотрены возможные связи с условиями субаддитивности и сильной субаддитивности для томографической энтропии и энтропии фон Неймана.

Ключевые слова: соотношения неопределенностей, энтропия, квантовая томография, квантовое преобразование Фурье.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был сформулирован подход к квантовой теории информации, основанный на введении так называемого вероятностного представления. При таком подходе элементы квантовой теории информации – кубиты, кудиты и операторы, описывающие состояния кудитов и связи между ними, – даны в виде функций, которые называются *символами операторов*. Для символов операторов правило умножения, называемое звездочным произведением, определяется некоторым интегральным нелокальным ядром [2]. Как для чистых, так и для смешанных состояний кудитов символы операторов плотности являются стандартными функциями распределения вероятностей. Поскольку состояния кудитов составных систем определяются стандартными распределениями вероятностей, все характеристики этих распределений, включая энтропию Шеннона [3] и энтропию Реньи [4], могут быть использованы для введения в квантовой теории информации энтропий, отвечающих символам операторов плотности, таких как, например, энтропия Реньи и относительная энтропия, определяемые символами соответствующих операторов. Энтропия Шеннона является предельным случаем энтропии Реньи, поэтому соответствующий аналог энтропии Шеннона, определяемой символом оператора плотности,

---

*Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: manko@sci.lebedev.ru

и свойства этой энтропии могут быть получены в квантовой теории информации в рамках предложенного вероятностного представления.

Квантовой механике и квантовой теории информации свойственна некоторая фундаментальная особенность, отличающая их квантовую природу от природы их классических аналогов, – это соотношения неопределенностей. Соотношениям неопределенностей Гейзенберга [5], Шредингера [6] и Робертсона [7], [8], записанным для сопряженных переменных, таких как координаты и импульсы, соответствуют так называемые энтропийные соотношения неопределенностей. Энтропийные соотношения неопределенностей для непрерывных переменных были записаны в виде неравенств для энтропии Шеннона, связанной с плотностями вероятностей координаты и импульса, в работах [9]–[11].

В квантовой теории информации при подходе, основанном на вероятностном представлении, условия субаддитивности и сильной субаддитивности в работе [1] были получены для распределений вероятностей, описывающих квантовые состояния кудитов (так называемые спиновые томограммы), а также были прояснены некоторые соотношения между этими неравенствами и условиями субаддитивности и сильной субаддитивности. А именно, при подходе, основанном на вероятностном представлении, было построено томографическое отображение унитарной группы $U(n)$ в симплекс и с использованием этого отображения введены понятия энтропии Шеннона, энтропии Реньи и других видов энтропии для унитарной группы.

Энтропийные соотношения неопределенностей для конечномерных квантовых систем были получены в виде неравенств для энтропии Шеннона, связанной с распределениями вероятностей, отвечающих измерениям некоммутирующих наблюдаемых [12]–[16]. Соотношения неопределенностей для энтропии Реньи для распределений координаты и импульса, а также для конечномерных систем с измеряемыми наблюдаемыми, связанными квантовым преобразованием Фурье, были получены в работе [17]. Для систем с двумя и тремя подсистемами существуют известные неравенства для энтропии фон Неймана, которые называются соотношениями субаддитивности и сильной субаддитивности [18], [19].

Цель настоящей работы – обобщение энтропийных неравенств типа соотношений субаддитивности и сильной субаддитивности, полученных авторами в работе [1] в рамках вероятностного представления в квантовой теории информации, и нахождение новых энтропийных неравенств для спиновых томограмм, являющихся аналогами энтропийных неравенств, которые обсуждались в работах [12]–[17]. Для непрерывных переменных энтропийные неравенства для квантовых симплектических томограмм были рассмотрены в работах [20]–[25]. Существенным аспектом новых неравенств является их тесная связь со свойствами квантового преобразования Фурье, которая обсуждалась в работе [26] и использовалась в квантовой теории информации (см., например, [27]–[29]). Квантовое преобразование Фурье является важным элементом теории и играет ключевую роль в квантовых вычислениях и обработке квантовой информации.

