Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Масилло, Дж. Сколарици, С. Соццо, Собственные смеси против несобственных: на пути к кватернионной квантовой механике, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 157–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:34:23

© 2009 г. Ф. Масилло*, Дж. Сколарици*, С. Соццо*

СОБСТВЕННЫЕ СМЕСИ ПРОТИВ НЕСОБСТВЕННЫХ: НА ПУТИ К КВАТЕРНИОННОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Операторы плотности, полученные путем вычисления частичных следов, представляют собой несобственные смеси подсистем составной физической системы, поскольку коэффициенты в выпуклых суммах, через которые они выражаются, никогда не несут интерпретации незнания. Следовательно, поставить в соответствие таким подсистемам состояния в стандартной квантовой механике проблематично (проблема подсушности). При интерпретации квантовой механики в рамках семантического реализма вместо этого предложено рассматривать несобственные смеси как истинно нечистые состояния, концептуально отличающиеся от собственных смесей. На основе этого предложения показано, что в кватернионной формулировке квантовой механики собственные и несобственные смеси могут быть представлены с помощью различных операторов плотности, и поэтому их можно различать также и с математической точки зрения. Приведен простой пример, имеющий отношение к квантовой теории измерений.

Ключевые слова: кватернионная квантовая механика, собственные и несобственные смеси, проблема подсушности, семантический реализм.

1. ВВЕДЕНИЕ

В комплексной формулировке квантовой механики (ККМ-формулировка) физическая система Ω связана с сепарабельным комплексным гильбертовым пространством $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$, а состояния системы Ω представлены операторами плотности на пространстве $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$, которые в случае *чистых* состояний редуцируются к одномерным (ортогональным) проекционным операторам. Каждый оператор плотности ρ , представляющий *смешанное* состояние, или *собственную смесь* S_M системы Ω , можно многими способами выразить как выпуклую комбинацию чистых состояний. Кроме того, существует разложение $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, в котором каждый коэффициент p_i

*Dipartimento di Fisica dell' Università del Salento; INFN Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: masillo@le.infn.it, scolarici@le.infn.it, sozzo@le.infn.it

обозначает вероятность того, что система Ω находится в состоянии S_i , представляемом проекционным оператором $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Собственная смесь может быть получена при проведении (невыборочного) измерения, что приводит к коллапсу волновой функции, являющемуся нелинейным процессом в квантовой механике. Вероятность p_i выражает степень нашего незнания относительно истинного состояния системы Ω , а следовательно, и относительно результата измерения, имеющего целью проверить, обладает ли система Ω свойством E_i системы Ω , описываемой с помощью $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Тем не менее если $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$, то каждое E_i *объективно* в S_M в том смысле, что его можно рассматривать как свойство, которым система Ω обладает или не обладает независимо от любого измерения.

Пусть теперь Ω – составная система, состоящая из двух подсистем Ω_1 и Ω_2 , приготовленная в чистом запутанном состоянии S_P , представленном проекционным оператором $|\psi\rangle\langle\psi|$. Пусть $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i(1)\rangle |\chi_i(2)\rangle$, $0 < p_i < 1$, – биортогональное разложение состояния $|\psi\rangle$. Если рассматривать только систему Ω_1 , то физическую информацию относительно нее, предоставляемую ККМ-формулировкой, можно получить путем взятия частичного следа $|\psi\rangle\langle\psi|$ по Ω_2 , что дает

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i p_i |\phi_i(1)\rangle\langle\phi_i(1)|.$$

Оператор плотности ρ_1 формально аналогичен оператору ρ . Тем не менее коэффициент p_i здесь обозначает вероятность актуализации свойства $E_i(1)$ системы Ω , представляемой проекционным оператором $|\phi_i(1)\rangle\langle\phi_i(1)| \otimes I_2$ всякий раз, как возникает измерение, однако он не может обозначать вероятность того, что система Ω_1 действительно находится в состоянии $S_i(1)$, представляемом с помощью $|\phi_i(1)\rangle\langle\phi_i(1)|$. Действительно, тогда свойство $E_i(1)$ должно быть объективным, как и рассмотренное выше свойство E_i , в то время как в S_P , согласно стандартной интерпретации квантовой механики, оно *необъективно*¹⁾ (т.е. нельзя рассматривать ситуацию, когда система Ω в состоянии S_P обладает или не обладает свойством $E(1)$, если не проведено измерение). Основываясь на этом заключении, можно показать, что никакое разложение оператора ρ_1 не несет упомянутой выше интерпретации незнания. Поэтому некоторые авторы говорят, что оператор ρ_1 представляет *несобственную смесь*, в отличие от собственной смеси, которую представляет ρ (см., например, [4], [6], [7]). Как следствие, в стандартной квантовой механике операторы плотности, полученные путем вычисления частичных следов, как правило, не представляют ни чистых, ни смешанных состояний составных подсистем, так что эти подсистемы никогда нельзя рассматривать как независимые сущности, что приводит к так называемой *проблеме подсуцностей* [8]–[10].

