Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Пашаев, Релятивистские нелинейные уравнения Шредингера и Бюргерса, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 178–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 07:44:02

© 2009 г.

О. К. Пашаев*

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И БЮРГЕРСА

Построены релятивистские комплексные уравнение Бюргерса–Шредингера и нелинейное уравнение Шредингера. В нерелятивистском пределе они переходят соответственно в обычное уравнение Бюргерса и в обычное нелинейное уравнение Шредингера. Эти уравнения оказываются интегрируемыми во всех порядках разложения по релятивистским поправкам.

Ключевые слова: квазирелятивистское нелинейное уравнение Шредингера, релятивистское уравнение Бюргерса–Шредингера, иерархия нелинейного уравнения Шредингера, релятивистская дисперсия, q -производная, рекурсионный оператор.

1. ОБЩАЯ ИЕРАРХИЯ БЮРГЕРСА–ШРЕДИНГЕРА

Релятивистское линейное уравнение Шредингера обсуждалось на ранних этапах развития квантовой механики, но впоследствии было вытеснено уравнениями Клейна–Гордона и Дирака. Недавно релятивистские варианты уравнения Шредингера рассматривались при исследовании релятивистских связанных состояний типа кварк–антикварк [1] и гравитационного коллапса бозонной звезды [2]. Нелинейный вариант модели встречался в виде квазирелятивистского уравнения Хартри–Фока [3]. Тем не менее ни одна из этих моделей не оказалась интегрируемой. В настоящей работе строится интегрируемое релятивистское нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), свойство интегрируемости которого сохраняется во всех порядках разложения по $1/c$.

Рассмотрим уравнение Шредингера в размерности $1 + 1$ для свободной частицы с классической дисперсией общего аналитического вида $E = E(p)$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}(P_1)\Psi, \quad (1)$$

где $P_0 = i\hbar \partial/\partial t$ и $P_1 = -i\hbar \partial/\partial x$ представляют собой соответственно операторы сдвигов по времени и пространству, коммутирующие с оператором Шредингера $S = i\hbar \partial/\partial t - \mathcal{H}(P_1)$, $[P_\mu, S] = 0$, $\mu = 0, 1$. Оператор общего преобразования буста,

*Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla-Izmir, Turkey.
E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

определяемый как $K = x - t\mathcal{H}'(P_1)$, также коммутирует с S , $[K, S] = 0$. Вычисляя его коммутаторы с операторами пространственных и временных сдвигов, получаем алгебру операторов симметрии

$$[P_0, P_1] = 0, \quad [P_0, K] = -\hbar\mathcal{H}'(P_1), \quad [P_1, K] = -i\hbar. \quad (2)$$

Тем самым, если Ψ – решение уравнения (1) и W – оператор из указанной алгебры, т.е. $[W, S] = 0$, то $W\Psi$ также оказывается решением уравнения (1).

При заданной классической дисперсии $E = E(p)$, $E_0 \equiv E(0)$ определим E -многочлены $H_n^{(E)}(x, t)$ с помощью производящей функции

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - (E(p) - E_0)t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{p^n}{n!} H_n^{(E)}(x, t), \quad (3)$$

или, эквивалентно,

$$H_n^{(E)}(x, t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\mathcal{H}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - E_0\right)t\right] x^n. \quad (4)$$

Многочлен $H_n^{(E)}(x, t)$ оказывается решением уравнения

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} H_n^{(E)}(x, t) = (\mathcal{H} - E_0)H_n^{(E)}(x, t) \quad (5)$$

с начальным значением $H_n^{(E)}(x, 0) = x^n$. Из условия коммутирования $[S, K] = 0$ получаем, что эволюция по времени оператора K удовлетворяет соотношению

$$i\hbar\frac{\partial K}{\partial t} = [\mathcal{H}, K] \quad (6)$$

и имеет вид

$$K(t) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} K(0) e^{i\mathcal{H}t/\hbar} = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} x e^{i\mathcal{H}t/\hbar}.$$

Тогда оператор K порождает бесконечную иерархию многочленов:

$$KH_n(x, t) = K \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H} - E_0)t\right] x^n = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H} - E_0)t\right] x^{n+1} = H_{n+1}(x, t). \quad (7)$$

1.1. Нерелятивистское уравнение Шредингера. Из нерелятивистского закона дисперсии $E(p) = p^2/2m$ вытекает существование оператора Гамильтона

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (8)$$

и оператора галилеева буста

$$K = x + it \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (9)$$

С помощью производящей функции

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{p^n}{n!} H_n^{(S)}(x, t) \quad (10)$$

получаем многочлены Шредингера

$$H_n^{(S)}(x, t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} t \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] x^n. \quad (11)$$

Если $H_n^{(KF)}(x, t) = e^{td^2/dt^2} x^n$ – многочлен Кампе де Ферье, то $H_n^{(S)}(x, t) = H^{(KF)}(x, i\hbar t/2m)$, или, в терминах многочленов Эрмита,

$$H_n^{(S)}(x, t) = \left(-\frac{i\hbar}{2m} t \right)^{n/2} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{-2i\hbar t/m}} \right). \quad (12)$$