Мы получим энтропийные неравенства, которые налагают некоторые ограничения на унитарные спиновые томограммы, связывая их с числом $\ln N$, где N – раз-

мерность гильбертова пространства. Число $\ln N$ появлялось в энтропийных неравенствах в работах [12]–[14], [16], но новым элементом настоящего исследования является непосредственная связь числа $\ln N$ с распределением томографической вероятности, определяющей состояние кудита в вероятностном представлении квантовой теории информации.

2. СПИНОВЫЕ ТОМОГРАММЫ

Пусть дано N -мерное гильбертово пространство состояний спиновой системы. Оно может быть представлено или как пространство состояний одной частицы со спином $j = (N - 1)/2$, или, в случае представления в виде произведения чисел $N = n_1 n_2 \dots n_M$, как пространство многочастичной спиновой системы с $j_1 = (n_1 - 1)/2$, $j_2 = (n_2 - 1)/2$, $\dots$, $j_M = (n_M - 1)/2$.

$(N \times N)$ -мерная матрица плотности ρ квантового состояния может быть представлена в форме унитарной томограммы спинового состояния [30].

Томограмма спинового состояния с $j = (N - 1)/2$ определяется соотношением

$$w(m, u) = \langle m | u^\dagger \rho u | m \rangle, \quad (1)$$

где ρ – матрица плотности, u – унитарная матрица размерности $N \times N$, $m = -j, -j + 1, \dots, j$ – значения проекции спина на ось z . Томограмма $w(m, u)$ является неотрицательной функцией распределения вероятности случайной спиновой переменной, удовлетворяющей условию нормировки

$$\sum_{m=-j}^j w(m, u) = 1 \quad (2)$$

и равенству

$$\int w(m, u) du = 1, \quad (3)$$

где du есть мера Хаара на унитарной группе, при этом $\int du = 1$. Важным свойством томограммы (1) является ее взаимосвязь с матрицей плотности ρ , а именно $\rho \leftrightarrow w(m, u)$ [1]. Это означает, что квантовое состояние задано, если известна томограмма [31], [32].

3. КВАНТОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Симметричная унитарная $(N \times N)$ -матрица F с матричными элементами $F_{jk} = e^{2\pi i j k / N} / \sqrt{N}$, $j, k = 0, 1, \dots, N - 1$, являющимися характерами неприводимого представления циклической группы C_N , может быть использована для обратимого преобразования нормированного комплексного вектора $\vec{a}$ с компонентами a_k в комплексный вектор $\vec{a}^{(f)}$ с компонентами $a_k^{(f)}$:

$$a_k^{(f)} = \sum_{j=0}^{N-1} F_{kj} a_j, \quad a_k = \sum_{j=0}^{N-1} (F^\dagger)_{kj} a_j^{(f)}. \quad (4)$$

Матрица F с матричными элементами F_{kj} удовлетворяет равенству

$$F^N = 1. \quad (5)$$

Преобразование (4) называется квантовым преобразованием Фурье для циклической группы C_N .

Если использовать для проекции спина индексы $m = -j, -j+1, \dots, j$, оператор $\hat{F}$ для квантового преобразования Фурье можно определить как

$$\hat{F}|m\rangle = \sum_{m'=-j}^j F_{m'm}|m'\rangle, \quad (6)$$

где симметричная матрица

$$F_{m'm} = \langle m'|\hat{F}|m\rangle \quad (7)$$

имеет вид

$$F_{m'm} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & a^2 & \dots & a^{N-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \dots & a^{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a^{N-1} & a^{N-2} & \dots & a \end{pmatrix}, \quad a = e^{2\pi i/N}. \quad (8)$$

Унитарный оператор квантового преобразования Фурье принимает вид

$$\hat{F} = \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j}^j F_{m'm}|m'\rangle\langle m|. \quad (9)$$

В силу равенства (5) имеем $(\hat{F})^N = \hat{1}$, где $\hat{1}$ – единичный оператор.

4. ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ ЭНТРОПИИ ШЕННОНА И РЕНЬИ

Используя стандартные определения теории вероятностей, можно ввести томографическую энтропию Шеннона [1], [3], [33] и томографическую энтропию Реньи [1], [4]. Томографическая энтропия Шеннона, определяемая томографическим символом оператора плотности, является функцией на унитарной группе

$$H_u = - \sum_{m=-j}^j w(m, u) \ln w(m, u). \quad (10)$$

Томографическая энтропия Реньи, определяемая томографическим символом оператора плотности, также является функцией на унитарной группе, но зависит от дополнительного параметра,

$$R_u = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{m=-j}^j (w(m, u))^q. \quad (11)$$

В случае двух спиновых томограмм $w_1(m, u)$ и $w_2(m, u)$ мы определяем относительную q -энтропию, задаваемую томографическим символом оператора плотности, как

$$H_q(w_1(u) | w_2(u)) = - \sum_{m=-j}^j w_1(m, u) \ln_q \frac{w_2(m, u)}{w_1(m, u)}, \quad (12)$$

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad x > 0, \quad q > 0, \quad \ln_{q \rightarrow 1} x = \ln x. \quad (13)$$

Относительная томографическая q -энтропия является неотрицательной функцией.

При $q \rightarrow 1$ имеем $R_u \rightarrow H_u$, и томографическая относительная q -энтропия преобразуется в относительную энтропию

$$H(w_1(u) | w_2(u)) = - \sum_{m=-j}^j w_1(m, u) \ln \frac{w_2(m, u)}{w_1(m, u)}. \quad (14)$$

Как показано в работе [1], минимальное значение на унитарной группе томографической энтропии Реньи равно квантовой энтропии Реньи:

$$\min R_u = \frac{1}{1 - q} \ln \text{Tr } \rho^q. \quad (15)$$

Относительная энтропия (12) также является неотрицательной функцией для всех возможных значений параметра деформации q .

Минимальное значение энтропии H_u , задаваемое (10) на унитарной группе, равно энтропии фон Неймана [1], [33]

$$\min H_u = - \text{Tr } \rho \ln \rho. \quad (16)$$

5. ЭНТРОПИЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ШЕННОНА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ НЕКОММУТИРУЮЩИХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Рассмотрим известные энтропийные неравенства [12]–[16], которые появляются в проблеме измерения двух наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в конечномерном гильбертовом пространстве.

Пусть спектральные разложения эрмитовых операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют вид

$$\hat{A} = \sum_k A_k |a_k\rangle \langle a_k|, \quad \hat{B} = \sum_k B_k |b_k\rangle \langle b_k|, \quad k = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где A_k и B_k – собственные значения наблюдаемых, $|a_k\rangle$ и $|b_k\rangle$ – их ортонормированные системы собственных векторов.

Для чистого состояния $|\psi\rangle$ имеются два распределения вероятностей

$$p_k = |\langle a_k | \psi \rangle|^2, \quad q_k = |\langle b_k | \psi \rangle|^2. \quad (18)$$

Соответствующие энтропии Шеннона, связанные с этими распределениями, имеют вид

$$H_p = - \sum_k p_k \ln p_k, \quad H_q = - \sum_k q_k \ln q_k, \quad (19)$$

при этом они удовлетворяют неравенству, полученному в работе [34],

$$H_p + H_q \geq -2 \ln \frac{1}{2} (1 + c), \quad (20)$$

где параметр c определяется максимальной величиной модуля скалярного произведения:

$$c = \max_{j,k} |\langle a_j | b_k \rangle|. \quad (21)$$

Более сильное неравенство

$$H_p + H_q \geq -2 \ln c \quad (22)$$

было доказано в работе [12] (см. также [35], где была предпринята попытка его доказательства).

Для наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ с собственными векторами, имеющими взаимосвязанные базисы $|a_k\rangle$ и $|b_k\rangle$ [14], [26],

$$\max |\langle a_i | b_j \rangle| = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (23)$$

неравенство (22) принимает вид [14] $H_p + H_q \geq \ln N$. Таким образом, размерность гильбертова пространства N появляется в энтропийном неравенстве.

Проблема взаимосвязанных базисов связана с геометрией конечных гильбертовых пространств [36], [37]. Она широко обсуждалась в связи с построением функции Вигнера для конечномерного гильбертова пространства, а также в квантовой криптографии [27], [38]–[41].