¹⁾ Широко распространено мнение, что необъективность является внутренне присущим и неустранимым свойством стандартной квантовой механики, что связано с некоторыми математическими результатами, такими как теорема Белла–Кохена–Шпекера [1], [2] и теорема Белла [3]. Тем не менее в этом состоит глубинная причина большинства проблем, отягощающих стандартную интерпретацию; это порождает также множество парадоксов и концептуальных трудностей (в частности, *проблему объективизации* в квантовой теории измерений, см., например, [4], [5]).

Недавно одним из авторов было предложено [11] решение проблемы подсущности при интерпретации квантовой механики в рамках *семантического реализма* (СР) [12]–[16]. СР-интерпретация была разработана с целью показать, что математический аппарат квантовой механики согласуется с объективностью физических свойств, что позволяет избежать проблемы объективизации, а также ряда квантовых парадоксов. С этой точки зрения несобственные смеси рассматриваются как новые состояния физической системы, при этом в рамках КММ-формулировки их невозможно отличить от собственных смесей. Тем не менее унитарная эволюция собственных смесей отличается от эволюции несобственных смесей (вообще говоря, неунитарной), что, согласно данной интерпретации, предлагает более подходящее математическое представление для этих физически различных сущностей.

В 1936 г., используя аргументы теории решеток, Биркхофф и фон Нейман [17] пришли к выводу, что набор состояний квантовой системы можно представить как векторное пространство над вещественным ($\mathbb{R}$), комплексным ($\mathbb{C}$) или кватернионным ($\mathbb{Q}$) полем. Если формулировка квантовой механики, основанная на вещественных числах, по существу, эквивалентна КММ-формулировке [18], то исследования в области кватернионной квантовой механики были начаты гораздо позднее в серии работ Финкелстайна с соавторами, опубликованных в 60-е годы [19], и продолжаются до настоящего времени (систематическое исследование кватернионной квантовой механики см. в работе [20]).

Вопрос о возможности обобщения квантовой механики, основанного не на комплексных, а на кватернионных полях, до сих пор не решен. Тем не менее богатые структуры, возникающие при таком обобщении, оказались полезными при описании запутывания, динамических отображений и явлений декогерентности в квантовой физике [21]–[25]. Более того, в настоящей работе мы покажем, что эти структуры предоставляют строгие средства для решения проблемы подсущности.

Содержание работы следующее. После краткого суммирования в разделе 2 результатов качественного решения задачи подсущности, возникающего при СР-интерпретации квантовой механики, в разделе 3 обсуждается представление смесей в кватернионной квантовой механике. В частности, мы показываем, что в кватернионной квантовой механике собственные и несобственные смеси можно представлять с помощью различных операторов плотности и что такое математическое представление согласуется с их различными временными эволюциями в КММ-формулировке. В разделе 4 рассмотрен конкретный пример, касающийся процесса измерения.

2. ПРОБЛЕМА ПОДСУЩНОСТИ В СР-ИНТЕРПРЕТАЦИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

СР-интерпретация квантовой механики [12]–[16] была разработана с целью показать, что комплексную и кватернионную квантовую механику можно объединить в более общую модель, в рамках которой имеет место объективность физических свойств, а квантовые вероятности переинтерпретируются как условные, а не как абсолютные. СР-интерпретация позволяет избежать проблемы объективизации и других квантовых парадоксов. Более того, она позволяет получить нестандартное ре-

шение проблемы подсушности [11], которую можно кратко описать следующим образом.

