Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Нуччи, Как искать (и находить) лагранжианы,
ТМФ, 2009, том 160, номер 1, 168–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:32:40

© 2009 г.

М. К. Нуччи*

КАК ИСКАТЬ (И НАХОДИТЬ) ЛАГРАНЖИАНЫ

Хорошо известно, что для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка существует лагранжиан, и ключевым понятием при его построении оказывается последний множитель Якоби. Встает вопрос, можно ли таким образом строить лагранжианы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка или для обыкновенных дифференциальных уравнений старших порядков? Показано, что последний множитель Якоби может играть основополагающую роль и в этом случае.

Ключевые слова: лагранжиан, первый интеграл, последний множитель Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

В своей работе 1957 г., уместно озаглавленной “Область применимости лагранжева формализма” [1], Гавас¹⁾ писал: “Во многих областях физики решение самых разнообразных задач можно кардинально упростить, если выразить базисные уравнения в форме вариационного принципа... Метод Лагранжа можно распространить на случай сил, зависящих от скоростей и ускорений... Можно аналогичным образом обобщить формализм и на некоторые примеры сил, зависящих от старших производных... Формализм можно также расширить на случай непрерывных систем (полей); при этом вариационные уравнения Эйлера–Лагранжа становятся уравнениями в частных производных. Кроме хорошо известной полезности метода Лагранжа для интегрирования уравнений движения в этом случае возникают две дополнительные возможности: при условии, что известен лагранжиан и его свойства инвариантности, становится возможным построить все законы сохранения системы [3], что в свою очередь закладывает основы для квантования классической системы (дискретной или непрерывной). Поэтому исключительно важно знать, какие системы сил или полей можно рассматривать в рамках метода Лагранжа”.

¹⁾По оценке Геннера, этот автор является одним из знаменитых классиков в теории классических релятивистских полей и в теории частиц, включая специальную и общую теории относительности Эйнштейна” [2].

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia, Perugia, Italy.
E-mail: nucci@unipg.it

В самом деле, по поводу квантования можно обратиться к фундаментальной работе Дирака [4], к недавно опубликованной диссертации Фейнмана [5] и к его нобелевской речи 1965 г. [6].

Известно, что лагранжиан можно построить для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка [7]. Что кажется менее известным²⁾, так это то, что ключевым объектом в этой конструкции оказывается последний множитель Якоби [7]–[10], обладающий рядом интересных свойств, список которых можно найти в работах [11], [12].

Норвежский исследователь Софус Ли, который тщательно изучил работу Якоби (см. статью [13]), обнаружил связь между своими группами преобразований и последним множителем Якоби [14], [15]. Итальянский ученый Бианки дал обзор работ Ли в своих лекциях по конечным группам непрерывных преобразований (конечномерным группам Ли) и весьма ясно описал последний множитель Якоби и его свойства [16]. Однако связь с формализмом лагранжиана не была упомянута никем из них. Целый ряд работ был посвящен решению обратной задачи для вариационных преобразований, но в большинстве из этих работ не отмечена основополагающая работа Якоби, хотя все-таки можно выделить некоторые из них (см. ссылки в статьях [11], [17]), где эта работа отмечена.

В настоящей работе мы показываем, как применять последний множитель Якоби для того, чтобы найти лагранжианы отдельного ОДУ второго порядка, системы из двух ОДУ первого порядка и отдельного ОДУ четвертого порядка: строятся, соответственно, нелинейный лагранжиан, зависящий от первой производной единственной зависимой переменной, лагранжиан, линейный относительно первых производных двух зависимых переменных, и нелинейный лагранжиан, зависящий от второй производной единственной зависимой переменной.