Энтропийные неравенства для энтропии Шеннона могут быть также получены при изучении проблемы измерения нескольких некоммутирующих наблюдаемых с ортонормированным набором собственных векторов, удовлетворяющих условию (23) (см. [14], [15]). В работе [13] энтропийные неравенства для энтропии Тсаллиса для непрерывных переменных были получены на базе неравенств Соболева, а в работе [17] аналогичные энтропийные соотношения неопределенностей для энтропии Реньи приведены для конечного гильбертова пространства и непрерывных переменных.

6. ИЗВЕСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ И ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Энтропии, определяемые для символа оператора плотности, удовлетворяют некоторым известным неравенствам, полученным в работе [1]. Например, если спиновая система состоит из спинов j_1 и j_2 , то базис в пространстве тензорного произведения состояний имеет вид

$$|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle |m_2\rangle. \quad (24)$$

В этом случае томограмма является совместным распределением вероятностей двух случайных проекций спина $m_1 = -j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1$ и $m_2 = -j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2$, зависящим от унитарной матрицы u размерности $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \times (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Эта томограмма имеет вид

$$w(m_1, m_2, u) = \langle m_1 m_2 | u^\dagger \rho(1, 2) u | m_1 m_2 \rangle, \quad (25)$$

где $\rho(1, 2)$ – матрица плотности двухчастичной системы с матричными элементами

$$\rho(1, 2)_{m_1 m_2, m'_1 m'_2} = \langle m_1 m_2 | \rho(1, 2) | m'_1 m'_2 \rangle. \quad (26)$$

Для томограммы можно ввести энтропию Шеннона

$$H_{12}(u) = - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} w(m_1, m_2, u) \ln w(m_1, m_2, u), \quad (27)$$

которая удовлетворяет условию субаддитивности для всех элементов унитарной группы

$$H_{12}(u) \leq H_1(u) + H_2(u), \quad (28)$$

где $H_1(u)$, $H_2(u)$ – энтропии Шеннона, связанные с томограммами подсистем

$$w_1(m_1, u) = \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} w(m_1, m_2, u), \quad w_2(m_2, u) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} w(m_1, m_2, u) \quad (29)$$

соотношением

$$H_k(u) = - \sum_{m_k=-j_k}^{j_k} w_k(m_k, u) \ln w_k(m_k, u), \quad k = 1, 2. \quad (30)$$

Из неравенства (28) в силу соотношения между энтропией фон Неймана и томографической энтропией следует известное неравенство [1], являющееся условием субаддитивности соответствующей энтропии фон Неймана для системы из двух подсистем

$$S_{12} \leq S_1 + S_2, \quad (31)$$

где

$$S_k = - \text{Tr } \rho_k \ln \rho_k, \quad k = 1, 2, \quad \rho_1 = - \text{Tr}_2 \rho(1, 2), \quad \rho_2 = - \text{Tr}_1 \rho(1, 2).$$

Для спиновой системы, состоящей из трех подсистем со спинами j_1 , j_2 , j_3 и матрицей плотности $\rho(1, 2, 3)$, спиновая томограмма может быть записана в виде

$$w(m_1, m_2, m_3, u) = \langle m_1 m_2 m_3 | u^\dagger \rho(1, 2, 3) u | m_1 m_2 m_3 \rangle. \quad (32)$$

С этой томограммой связана энтропия Шеннона $H_{123}(u)$, которая, в свою очередь, удовлетворяет условию сильной субаддитивности на унитарной группе [1]

$$H_{123}(u) + H_2(u) \leq H_{12}(u) + H_{23}(u), \quad (33)$$

где

$$H_{123}(u) = - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} w(m_1, m_2, m_3, u) \ln w(m_1, m_2, m_3, u),$$

при этом энтропии $H_{12}(u)$, $H_{23}(u)$ и $H_2(u)$ определяются с помощью маргинальных томограмм

$$\begin{aligned} w_{12}(m_1, m_2, u) &= \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} w(m_1, m_2, m_3, u), \\ w_{23}(m_2, m_3, u) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} w(m_1, m_2, m_3, u), \\ w_2(m_2, u) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} w_{12}(m_1, m_2, u). \end{aligned} \quad (34)$$

Новое неравенство (33) не противоречит известному условию сильной субаддитивности для энтропии фон Неймана [18], [19]

$$S_{123} + S_2 \leq S_{12} + S_{23}, \quad S_{123} = -\text{Tr } \rho_{123} \ln \rho_{123}, \quad (35)$$

а другие энтропии являются энтропиями фон Неймана для редуцированных матриц плотности $\rho(1, 2) = \text{Tr}_3 \rho(1, 2, 3)$ и $\rho(2, 3) = \text{Tr}_1 \rho(1, 2, 3)$.