1. Некоторая физическая система Ω связана с набором состояний $\mathcal{S}$ и с набором физических свойств $\mathcal{E}$. Каждое состояние операционально определяется как класс статистически эквивалентных *приготавливающих приборов*. Каждое свойство операционально определяется как класс статистически эквивалентных *идеальных регистрирующих приборов*.

2. Мы предполагаем, что все свойства из набора $\mathcal{E}$ являются *объективными*, т.е. для каждого $E \in \mathcal{E}$ показание регистрирующего прибора $r \in E$ применительно к отдельному образцу (или физическому объекту) x из системы Ω не зависит от процедуры измерения²⁾.

3. Из п. 2 следует, что вероятность обнаружения заданного результата при выполнении измерения на некотором физическом объекте x можно интерпретировать как выражение нашего незнания относительно свойств, которыми обладает объект x (в этом смысле можно сказать, что он является *эпистемическим*) в СР-интерпретации, вне зависимости от состояния самого физического объекта. Разницу между чистым и нечистым состояниями по-прежнему можно ввести, основываясь на различных значениях вероятностей свойств, реализуемых в этих состояниях, но не на различных интерпретациях (эпистемических или нет) самих вероятностей. В частности, можно принять стандартное представление состояний в терминах операторов плотности и характеризовать чистые состояния как такие состояния, что представляющие их операторы плотности сводятся к проекционным операторам.

4. Поскольку каждое состояние операционально определяется как класс эквивалентности приготавливающих приборов, то ансамбль физических объектов в состоянии S , представленном оператором плотности $\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, можно реализовать с помощью *смешанного* приготавливающего прибора, т.е. прибора, который смешивает физические объекты, приготовленные с помощью приборов, соответствующих состояниям $S_1, S_2, \dots$, представленным проекционными операторами $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|, \dots$ соответственно. При этом коэффициент p_i нельзя интерпретировать только как в п. 3, но его следует интерпретировать также как вероятность того, что заданный физический объект в состоянии S на самом деле находится в состоянии S_i . Согласно СР-интерпретации, тем не менее, нет очевидных физических причин, чтобы считать, что S содержит только смешанные приготавливающие приборы.

²⁾Объективность свойств предполагает, что СР-интерпретация находится в конфликте со стандартной интерпретацией, в которой, наоборот, утверждается необъективность свойств на основе эмпирических аргументов (т.е. экспериментов с двумя щелями) или теоретических соображений (т.е. запрещающих теорем, упомянутых в сноске 1). Поэтому СР-интерпретация разрабатывалась параллельно с тщательным анализом этих аргументов, что выявило в каждом из них некие слабые места. В частности, оказалось, что теоретические аргументы в пользу необъективности основаны на неявных допущениях, которые становятся достаточно сомнительными, если сделать их явными. Действительно, эти допущения поддерживают эпистемологическую точку зрения, предполагающую справедливость эмпирических квантовых законов в том числе и в таких физических ситуациях, когда сама квантовая механика утверждает, что их в принципе невозможно проверить [13]–[15]. Если такую точку зрения подвергнуть критике, то необъективность возникает как следствие выбора интерпретации, а не как логическое следствие теории, и тогда становятся возможными альтернативные объективные интерпретации (такие как СР-интерпретация).

5. Из п. 4 следует, что в случае составных физических систем можно считать, что операторы плотности, полученные вычислением частичных следов, представляют состояния, в которых также возникают приготавливающие приборы, не являющиеся смешанными в смысле, определенном в п. 4.

6. В случае нечистых состояний вероятностное определение состояний в п. 1 группирует смешанные и несмешанные приготавливающие приборы, которые поэтому невозможно различить посредством измерений. Возможно, это позволит объяснить, как для одного и того же оператора плотности могут иметь место как унитарная, так и неунитарная эволюция, поскольку тем самым предлагается отличать смешанные приготавливающие приборы от несмешанных за счет введения нового соотношения эквивалентности на множестве всех приготавливающих приборов, строго содержащегося в соотношении физической эквивалентности, определенном в п. 1. Таким образом, каждое состояние S должно быть связано с семейством *скрытых состояний*, которые должны быть эквивалентны относительно измерений, но могут демонстрировать различное поведение по отношению к временной эволюции.

3. СМЕСИ В КВАТЕРНИОННОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Напомним сначала некоторые основные обозначения, свойства и результаты кватернионной квантовой механики (исчерпывающее обсуждение кватернионных матриц содержится, например, в работе [26]), чтобы затем можно было привести различные математические представления для собственных и несобственных смесей.