1.2. Квазирелятивистское уравнение Шредингера. Из релятивистского закона дисперсии $E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$ следует гамильтониан

$$\mathcal{H} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \quad (13)$$

и оператор квазирелятивистского буста

$$K = x + \frac{i\hbar}{m} t \frac{\partial/\partial x}{\sqrt{1 - (\hbar^2/m^2 c^2)(\partial^2/\partial x^2)}}. \quad (14)$$

В нерелятивистском пределе при $c \rightarrow \infty$ это выражение переходит в оператор галилеева буста (9). Производящая функция имеет вид релятивистской плоской волны

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} (px - (\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} - mc^2)t) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{p^n}{n!} H_n^{(SRS)}(x, t) \quad (15)$$

и задает квазирелятивистские многочлены

$$H_n^{(SRS)}(x, t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \left(\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} - 1 \right) \right] x^n. \quad (16)$$

В нерелятивистском пределе $H_n^{(SRS)} \rightarrow H_n^{(S)}$. Первые три многочлена в точности совпадают с многочленами Шредингера

$$H_1^{(SRS)}(x, t) = x, \quad H_2^{(SRS)}(x, t) = x^2 + i \frac{\hbar}{m} t, \quad H_3^{(SRS)} = x^3 + i \frac{\hbar}{m} 3xt,$$

а начиная с четвертого многочлена

$$H_4^{(SRS)}(x, t) = x^4 + i \frac{\hbar}{m} 6x^2 t - \frac{\hbar^2}{m^2} 3t^2 + i \frac{\hbar^3}{m^3 c^2} 3t \quad (17)$$

появляются релятивистские поправки порядка $1/c^2$. Для комплекснозначной пространственной переменной x , как и в $(2+1)$ -мерной теории Черна–Саймонса [4] нули этих многочленов описывают движение точечных вихрей в плоскости. Уравнения движения для N вихрей имеют вид

$$\dot{x}_k = \frac{i}{\hbar} \text{Res} \Big|_{x=x_k} \mathcal{H} \left[\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{l=1}^N \frac{1}{x - x_l} \right) \right] \cdot 1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

1.3. Релятивистское уравнение Бюргерса–Шредингера. Применяя преобразование Шредингера $\ln \Psi$ [5], $\Psi = e^{\ln \Psi}$, и тождество

$$e^{-\ln \Psi} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\ln \Psi} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x} \right)^n \cdot 1, \quad (19)$$

уравнение Шредингера (1) можно переписать в виде

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi = \mathcal{H} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x} \right) \right] \cdot 1. \quad (20)$$

Для комплекснозначной функции $\Psi = e^{iF/\hbar} = e^{R+iS/\hbar}$ введем новую комплекснозначную функцию

$$V = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} F,$$

имеющую размерность скорости. Тогда $F = S - i\hbar R$ – комплекснозначный потенциал, действительная и мнимая части которого определяют классическую и квантовую скорости, $V = V_c + iV_q = S_x/m - i\hbar R_x/m$. Тем самым уравнение (20) принимает вид комплекснозначного (квантового) уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{H} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + F_x \right) \cdot 1 = 0. \quad (21)$$

В классическом (бездисперсионном) пределе при $\hbar \rightarrow 0$ квантовая скорость V_q обращается в нуль, а комплекснозначный потенциал F переходит в вещественный потенциал скорости S , играющий роль главной функции Гамильтона. В этом случае уравнение (21) принимает вид классического уравнения Гамильтона–Якоби $\partial S/\partial t + \mathcal{H}(\partial S/\partial x) = 0$. Дифференцируя (20), получаем уравнение для комплексной скорости

$$i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{H} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + mV \right) \cdot 1 \right]. \quad (22)$$

Это уравнение оказывается представлением типа жидкости Маделунга для уравнения Шредингера (1). В классическом пределе оно переходит в уравнение Ньютона $m\partial V_c/\partial t = -\partial[\mathcal{H}(mV_c)]/\partial x$ или, если использовать форму записи гидродинамического типа, в уравнение

$$\frac{\partial V_c}{\partial t} + \mathcal{H}'(mV_c) \frac{\partial V_c}{\partial x} = 0, \quad (23)$$

которое представляет собой просто производную от классического уравнения Гамильтона–Якоби. Уравнение (23) имеет общее неявное решение $V_c(x, t) = f(x - \mathcal{H}'(mV_c)t)$, где f – произвольная функция, в котором развивается сингулярность при достижении критического значения по времени, когда производная $(V_c)_x$ обращается в бесконечность.

1.3.1. Нерелятивистское уравнение Бюргерса–Шредингера. Уравнение Шредингера (1) с нерелятивистским гамильтонианом (8) эквивалентно нелинейному уравнению с комплекснозначной скоростью V

$$i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - i\hbar V \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (24)$$

которое будем называть уравнением Бюргерса–Шредингера. В терминах вещественной и мнимой составляющих это уравнение описывает динамику жидкости Маделунга с плотностью $\rho = e^R$ и скоростью V_c . В классическом пределе оно сводится к одному вещественному уравнению на классическую скорость V_c , а именно к обыкновенному бездисперсионному уравнению Бюргерса.