Неравенства (28) и (33) являются новыми неравенствами для составных квантовых конечномерных систем, полученных в работе [1].

7. НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ РЕНЬИ

В этом разделе мы продолжим изучение томографических энтропий, следуя анализу, проделанному в работе [1], и выведем новые неравенства для спиновых томографических энтропий, связанных с квантовым преобразованием Фурье. Для непрерывных сопряженных переменных (координата и импульс) неравенства для энтропии Реньи, связанные с плотностями вероятностей по координате и импульсу, были выведены в работе [17]. Эти неравенства использовались при выводе новых интегральных неравенств для симплектической и оптической томограмм в работах [20], [22]–[25]. Аналог соотношения неопределенностей для энтропии Реньи для N -мерного гильбертова пространства был получен в работе [17] в виде

$$\frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{k=1}^N \tilde{p}_k^\alpha + \frac{1}{1-\beta} \ln \sum_{l=1}^N p_l^\beta \geq \ln N, \quad (36)$$

где

$$\tilde{p}_k = |\tilde{a}_k|^2, \quad p_l = |a_l|^2, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2,$$

а комплексные числа $\tilde{a}_k$ и a_l связаны квантовым преобразованием Фурье

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \exp\left(\frac{2\pi i k l}{N}\right) a_l. \quad (37)$$

Ниже мы используем неравенства (36) для вывода новых неравенств для энтропии Шеннона и энтропии Реньи, определяемых унитарными спиновыми томограммами. Спиновая томограмма состояния с оператором плотности ρ может быть представлена как столбец вектора вероятности на унитарной группе с компонентами $w_m(u)$. Введем другой N -вектор с компонентами $p_m(u) = \sqrt{w_m(u)}$. В силу неравенства (36) для этих векторов и с учетом соотношения

$$\left| \sum_{m'=-j'}^j F_{mm'} \sqrt{w(m', u)} \right| = \sqrt{w_F(m, u)}, \quad (38)$$

где $F_{mm'}$ задается в (8) и $w_F(m, u)$ есть распределение вероятности, получаем неравенство

$$\frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{m=-j}^j w(m, u)^\alpha + \frac{1}{1-\beta} \ln \sum_{m=-j}^j w_F(m, u)^\beta \geq \ln N. \quad (39)$$

Используя также определение спиновой томограммы для чистого состояния $|\psi\rangle$, получаем другое аналогичное неравенство

$$\frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{m=-j}^j w(m, u)^\alpha + \frac{1}{1-\beta} \ln \sum_{m=-j}^j w(m, Fu)^\beta \geq \ln N, \quad (40)$$

где F – матрица квантового преобразования Фурье. Можно предположить, что неравенство (40) остается верным и для смешанного состояния.

Итак, для энтропии Реньи (11) мы имеем неравенство для каждой унитарной матрицы

$$R_\alpha(u) + R_\beta(Fu) \geq \ln N. \quad (41)$$

Унитарная спиновая томограмма частицы со спином j для состояния с $(N \times N)$ -матрицей плотности ρ , где $N = 2j + 1$, должна удовлетворять неравенству (40). При $\alpha \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 1$ получаем неравенства для энтропии Шеннона спинового состояния

$$H(u) + H(Fu) \geq \ln N. \quad (42)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$H(u) + H_F(u) \geq \ln N, \quad (43)$$

где $H_F(u)$ – энтропия Шеннона, связанная с распределением вероятности $w_F(m, u)$.