Физическая система Ω связывается в кватернионной квантовой механике с кватернионным n -мерным правым гильбертовым пространством $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$ [20] (из соображений простоты мы ограничимся рассмотрением конечномерных кватернионных гильбертовых пространств, это позволит обозначать операторы и их матрицы одними и теми же символами). Состояния системы Ω представляются положительными эрмитовыми операторами на $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$ с единичным следом (как и в ККМ-формулировке). Более точно, чистое состояние S_P системы Ω представляется оператором плотности $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ ранга $r = 1$, где $|\psi\rangle$ – единичный вектор в пространстве $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$, а смешанное состояние S_M системы Ω представляется оператором плотности ρ ранга $r > 1$.

Наблюдаемые из системы Ω представляются эрмитовыми операторами на пространстве $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$. Более того, среднее значение наблюдаемой $\mathcal{A}$, представляемой кватернионным эрмитовым оператором A , в чистом состоянии S , представимом единичным вектором $|\psi\rangle$, имеет вид [20]

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Re Tr}(A |\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Re Tr}(A \rho_\psi). \quad (1)$$

Разлагая $A = A_\alpha + jA_\beta$ и $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$, где j обозначает одну из кватернионных мнимых единиц, на комплексные матрицы $A_\alpha, A_\beta, \rho_\alpha$ и ρ_β , получаем, что ожидаемое значение $\langle A \rangle_\psi$ может зависеть от A_β или ρ_β , только если и A_β , и ρ_β отличны от нуля. Действительно,

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Re Tr}(A \rho) = \text{Re Tr}(A_\alpha \rho_\alpha - A_\beta^* \rho_\beta), \quad (2)$$

где индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение. Таким образом, среднее значение наблюдаемой $\mathcal{A}$, представляемой эрмитовым оператором A , в состоянии S , представляемом матрицей плотности ρ , зависит от кватернионных частей операторов A и ρ , только если и наблюдаемая, и состояние представляются истинно кватернионными матрицами. Однако если наблюдаемая $\mathcal{A}$ представляется чисто комплексной эрмитовой матрицей, то ее среднее значение в состоянии S не зависит от кватернионной части $j\rho_\beta$ матрицы плотности $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$, представляющей состояние S . Более того, среднее значение, предсказываемое в ККМ-формулировке для состояния, представляемого матрицей плотности ρ_α , совпадает со средним значением для состояния, представляемого матрицей ρ , предсказываемым кватернионной квантовой механикой, поскольку

$$\text{Tr}(A\rho_\alpha) = \text{Re Tr}(A\rho_\alpha) = \text{Re Tr}(A\rho). \quad (3)$$

Это простое наблюдение актуально для нашего подхода, поскольку оно позволяет ввести ККМ-формулировку в более общие рамки кватернионной квантовой механики без изменения каких бы то ни было теоретических предсказаний (коль скоро учитываются комплексные наблюдаемые), что позволяет обойтись без сравнения этих формулировок или же отложить его.

Теперь обозначим через $M(\mathbb{Q})$ и $M(\mathbb{C})$ пространства $n \times m$ кватернионных и комплексных матриц, и пусть $M = M_\alpha + jM_\beta \in M(\mathbb{Q})$. Определим *комплексную проекцию* $P: M(\mathbb{Q}) \rightarrow M(\mathbb{C})$ с помощью соотношения

$$P(M) = \frac{1}{2}[M - iMi] = M_\alpha. \quad (4)$$

Рассмотрим зависящую от времени кватернионную унитарную динамику

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad (5)$$

где

$$U(t) = (U_\alpha + jU_\beta)(t) = T_o \exp \left[- \int_0^t H(u) du \right], \quad (6)$$

T_o обозначает оператор упорядочения по времени. Дифференциальное уравнение, связанное с временной эволюцией ρ , имеет вид

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -[H(t), \rho(t)], \quad (7)$$

где $H(t) = H_\alpha + jH_\beta = -(\frac{d}{dt}U(t))U^\dagger(t)$. Наконец, уравнения (5) и (7) сводятся соответственно к

$$\rho_\alpha(t) = U_\alpha \rho_\alpha(0) U_\alpha^\dagger + U_\beta^* \rho_\alpha^*(0) U_\beta^T + U_\alpha \rho_\beta^*(0) U_\beta^T - U_\beta^* \rho_\beta(0) U_\alpha^\dagger \quad (8)$$

и

$$\frac{d}{dt}\rho_\alpha = -[H_\alpha, \rho_\alpha] + H_\beta^* \rho_\beta - \rho_\beta^* H_\beta \quad (9)$$

для комплексной проекции матрицы плотности [23].