В разделе 2 дается описание последнего множителя Якоби и его свойств [8]–[10], его связь с симметриями Ли [14], [15], с лагранжианом произвольного ОДУ второго порядка [7], [10], с результатами, которые получены методом, развитым в работе [18] и улучшенным в работе [19], позволяющим находить линейные лагранжианы систем ОДУ первого порядка, и, наконец, применение последнего множителя Якоби при нахождении лагранжиана ОДУ четвертого порядка, которое удовлетворяет условиям Фельса [20]. В разделе 3 применение метода Якоби иллюстрируется примером неавтономного ОДУ второго порядка, принадлежащего иерархии уравнения Гарри Дима [21]. В разделе 4 с помощью последнего множителя Якоби находится лагранжиан системы двух неавтономных ОДУ первого порядка, возникающих в задачах гидромеханики [22], [23]. В разделе 5 последний множитель Якоби применяется для нахождения лагранжиана ОДУ четвертого порядка, изучаемого в работе [24].

Во всех исследованиях настоящей работы применялись интерактивные программы на основе пакета REDUCE, разработанные автором для вычисления симметрий Ли [25].

²⁾Гавас сам цитировал монографию Вайттекера [7], но только в связи с формализмом уравнений Лагранжа [1], и нигде не упоминал метод Якоби.

2. ПОСЛЕДНИЙ МНОЖИТЕЛЬ ЯКОБИ

Метод последнего множителя Якоби дает возможность определить все решения дифференциального уравнения в частных производных

$$\mathcal{A}f = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

или эквивалентной ему лагранжевой системы

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}. \quad (2)$$

Если известен последний множитель Якоби и все решения, кроме одного ($n - 2$ решений), то недостающее решение можно выразить в квадратурах. Последний множитель Якоби M определяется соотношением

$$\frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = M\mathcal{A}f, \quad (3)$$

в котором

$$\frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0, \quad (4)$$

а $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ суть $n - 1$ решений уравнения (1) или, эквивалентно, независимых первых интегралов системы (2). Тем самым M представляет собой функцию переменных $x_1, \dots, x_n$, зависящую от выбранных $n - 1$ решений в том смысле, что при вариации последних она тоже видоизменяется. Два важных свойства последнего множителя Якоби таковы.

1. Можно доказать, что каждый множитель M есть решение линейного уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(Ma_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (5)$$

и, наоборот, каждое решение M этого уравнения представляет собой последний множитель Якоби.

2. Если известны два последних множителя Якоби M_1 и M_2 уравнения (1), то их отношение задает решение ω уравнения (1) или, эквивалентно, первый интеграл системы (2). Разумеется, это отношение может быть и тривиальной константой. Обратно, произведение множителя M_1 и любого решения ω задает еще один последний множитель Якоби $M_2 = M_1\omega$.

Поскольку существование решения (первого интеграла) вытекает из наличия симметрии, Ли дал альтернативное описание в терминах симметрий [15]. Четкая формулировка задачи в терминах решений (первых интегралов) приведена в работе [16].

Если известны $n - 1$ симметрий уравнения (1) (или (2)), а именно

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}(x_1, \dots, x_n) \partial_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

то последний множитель Якоби задается формулой $M = \Delta^{-1}$, где

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \cdots & \xi_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

при условии $\Delta \neq 0$. Очевидным следствием приведенных выше результатов Якоби является то, что в случае существования постоянного множителя определитель (7) представляет собой первый интеграл движения. Это результат потенциально весьма полезен при поиске первых интегралов для систем ОДУ. В частности, если в каждой из компонент векторного поля уравнения движения отсутствует зависимость от переменной, связанной с этой компонентой, т.е. если $\partial a_i / \partial x_i = 0$, то последний множитель оказывается константой, а любой другой последний множитель Якоби – первым интегралом.

Другим свойством последнего множителя Якоби является его (почти забытая) связь с лагранжианом $L = L(t, u, \dot{u})$, имеющая место для произвольного ОДУ второго порядка

$$\ddot{u} = F(t, u, \dot{u}). \quad (8)$$

Эта связь такова [7], [10]:

$$M = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{u}^2}, \quad (9)$$

где $M = M(t, u, \dot{u})$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d}{dt} \ln M + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0. \quad (10)$$

При этом уравнение (8) есть уравнение Эйлера–Лагранжа

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial L}{\partial u} = 0. \quad (11)$$