Для минимального значения энтропии Шеннона, достигаемого для унитарной матрицы u_0 , имеется энтропия фон Неймана $H(u_0) = S_{vN}$. Неравенство (42), записанное для u_0 ,

$$H(u_0) + H(Fu_0) \geq \ln N, \quad (44)$$

дает неравенство для энтропии фон Неймана

$$S_{vN} + S(Fu_0) \geq \ln N, \quad (45)$$

где $S(Fu_0)$ – новая энтропия. Она имеет следующий физический смысл. Если оператор плотности квантового состояния спина задается в форме спектрального разложения

$$\hat{\rho} = \sum_{q=-j}^j \lambda_q |q\rangle \langle q|, \quad (46)$$

можно идентифицировать собственное состояние $|q\rangle$ оператора плотности $\hat{\rho}$ с “координатным” состоянием. При подходе со взаимосвязанными базисами и функцией Вигнера для конечного гильбертова пространства [26], [27], [38]–[42] состояния $|p\rangle = \hat{F}|q\rangle$ с оператором преобразования Фурье $\hat{F}$ интерпретируются как собственные состояния “импульса”. Матричные элементы $\langle p|\hat{F}|q\rangle = F_{pq}$ дают матрицу F , совпадающую с матрицей преобразования Фурье.

Итак, мы интерпретировали новое неравенство, как это было сделано в случае непрерывных переменных. Новая энтропия $S(Fu_0)$ в (45) является энтропией Шеннона для распределения “импульсов”, если стандартная энтропия фон Неймана отождествляется с энтропией Шеннона для распределения “координат”.

Рассмотрим пример состояния кубита с матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Оператор координаты $\hat{q}$ является σ_z -матрицей, и оператор импульса $\hat{p}$ является σ_x -матрицей. Собственными векторами оператора координаты $|q\rangle$ и оператора импульса $|p\rangle$ являются

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

соответственно. Матрица F имеет вид

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

матрица $u_0 = 1$. Неравенство (45) обращается в равенство, так как $S_{vN} = 0$, $S(F) = \ln 2$, $S_{vN} + S(F) = \ln 2 \geq \ln 2$. Неравенство для энтропии Реньи также обращается в равенство

$$R_\alpha(u_0) + R_\beta(Fu_0) = \ln 2 \geq \ln 2. \quad (49)$$

В рассмотренном примере векторы $|q\rangle$ и $|p\rangle$ образуют так называемые *взаимосвязанные базисы* [39]–[42].

Следует заметить, что существуют энтропийные соотношения неопределенностей Шеннона для распределений, связанных с набором взаимосвязанных базисов [15], а также с парой ортогональных базисов [12]. Если взаимосвязанные базисы связаны квантовым преобразованием Фурье, неравенство (44) совпадает с полученным в работе [12].

В работе [1] мы ввели усредненные по группе энтропии Шеннона и Реньи.

В силу инвариантности меры Хаара можно заключить, что усредненная по унитарной группе томографическая энтропия Шеннона удовлетворяет неравенству

$$\overline{H} = \int H(u) du \geq \frac{1}{2} \ln N. \quad (50)$$

Также для усредненной по унитарной группе томографической энтропии Реньи (11) выполняется неравенство

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = \int R_{\alpha}(u) du + \int R_{\beta}(u) du \geq \ln N, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2. \quad (51)$$

Чтобы проиллюстрировать полученные неравенства, рассмотрим смешанное состояние кубита с диагональной матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a + b = 1. \quad (52)$$

В этом случае неравенство (42) можно интерпретировать следующим образом. Энтропия фон Неймана этого состояния имеет вид

$$S_{\text{vN}} = -a \ln a - b \ln b. \quad (53)$$

В результате квантового преобразования Фурье (48) матрица плотности принимает вид

$$F^{\dagger} \rho F = \begin{pmatrix} 1/2 & (a-b)/2 \\ (a-b)/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Соответствующая ей томографическая энтропия удовлетворяет равенству $H(Fu_0) = \ln 2$, $u_0 = 1$. Неравенство (42) принимает вид

$$-a \ln a - b \ln b + \ln 2 \geq \ln 2, \quad (55)$$

а это означает, что энтропия фон Неймана является неотрицательной величиной. Однако неравенство (43) дает лучшую оценку, поскольку число $\ln 2$ заменяется меньшим. Действительно, вектор томографической вероятности состояния кубита