Теперь сосредоточим внимание на комплексной проекции ρ_α кватернионной матрицы плотности $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$.

Прежде всего, из эрмитовости матриц ρ и ρ_α следует, что

$$\text{Tr } \rho_\alpha = \text{Re Tr } \rho_\alpha = \text{Re Tr } \rho = \text{Tr } \rho,$$

т.е. комплексная проекция всякой кватернионной матрицы плотности сохраняет след. Более того, напомним следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [23]. *Комплексная проекция ρ_α любой кватернионной матрицы плотности $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$ является комплексной матрицей плотности.*

Следующее утверждение дает информацию о ранге комплексной проекции ρ_α любой кватернионной матрицы плотности $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [25]. *Пусть $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$ – n -мерная кватернионная матрица плотности и пусть $\text{rank } \rho = m$. Тогда $m \leq \text{rank } \rho_\alpha \leq 2m$.*

Справедливо и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [24]. *Пусть ρ_α – n -мерная комплексная матрица плотности, причем $\text{rank } \rho_\alpha = m > 1$, и пусть $[x]$ обозначает целую часть x . Тогда для любого m' такого, что $[(m+1)/2] \leq m' \leq m$, существует такая (кососимметричная) комплексная матрица ρ_β , что $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$ является матрицей плотности, причем $\text{rank } \rho = m'$.*

Из двух предыдущих предложений вытекает следующее заключение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякую комплексную матрицу плотности ρ_α можно получить как комплексную проекцию чистой кватернионной матрицы плотности $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } \rho_\alpha = 2$.*

Теперь обсудим, как приведенные выше результаты можно использовать для представления собственных и несобственных смесей с помощью различных матриц плотности в кватернионной квантовой механике. Для этого заметим, что всякую комплексную матрицу плотности ρ_α можно связать с множеством $[\rho_\alpha]$ кватернионных матриц плотности следующим образом:

$$\rho_\alpha \longrightarrow [\rho_\alpha] = \{\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta\},$$

где ρ_β следует выбрать так, чтобы ρ оставалась матрицей плотности (см. предложения 1–4).

Приведенное выше отображение можно обратить с помощью комплексной проекции (4); оно вводит соотношение эквивалентности “ $\approx$ ” на множестве определенных нами матриц плотности: для всяких ρ, ρ' имеем $\rho \approx \rho'$ тогда и только тогда, когда $P(\rho) = P(\rho')$. Поэтому множество кватернионных матриц плотности разбивается на классы эквивалентности, и каждый класс содержит одну и только одну комплексную матрицу плотности, которая, таким образом, представляет этот класс.

Каждый класс эквивалентности $[\rho_\alpha]$ можно подвергнуть разбиению, если отличать кватернионные матрицы плотности $\rho = \rho_\alpha + j\rho_\beta$, $\rho_\beta \neq 0$, от комплексных

матриц $\rho = \rho_\alpha$. Важно отметить, что комплексная унитарная динамика, т.е. динамика, задаваемая комплексной унитарной матрицей U_α , сохраняет как первое, так и второе разбиения. Действительно, из (5) и (8) получаем

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_\alpha(t) + j\rho_\beta(t) = U_\alpha\rho_\alpha(0)U_\alpha^\dagger + jU_\alpha^*\rho_\beta(0)U_\alpha^\dagger, \\ \rho_\alpha(t) &= U_\alpha\rho_\alpha(0)U_\alpha^\dagger.\end{aligned}\tag{10}$$

Напротив, кватернионная унитарная динамика, вообще говоря, не сохраняет ни первого, ни второго разбиения (см. (5), (8)).

Как утверждалось выше, различие между собственными и несобственными смесями в ККМ-формулировке строгим образом связано с существованием запутанных состояний и процедурой вычисления частичного следа. В частности, заметим, что последняя операция может порождать для подсистем следующие ситуации.