Для доказательства этого факта достаточно проварьировать данное уравнение по $\dot{u}$ и показать, что это приводит к уравнению (10). Если известен последний множитель Якоби, то L можно легко получить, проинтегрировав M дважды:

$$L = \int \left(\int M d\dot{u} \right) d\dot{u} + f_1(t, u)\dot{u} + f_2(t, u), \quad (12)$$

где f_1 и f_2 – функции от t и u , которые должны удовлетворять одному и тому же уравнению в частных производных, связанному с уравнением (8) [26]. Как было

показано в работе [26], функции f_1 и f_2 связаны с функцией калибровки $G = G(t, u)$: фактически мы можем предположить, что

$$f_1 = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad f_2 = \frac{\partial G}{\partial t} + f_3(t, u), \quad (13)$$

где f_3 должна удовлетворять упомянутому выше уравнению в частных производных, а функция G , очевидно, произвольна.

В работе [19] было показано, что система двух ОДУ первого порядка

$$\dot{u}_1 = f_1(t, u_1, u_2), \quad \dot{u}_2 = f_2(t, u_1, u_2) \quad (14)$$

всегда имеет линейный лагранжиан

$$L = U_1(t, u_1, u_2)\dot{u}_1 + U_2(t, u_1, u_2)\dot{u}_2 - V(t, u_1, u_2). \quad (15)$$

Главной составляющей этой конструкции оказывается такая функция W , что

$$W = -\frac{\partial U_1}{\partial u_2} = \frac{\partial U_2}{\partial u_1}, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \ln W + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17), очевидно, совпадает с уравнением (5) для последнего множителя Якоби системы (14). Тем самым, как только найден последний множитель Якоби, из уравнения (16) можно получить лагранжиан системы (14) (более детальное описание см. в работе [27]).

В работе [20] Фельс вывел необходимые и достаточные условия, при которых ОДУ четвертого порядка

$$u^{(IV)} = F(x, u, u', u'', u''') \quad (18)$$

допускает единственным образом определенный лагранжиан. Эти условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial (u''')^3} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \frac{3}{4} \frac{\partial F}{\partial u'''} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u''} \frac{\partial F}{\partial u'''} + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом случае последний множитель Якоби удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM}{dt} + M \frac{\partial F}{\partial u'''} = 0. \quad (20)$$

Из условий Фельса (19), легко получить, что если лагранжиан $L = L(t, u, u', u'')$ выбран так, что

$$M^{1/2} = \frac{\partial^2 L}{\partial (u'')^2}, \quad (21)$$

то уравнение (18) приобретает вид уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u''} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) + \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad (22)$$

а L можно получить с помощью двукратного интегрирования формулы (21)

$$L = \int \left(\int M^{1/2} du'' \right) du'' + f_1(t, u, u') u'' + f_2(t, u, u'), \quad (23)$$

где f_1 и f_2 – функции от t, u, u' , которые должны удовлетворять некоторым уравнениям в частных производных, связанным с (18). Функции f_1, f_2 можно связать с функцией калибровки $g = g(t, u, u')$: фактически можно предположить, что

$$f_1 = \frac{\partial g}{\partial u'}, \quad f_2 = \frac{\partial g}{\partial u} u' + \frac{\partial g}{\partial t} + f_3(t, u, u'), \quad (24)$$

где функция f_3 должна удовлетворять упомянутым выше уравнениям в частных производных, а g , очевидно, произвольна. Снова укажем на важность калибровочной функции (более детальное описание см. в работе [28]).