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (56)$$

связан с амплитудой вектора вероятности с положительными компонентами

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

В результате квантового преобразования Фурье этого вектора получается вектор-столбец

$$\vec{W}_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Вектор распределения вероятности связан с рассмотренным выше вектором амплитуды вероятности

$$\vec{w}_F = \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{ab} \\ 1/2 - \sqrt{ab} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Применяя неравенство, связывающее энтропии Шеннона для двух векторов (57) и (59), получаем

$$-a \ln a - b \ln b - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{ab} \right) \ln \left(\frac{1}{2} + \sqrt{ab} \right) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{ab} \right) \ln \left(\frac{1}{2} - \sqrt{ab} \right) \geq \ln 2, \quad (60)$$

или

$$S_{vN} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{ab} \right) \ln \left(\frac{1}{2} + \sqrt{ab} \right) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{ab} \right) \ln \left(\frac{1}{2} - \sqrt{ab} \right) \geq \ln 2. \quad (61)$$

Это неравенство не очевидно, хотя мы знаем, что энтропия фон Неймана $S_{vN} \geq 0$.

Выведем некоторые неравенства для унитарной матрицы. Рассмотрим произвольную $(N \times N)$ -унитарную матрицу u_{jk} . Справедливо неравенство

$$- \sum_{j=1}^N (|u_{jk}|^2 \ln |u_{jk}|^2 + |(Fu)_{jk}|^2 \ln |(Fu)_{jk}|^2) \geq \ln N, \quad (62)$$

или

$$- \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (|u_{jk}|^2 \ln |u_{jk}|^2 + |(Fu)_{jk}|^2 \ln |(Fu)_{jk}|^2) \geq N \ln N, \quad (63)$$

где F_{jk} – матрица преобразования Фурье. Интегрируя неравенство (62) по унитарной группе с мерой Хаара с нормировкой (3), получаем неравенство

$$- \int \sum_{j=1}^N |u_{jk}|^2 \ln |u_{jk}|^2 du \geq \frac{1}{2} \ln N. \quad (64)$$

На примере кубита мы показали, что для томограмм спиновых состояний, связанных квантовым преобразованием Фурье, имеют место условия в виде неравенств для томографических энтропий Шеннона. Аналогично можно получить неравенства и для томографических энтропий Реньи.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что существуют несколько неравенств для энтропии Шеннона и энтропии Реньи, связанных с томограммами квантового спинового состояния. Эти неравенства дают новые соотношения для теории информации в дополнение к известным условиям субаддитивности и сильной субаддитивности. Физическое и информационное значения полученных неравенств требуют дальнейшего изучения.

Благодарности. Инициатором этих исследований был профессор Р. Вилела Мендеш, и плодотворные дискуссии с ним оказали значительную помощь авторам при получении результатов, представленных в настоящей статье. Авторы выражают ему искреннюю благодарность. Работа поддержана РФФИ (грант № 07-02-00598). Авторы благодарят Университет Лиссабона, где эта работа была частично выполнена. М. А. Манько благодарит организаторов Международной конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. V” за гостеприимство и РФФИ за финансовую поддержку (грант № 08-02-08174).