1. Сепарабельное состояние составной системы обычно дает собственные смеси составляющих подсистем.
2. Запутанное состояние составной системы обычно дает несобственные смеси составляющих подсистем.

Ясно, что если унитарная эволюция составной системы факторизуема в КММ-формулировке, то она преобразует запутанные состояния в запутанные состояния, а сепарабельные состояния – в сепарабельные. Будем тогда требовать, чтобы при условии существования в кватернионной квантовой механике различия между собственными и несобственными смесями унитарные динамики, связанные в ККМ-формулировке с каждой подсистемой, были такими, чтобы собственные смеси преобразовывались в собственные смеси, а несобственные – в несобственные. Поэтому мы приходим к представлению собственных смесей кватернионными матрицами плотности, для которых $P(\rho) = \rho$, а несобственных смесей – кватернионными матрицами плотности, для которых $P(\rho) \neq \rho$. Разумеется, комплексная унитарная динамика не изменяет этого различия. Действительно, если $\rho_\beta(0) = 0$, то $\rho_\beta(t) = U_\alpha^*\rho_\beta(0)U_\alpha^\dagger = 0$.

Еще раз подчеркнем, что матрица плотности ρ , представляющая собственные и несобственные смеси, дает одни и те же средние значения для комплексных наблюдаемых.

Наконец, заметим, что приведенное выше разбиение не сохраняется в ККМ-формулировке с нефакторизуемой динамикой составной системы. Действительно, в этом случае подсистемы могут обмениваться друг с другом запутанностью в ходе эволюции, которая тем самым оказывается неунитарной. Напомним, что неунитарную динамику в ККМ-формулировке во многих случаях можно описывать в терминах комплексной проекции кватернионной унитарной эволюции [22], [23], [25].

4. ПРОЦЕСС ИЗМЕРЕНИЯ: ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

В данном разделе мы приведем пример, в котором кватернионная квантовая механика представляет собственные и несобственные смеси с различными операторами плотности, тем самым позволяя различить их не только на концептуальном, но и на математическом уровне. Предлагаемый пример имеет смысл, поскольку он имеет

отношение к описанию процесса измерения как динамического процесса и представляется в высокой степени проблематичным в стандартной квантовой механике.

Рассмотрим очень простую и схематическую модель описания возникающего в процессе измерения взаимодействия между системой, которая подвергается измерениям, и измеряющим прибором. А именно, пусть Ω_m – микроскопическая физическая система, например квантовая частица спина $1/2$, связанная с комплексным гильбертовым пространством $\mathcal{H}_m^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, и пусть $\mathcal{A}$ – наблюдаемый “спин системы Ω_m вдоль направления $\vec{n}$ ”, представленный в ККМ-формулировке эрмитовым оператором $A = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$, где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули. Пусть s_1 и s_2 – чистые состояния системы Ω_m , отвечающие соответствующим собственным векторам $|+\vec{n}\rangle$ и $|-\vec{n}\rangle$ оператора A . Опишем схему прибора, выполняющего идеальное измерение наблюдаемой $\mathcal{A}$ из Ω_m с помощью макроскопической физической системы Ω_M , которую можно описать в ККМ-формулировке с помощью гильбертова пространства $\mathcal{H}_M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$. Предположим, что Ω_M сначала находится в макроскопическом состоянии S_0 , представленном единичным вектором $|0\rangle$, соответствующим нулевому значению на шкале измерительного прибора, и что Ω_M обладает макроскопическими состояниями S_1 и S_2 , представленными единичными векторами $|u_{\vec{n}}\rangle$ и $|d_{\vec{n}}\rangle$ соответственно (соответствующими значениям UP и DOWN на той же шкале), и пусть $\{|u_{\vec{n}}\rangle, |d_{\vec{n}}\rangle\}$ – ортонормальный базис на пространстве $\mathcal{H}_M^{\mathbb{C}}$. Предположим далее, что существует взаимно однозначное соответствие между состояниями s_1 и s_2 системы Ω_m и состояниями S_1 и S_2 системы Ω_M . Пусть s_0 – исходное состояние системы Ω_m , представленное единичным вектором $|\varphi_0\rangle = c_+|+\vec{n}\rangle + c_-|-\vec{n}\rangle$. Наконец, предположим, что взаимодействие между системами Ω_m и Ω_M представлено комплексным унитарным оператором $U(0, t)$. Это взаимодействие можно описать следующим образом:

$$|\Psi(0)\rangle = |\varphi_0\rangle|0\rangle = [c_+|+\vec{n}\rangle + c_-|-\vec{n}\rangle]|0\rangle \xrightarrow{U(0,t)} |\Psi(t)\rangle = c_+|+\vec{n}\rangle|u_{\vec{n}}\rangle + c_-|-\vec{n}\rangle|d_{\vec{n}}\rangle, \quad (11)$$