3. ЛАГРАНЖИАНЫ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение Гарри Дима $u_t = u^3 u_{xxx}$ имеет оператор рекурсии R [29]:

$$R[u] = u^2 D^2 - u u_x D + u u_{xx} + u^3 u_{xxx} D^{-1} \circ u^{-2}, \quad (25)$$

где через D обозначена полная производная по x . Операторы рекурсии для расширений уравнения Гарри Дима были определены в работе [30]. Второй член иерархии уравнения Гарри Дима получается при вычислении $u_t = R[u^3 u_{xxx}]$, что приводит к уравнению в частных производных пятого порядка. Применяя симметрию сдвига по времени t , получим $u_t = 0$ и, следовательно, $R[u^3 u_{xxx}] = 0$, в результате получаем ОДУ пятого порядка

$$u^5 u^{(V)} + 5u^4 u' u^{(IV)} + 5u^4 u'' u''' + \frac{5}{2} u^3 (u')^2 u''' = 0. \quad (26)$$

Идея применения эквивалентных последовательностей [31] к иерархии уравнения Гарри Дима приводит к следующему ОДУ второго порядка [21]:

$$\ddot{u} = \frac{b_1}{2u^3} + \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{2u^5}, \quad (27)$$

где $a_i, i = 0, 1, 2$, и b_1 – произвольные константы. У этого уравнения имеется одна точечная симметрия Ли

$$\Gamma = 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \partial_x + u(a_1 + 2a_2 x) \partial_u, \quad (28)$$

откуда легко получить, что последний множитель Якоби в этом случае тривиален, $M = 1$. Из уравнений (12) и (13) получаем лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + 2b_1 u^2}{8u^4} + \frac{d}{dx} g(x, u), \quad (29)$$

в котором $g(x, u)$ – произвольная функция калибровки. Поле Γ задает нётеровскую точечную симметрию для этого лагранжиана, и из теоремы Нётер [3] при этом следует существование первого интеграла

$$I_1 = (a_0 + a_1x + a_2x^2)\dot{u}^2 - (a_1 + 2a_2x)u\dot{u} + a_2u^2 + b_1 \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{2u^2} + \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2)^2}{4u^4}, \quad (30)$$

который невозможно получить, если выбрать калибровочную функцию $g(x, u)$ равной константе.

Из свойства 2 последнего множителя Якоби следует, что данный первый интеграл I_1 одновременно представляет собой последний множитель Якоби, а потому его можно использовать при выводе из (12), (13) еще одного лагранжиана для уравнения (27):

$$\begin{aligned} L_2 &= \int \left(\int I_1 du \right) d\dot{u} + f_3(x, u) + \frac{d}{dx} g(x, u) = \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2) \frac{\dot{u}^4}{12} - (a_1 + 2a_2x) \frac{u\dot{u}^3}{6} + \\ &+ \left(a_2u^2 + b_1 \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{2u^2} + \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2)^2}{4u^4} \right) \dot{u}^2 + \\ &+ 32a_2b_1u^8 \ln u - (a_0 + a_1x + a_2x^2)(16a_2u^6 + 4b_1^2u^4 + \\ &+ 4b_1(a_0 + a_1x + a_2x^2)u^2 - (a_0 + a_1x + a_2x^2)^2) + \frac{d}{dx} g(x, u). \end{aligned} \quad (31)$$

Этот лагранжиан также имеет Γ в качестве точечной нётеровской симметрии, а потому из теоремы Нётер мы имеем первый интеграл, который в данном случае есть просто $I_2 = I_1^2 - a_0a_2b_1$.

4. ЛАГРАНЖИАНЫ СИСТЕМЫ ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе [22] рассмотрена задача для сферы, помещенной в стоксовый поток с однородным линейным сдвигом вдоль оси z , с граничными условиями без проскальзывания, наложенными на границе сферы радиуса a , центр которой располагается в начале координат. Постоянный вектор завихренности направлен вдоль оси y . Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega \left(z - \frac{5a^3x^2z}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{a^3z}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^5}{6} \left(-\frac{15x^2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{3z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \right), \\ \dot{y} &= \Omega \left(-\frac{5a^3xyz}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{a^5}{6} \left(-\frac{15xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \right) \right), \\ \dot{z} &= \Omega \left(-\frac{5a^3xz^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{a^3x}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^5}{6} \left(-\frac{15xz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{3x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В работе [23] было показано, что эта система из трех автономных уравнений первого порядка приводится к системе из двух неавтономных уравнений первого порядка, если перейти к обычным сферическим координатам:

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (33)$$

Фактически система (32) переходит в следующую систему из двух неавтономных уравнений от зависимых переменных y и $Z = z^2$ и от независимой переменной r :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{5a^3 y(a+r)}{(3a^3 + 6a^2 r + 4ar^2 + 2r^3)(a-r)r}, \\ Z' &= \frac{2a^3(a+r)(5Z - r^2)}{(3a^3 + 6a^2 r + 4ar^2 + 2r^3)(a-r)r}, \end{aligned} \quad (34)$$

где штрих обозначает производную по r . Из уравнения (17) сразу вытекает последний множитель Якоби для этой системы, который зависит только от переменной r :

$$M = \frac{1}{r^5} (3a^5 - 5a^3 r^2 + 2r^5). \quad (35)$$

Тогда из уравнений (15), (16) мы имеем лагранжиан для системы (34):

$$L = \frac{1}{r^5} (3a^5 - 5a^3 r^2 + 2r^5)(yZ' - Zy') + \frac{a^3 y}{r^6} (a^2 - r^2)(5Z - 4r^2) + s(r), \quad (36)$$

где $s(r)$ – произвольная функция.

5. ЛАГРАНЖИАН ОДУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе [24] было показано, что уравнение четвертого порядка

$$u^{(IV)} = \frac{-8u'u'''x^2 - u^2x^2 - 24uu'' - 16uu'''x - 24(u')^2 - 48u'u''x - 6(u'')^2x^2}{2ux^2} \quad (37)$$

может быть линеаризовано. Преобразование $w = xu^2$ дает

$$w^{(IV)} = -w. \quad (38)$$

У уравнения (37) имеется шестимерная алгебра симметрий Ли, порождаемая следующими шестью генераторами:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{x^2 u} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} e^{-x/\sqrt{2}} \partial_u, & \Gamma_2 &= \frac{1}{x^2 u} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} e^{x/\sqrt{2}} \partial_u, \\ \Gamma_3 &= \partial_x - \frac{u}{x} \partial_u, & \Gamma_4 &= u \partial_u, \\ \Gamma_5 &= -\frac{1}{x^2 u} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} e^{-x/\sqrt{2}} \partial_u, & \Gamma_6 &= -\frac{1}{x^2 u} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} e^{x/\sqrt{2}} \partial_u. \end{aligned} \quad (39)$$

Это означает, что данная система линеаризуется с помощью точечных преобразований.

Легко показать, что оба уравнения (37), (38) удовлетворяют условиям Фельса (19). Последний множитель Якоби для уравнения (38), очевидно, есть константа, а лагранжиан имеет при этом вид

$$L = \frac{1}{2} (w'')^2 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{d}{dx} G(x, w, w'), \quad (40)$$

где $G(x, w, w')$ – функция калибровки. Подставляя $w = xu^2$ в L , получим следующий лагранжиан для уравнения (37):

$$L = 2u^2 x^4 (u'')^2 + 4ux^2 (u^2 + 4uu'x + (u')^2 x^2) u'' + 2u'x(4u + u'x)(2u^2 + 4uu'x + (u')^2 x^2) + \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)u^4 + \frac{d}{dx} G(x, u, u'). \quad (41)$$

Заметим, что последний множитель Якоби для уравнения (37) имеет вид $x^8 u^4$, что можно получить непосредственно из уравнения (10). Тот же самый последний множитель Якоби (без учета несущественной мультипликативной константы) можно вывести путем рассмотрения обратного детерминанта матрицы в (7), который получается при использовании симметрий, порождаемых генераторами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5, \Gamma_6$.

У лагранжиана (41) имеются пять точечных нётеровских симметрий: все точечные симметрии Ли (39), кроме Γ_4 , оказываются нётеровскими. Из теоремы Нётер при этом следует существование пяти первых интегралов для уравнения (37), например Γ_3 генерирует следующий первый интеграл движения для уравнения (37):

$$I_3 = -8(u + xu')x^3 u^2 u''' + 4x^4 u^2 (u'')^2 - 8(5u^2 + 5xu u' + 2x^2 (u')^2) x^2 u u'' + 4x^4 (u')^4 - 16x^3 u (u')^3 - 24x^2 u^2 (u')^2 - 16xu^3 u' + (4 - x^4)u^4. \quad (42)$$

Ни один из этих первых пяти интегралов движения, кроме вытекающего из Γ_3 , не может быть получен, если функция калибровки выбиралась бы постоянной.