Список литературы

- [1] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, R. Vilela Mendes, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:6 (2006), 507–532.
- [2] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo, *J. Phys. A*, **35**:3 (2002), 699–719.
- [3] C. E. Shannon, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948), 379–423.
- [4] A. Rényi, *Probability Theory*, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., **10**, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- [5] W. Heisenberg, *Z. Phys.*, **43**:3–4 (1927), 172–198.
- [6] Э. Шредингер, “К принципу неопределенности Гейзенберга”, *Избранные труды по квантовой механике*, Наука, М., 1976, 210–217.
- [7] H. P. Robertson, “A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation”, *Proc. American Phys. Soc. Abstracts, Phys. Rev.*, **35** (1930), 667.
- [8] H. P. Robertson, *Phys. Rev.*, **46**:9 (1934), 794–801.
- [9] I. I. Hirschman Jr., *Amer. J. Math.*, **79**:1 (1957), 152–156.
- [10] I. Białynicki-Birula, J. Mycielski, *Comm. Math. Phys.*, **44**:2 (1975), 129–132.
- [11] В. В. Додонов, В. И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, Труды ФИАН, **183**, ред. М. А. Марков, Наука, М., 1987.
- [12] H. Maassen, J. B. M. Uffink, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:12 (1988), 1103–1106.
- [13] A. K. Rajagopal, *Phys. Lett. A*, **205**:1 (1995), 32–36.
- [14] J. Sánchez-Ruiz, *Phys. Lett. A*, **201**:2–3 (1995), 125–131.
- [15] M. A. Ballester, S. Wehner, *Phys. Rev. A*, **75**:2 (2007), 022319.
- [16] A. Azarchs, *Entropic uncertainty relations for incomplete sets of mutually unbiased observables*, [arXiv: quant-ph/0412083](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0412083).
- [17] I. Białynicki-Birula, *Phys. Rev. A*, **74**:5 (2006), 052101.
- [18] E. H. Lieb, M. B. Ruskai, *J. Math. Phys.*, **14**:2 (1973), 1938–1941.
- [19] M. B. Ruskai, *Int. J. Quant. Inform.*, **3**:3 (2005), 579–590; Erratum, **4**:4 (2006), 747–748; [arXiv: quant-ph/0404126](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0404126).
- [20] S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, *Eur. Phys. J. B*, **52**:2 (2006), 191–198.
- [21] M. A. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:5 (2006), 405–413.
- [22] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, S. De Nicola, R. Fedele, *Acta Phys. Hung. B*, **26**:1–2 (2006), 71–77.
- [23] С. Де Никола, Р. Феделе, М. А. Манько, В. И. Манько, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 241–247.
- [24] М. А. Ман'ко, “Tomographic entropy and new entropic uncertainty relations”, *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations – 4* (Växjö, Sweden, 2007), AIP Conf. Proc., **962**, eds. G. Adenier, A. Yu. Khrennikov, P. Lahti, V. I. Man'ko, T. Nieuwenhuizen, AIP, Melville, NY, 2007, 132–139.
- [25] S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Phys. Conf. Ser.*, **70**:1 (2007), 012007.
- [26] J. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **46**:4 (1960), 570–579; *Quantum Kinematics and Dynamics*, Benjamin, New York, 1970.
- [27] S. Zhang, C. Lei, A. Vourdas, J. A. Dunningham, *J. Phys. B*, **39** (2006), 1625–1637.

- [28] P. W. Shor, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **26**:5 (1997), 1484–1509; [arXiv: quant-ph/9508027](#).
- [29] Y. S. Weinstein, M. A. Pravia, E. M. Fortunato, S. Lloyd, D. G. Cory, *Phys. Rev. Lett.*, **86**:9 (2001), 1889–1891.
- [30] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria, *Phys. Lett. A*, **327**:5–6 (2004), 353–364.
- [31] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **229**:6 (1997), 335–339.
- [32] В. И. МАНЬКО, О. В. МАНЬКО, *ЖЭТФ*, **112**:3 (1997), 796–804.
- [33] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **25**:2 (2004), 115–122.
- [34] D. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.*, **50**:9 (1983), 631–633.
- [35] K. Kraus, *Phys. Rev. D*, **35**:10 (1987), 3070–3075.
- [36] W. K. Wootters, *Ann. Phys.*, **176**:1 (1987), 1–21.
- [37] W. K. Wootters, *Picturing qubits in phase space*, [arXiv: quant-ph/0306135](#).
- [38] M. R. Kibler, *Collect. Czech. Chem. Commun.*, **70** (2005), 771.
- [39] M. Planat, *Internat. J. Modern Phys. B*, **20**:11–13 (2006), 1833–1850; [arXiv: math-ph/0510044](#).
- [40] A. B. Klimov, C. Muñoz, J. L. Romero, *J. Phys. A*, **39**:46 (2006), 14471–14497.
- [41] C. Cormick, E. F. Galvão, D. Gottesman, J. P. Paz, A. O. Pittenger, *Phys. Rev. A*, **73**:1 (2006), 012301; [arXiv: quant-ph/0506222](#).
- [42] M. Planat, H. Rosu, *Eur. Phys. J. D*, **36**:1 (2005), 133–139.