где $|\Psi(t)\rangle$ выражается с помощью биортогонального разложения, а следовательно, представляет чистое запутанное состояние составной системы $\Omega_m + \Omega_M$. Физическую информацию о системе Ω_m в ККМ-формулировке можно получить вычислением частичного следа оператора плотности $\rho_{\alpha}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ по физической системе Ω_M . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha}^m(t) &= \text{Tr}_M \rho_{\alpha}(t) = \langle u_{\vec{n}} | \rho_{\alpha}(t) | u_{\vec{n}} \rangle + \langle d_{\vec{n}} | \rho_{\alpha}(t) | d_{\vec{n}} \rangle = \\ &= |c_+|^2 |+\vec{n}\rangle\langle+\vec{n}| + |c_-|^2 |-\vec{n}\rangle\langle-\vec{n}|. \end{aligned} \quad (12)$$

Этот оператор плотности представляет несобственную смесь M_S^I для Ω_m (см. раздел 1).

Если мы теперь отдельно рассмотрим физическую систему Ω_m и применим проекционный постулат ККМ-формулировки к случаю неселективного измерения наблюдаемой $\mathcal{A}$, то согласно правилу Людерса получим

$$\rho_{\alpha}^m = |+\vec{n}\rangle\langle+\vec{n}|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|+\vec{n}\rangle\langle+\vec{n}| + |-\vec{n}\rangle\langle-\vec{n}|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|-\vec{n}\rangle\langle-\vec{n}| = \rho_{\alpha}^m(t). \quad (13)$$

Этот оператор плотности формально совпадает с оператором плотности, полученным в (12), но в этом случае он представляет собственную смесь M_S^P системы Ω_m (см. раздел 1).

Хорошо известно, что основная проблема стандартной квантовой теории измерений состоит в согласовании друг с другом двух приведенных выше описаний, в частности воспроизведение объективизации, т.е. появления определенных показаний на макроскопическом приборе (*проблема объективизации*). Любая попытка получить согласованное описание процесса измерения в рамках квантового формализма и его стандартной интерпретации приводит к так называемой *цепочке фон Неймана* и порождает квантовые парадоксы (в частности, парадоксы *кота Шредингера* и *друга Вигнера*).

В разделе 2 было замечено, что описанная выше проблема исчезает в случае СР-интерпретации квантовой механики вследствие объективности всех свойств как Ω_m , так и Ω_M . Однако в ККМ-формулировке нельзя различить смеси S_M^P и S_M^I и в том случае, когда принимается СР-интерпретация, поскольку они представлены одним и тем же комплексным оператором плотности. Тем не менее для решения этой проблемы в кватернионной квантовой механике можно использовать аргументы из раздела 3.

В соответствии с разбиением, введенным в разделе 3, несобственную смесь S_M^I можно представить в кватернионной квантовой механике оператором плотности $\rho^m = \rho_\alpha^m + j\rho_\beta^m$, где $\rho_\beta^m \neq 0$, а собственную смесь S_M^P – оператором плотности $\rho'^m = \rho_\alpha^m$. Следует заметить, что смесь S_M^I также можно сделать чистой³⁾ (см. предложение 4), если взять

$$\rho^m = |c_+|^2 |+\bar{n}\rangle\langle +\bar{n}| + |c_-|^2 |-\bar{n}\rangle\langle -\bar{n}| + |-\bar{n}\rangle j c_+^* c_-^* \langle +\bar{n}| - |+\bar{n}\rangle j c_+^* c_-^* \langle -\bar{n}|, \quad (14)$$

что представляет собой проекционный оператор на одномерное подпространство, порожденное единичным вектором $|+\bar{n}\rangle c_+ + |-\bar{n}\rangle c_- j$. Отсюда немедленно видно, что ρ^m и ρ'^m дают одни и те же средние значения для комплексных наблюдаемых, в то время как их средние значения различны, если мы рассматриваем чисто кватернионные наблюдаемые.