Благодарности. Автор признателен Н. Эйлеру и Р. Камассе за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] P. Navas, *Nuovo Cimento*, **5**, Suppl. 3 (1957), 363–388.
- [2] H. Goenner, *Gen. Relativity Gravitation*, **37**:7 (2005), 1331–1334.
- [3] E. Noether, *Gött. Nachr.*, **2** (1918), 235–257; *Transport Theory Statist. Phys.*, **1**:3 (1971), 186–207.
- [4] П. А. М. Дирак, “Лагранжиан в квантовой механике”, *Собрание научных трудов*. Т. II. *Квантовая теория*, научные статьи 1924–1947, ред. А. Д. Суханов, Физматлит, М., 2003, 573–579.
- [5] R. P. Feynman, P. A. M. Dirac, *Feynman’s Thesis – a New Approach to Quantum Theory*, ed. L. M. Brown, World Sci., Singapore, 2005.
- [6] R. P. Feynman, *Science*, **153**:3737 (1966), 699–708.
- [7] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [8] C. G. J. Jacobi, *J. Reine Angew. Math.*, **27** (1844), 199–268.
- [9] C. G. J. Jacobi, *J. Reine Angew. Math.*, **29** (1845), 213–279; 333–376.

- [10] К. Якоби, *Лекции по динамике*, Гостехиздат, М.-Л., 1936.
- [11] M. C. Nucci, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:2 (2005), 284–304.
- [12] M. C. Nucci, K. M. Tamizhmani, *Using an old method of Jacobi to derive Lagrangians: a nonlinear dynamical system with variable coefficients*, [arxiv: 0807.2791](#).
- [13] T. Hawkins, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **42**:3 (1991), 187–278.
- [14] S. Lie, *Forh. Christiania*, 1874, 255–274.
- [15] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Teubner, Leipzig, 1912.
- [16] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri, Pisa, 1918.
- [17] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **49**:7 (2008), 073517.
- [18] E. H. Kerner, *Gibbs Ensemble: Biological Ensemble*, Gordon and Breach, New York, 1971.
- [19] S. L. Trubatch, A. Franco, *J. Theoret. Biol.*, **48**:2 (1974), 299–324.
- [20] M. E. Fels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:12 (1996), 5007–5029.
- [21] N. Euler, *Private communication*.
- [22] A. T. Chwang, T. Yao-Tsu Wu, *J. Fluid Mech.*, **67**:4 (1975), 787–815.
- [23] R. Camassa, L. Zhao, R. M. McLaughlin, *Linear shear flow blocking by a fixed sphere in the Stokes regime*, preprint, 2008.
- [24] N. H. Ibragimov, S. V. Meleshko, S. Suksern, *J. Phys. A*, **41**:23 (2008), 235206.
- [25] M. C. Nucci, “Interactive REDUCE programs for calculating Lie point, non-classical, Lie–Bäcklund, and approximate symmetries of differential equations: manual and floppy disk”, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, 1996, 415–481.
- [26] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **48**:12 (2007), 123510.
- [27] M. C. Nucci, K. M. Tamizhmani, *Lagrangians for biological models: the method of Jacobi last multiplier*, preprint, 2009.
- [28] M. C. Nucci, A. M. Arthurs, *On the inverse problem of calculus of variations for fourth-order equations*, preprint, 2009.
- [29] M. Leo, R. A. Leo, G. Soliani, L. Solombrino, L. Martina, *Phys. Rev. D*, **27**:6 (1983), 1406–1408.
- [30] N. Petersson, N. Euler, M. Euler, *Stud. Appl. Math.*, **112**:2 (2004), 201–225.
- [31] Н. Эйлер, П. Г. Лич, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 64–80.