Приведенный выше результат, с нашей точки зрения, является актуальным, поскольку он показывает, что в кватернионной квантовой механике смеси S_M^I и S_M^P можно, по крайней мере в принципе, экспериментально различить.

Список литературы

- [1] J. S. Bell, *Rev. Modern Phys.*, **38**:3 (1966), 447–452.
- [2] S. Kochen, E. P. Specker, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 59–87.
- [3] J. S. Bell, *Physics*, 1964, № 1, 195–200; “On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox”, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 14–21.
- [4] P. Busch, P. J. Lahti, P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement*, Lecture Notes in Phys. New Ser. m: Monogr., **2**, Springer, Berlin, 1991.

³⁾ Возможность рассмотрения несобственных смесей как новых чистых состояний уже учитывалась Эртсом в рамках ККМ-формулировки [8]–[10].

- [5] P. Busch, A. Shimony, *Stud. Hist. Philos. Modern Phys. B*, **27**:4 (1996), 397–404.
- [6] K.-E. Hellwig, K. Kraus, *Comm. Math. Phys.*, **11**:3 (1969), 214–220.
- [7] B. D’Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Math. Phys. Monogr. Ser., **20**, Benjamin, Reading, MA, 1976.
- [8] D. Aerts, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **38**:1 (1999), 289–358.
- [9] D. Aerts, “Quantum mechanics: structures, axioms and paradoxes”, *Quantum Physics and the Nature of Reality*, Einstein Meets Magritte, **7**, eds. D. Aerts, J. Pykacz, Kluwer, Dordrecht, 1999, 141–205.
- [10] D. Aerts, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **39**:3 (2000), 485–496.
- [11] К. Гарола, С. Соццо, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 248–264.
- [12] C. Garola, L. Solombrino, *Found. Phys.*, **26**:9 (1996), 1121–1164.
- [13] C. Garola, L. Solombrino, *Found. Phys.*, **26**:10 (1996), 1329–1356.
- [14] C. Garola, “Against “paradoxes”: a new quantum philosophy for quantum mechanics”, *Quantum Physics and the Nature of Reality*, Einstein Meets Magritte, **7**, eds. D. Aerts, J. Pykacz, Kluwer, Dordrecht, 1999, 103–140.
- [15] C. Garola, *Found. Phys.*, **30**:9 (2000), 1539–1565.
- [16] C. Garola, *Found. Phys.*, **32**:10 (2002), 1597–1615.
- [17] G. Birkhoff, J. von Neumann, *Ann. Math.*, **37**:4 (1936), 823–843.
- [18] E. C.-G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta*, **33** (1960), 727–752; **35** (1962), 568–591; E. C.-G. Stueckelberg, M. Guenin, *Helv. Phys. Acta*, **34** (1961), 621–628.
- [19] D. Finkelstein, J. M. Jauch, S. Sciminovich, D. Speiser, *J. Math. Phys.*, **3**:2 (1962), 207–220; **4**:1 (1963), 136–140; **4**:6, 788–796.
- [20] S. L. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Internat. Ser. Monogr. Phys., **88**, Oxford Univ. Press, New York, 1995.
- [21] A. Kossakowski, *Rep. Math. Phys.*, **46**:3 (2000), 393–397.
- [22] G. Sclarici, L. Solombrino, “Complex entanglement and quaternionic separability”, *The Foundations of Quantum Mechanics. Historical Analysis and Open Questions* (Cesena, Italy, 2004), eds. C. Garola, A. Rossi, S. Sozzo, World Sci., Singapore, 2006, 301–310.
- [23] M. Asorey, G. Sclarici, *J. Phys. A*, **39**:31 (2006), 9727–9741.
- [24] М. Асоре́й, Д. Скола́ричи, Л. Соломбри́но, *ТМФ*, **151**:3 (2007), 360–370.
- [25] M. Asorey, G. Sclarici, L. Solombrino, *Phys. Rev. A*, **76**:1 (2007), 012111.
- [26] F. Zhang, *Linear Algebra Appl.*, **251** (1997), 21–57.