1.3.2. Квазирелятивистское уравнение Бюргерса–Шредингера. Если начинать с гамильтониана (13), то процедура “бюргеризации”, описанная выше (см. (22)), приводит в итоге к квазирелятивистскому уравнению Бюргерса–Шредингера

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + mV \right)^2} \cdot 1 \right] = 0. \quad (25)$$

В нерелятивистском пределе это уравнение сводится к уравнению (24), релятивистские поправки к которому в первом порядке имеют вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - i\hbar V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{8m^3 c^2} [-\hbar^4 V_{xxx}] + \\ & + \frac{1}{8m^3 c^2} [-im\hbar^3 (10V_x V_{xx} + 4V V_{xxx}) + m^2 \hbar^2 (12V V_x^2 + 6V^2 V_{xx}) + 4im^3 \hbar V^3 V_x]. \end{aligned} \quad (26)$$

В классическом (бездисперсионном) пределе уравнение (25) принимает вид уравнения гидродинамического типа

$$(V_c)_t + \frac{V_c}{\sqrt{1 + V_c^2/c^2}} (V_c)_x = 0. \quad (27)$$

В нерелятивистском пределе это уравнение сводится к бездисперсионному уравнению Бюргерса, а первые релятивистские поправки дают

$$(V_c)_t + V_c (V_c)_x - \frac{1}{2c^2} V_c^3 (V_c)_x = 0. \quad (28)$$

Общее неявное решение уравнения (27) имеет вид

$$V_c(x, t) = f \left(x - \frac{V_c t}{\sqrt{1 + V_c^2/c^2}} \right), \quad (29)$$

и в течение конечного времени в нем также развивается сингулярность.

1.4. Преобразование Беклунда для уравнения Бюргерса–Шредингера. Применяя преобразование буста (см. определение в тексте после уравнения (1)), можно получить из одного решения Ψ_1 уравнения Шредингера (1) другое решение этого же уравнения в виде

$$\Psi_2 = K \Psi_1 = \left[x - t \mathcal{H}' \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \Psi_1. \quad (30)$$

Применяя тождество

$$\Psi^{-1} G \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi = G \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + mV \right) \cdot 1, \quad (31)$$

справедливое для комплекснозначных скоростей $V_a = -(i\hbar/m) \ln \Psi_a$, $a = 1, 2$, для уравнения (22) получаем преобразование Беклунда

$$V_2 = V_1 - i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[x - t H' \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + m V_1 \right) \cdot 1 \right]. \quad (32)$$

В нерелятивистской квантовой механике в случае гамильтониана (8) это преобразование становится комплекснозначным преобразованием Беклунда для уравнения Бюргера–Шредингера (24)

$$V_2 = V_1 - i \frac{\hbar}{m} \frac{1 - (V_1)_x t}{x - V_1 t}. \quad (33)$$

В квазирелятивистской квантовой механике с гамильтонианом (13) для уравнения (25) получается преобразование Беклунда вида

$$V_2 = V_1 - i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(x - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(m^2 c^2)} (-i\hbar \partial/\partial x + m V_1)^2} V_1 t \right). \quad (34)$$

Следует отметить, что в классическом пределе при $\hbar \rightarrow 0$, $V \rightarrow V_c$ приведенные выше преобразования Беклунда сводятся к тривиальному тождеству $V_{c1} = V_{c2}$.

2. ИНТЕГРИРУЕМАЯ ОБЩАЯ ИЕРАРХИЯ НУШ

В предыдущих разделах было исследовано так называемое C -интегрируемое релятивистское уравнение Бюргера–Шредингера. Теперь построим релятивистское обобщение иерархии НУШ с использованием иерархии Абловица–Каупа–Ньюэла–Сегура (АКНС) для НУШ.

2.1. Иерархия НУШ. Рассмотрим линейную задачу Захарова–Шабата

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ip/2 & -\kappa^2 \bar{\psi} \\ \psi & ip/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

для пространственной эволюции и обобщенную задачу АКНС [6]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iA & -\kappa^2 \bar{C} \\ C & iA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

для временной эволюции, где для вещественной функции $A(x, t, p)$ и комплекснозначной функции $C(x, t, p)$, задаваемых условием нулевой кривизны, подстановка $A_N = \sum_{n=0}^N A^{(n)} (-p/2)^n$, $C_N = \sum_{n=0}^N C^{(n)} (-p/2)^n$ приводит к уравнению эволюции

$$\partial_{t_N} \psi = \partial_x C^{(0)} + 2iA^{(0)} \psi$$

с условиями $C^{(N)} = 0$, $A^{(N)} = a_N = \text{const}$. Зафиксируем эту константу таким образом, чтобы $a_N = (-2)^{N-1}$. Тогда получим рекуррентные соотношения

$$C^{(n)} = \frac{1}{2i} \partial_x C^{(n+1)} + A^{(n+1)} \psi, \quad \partial_x A^{(n)} = i\kappa^2 (\bar{C}^{(n)} \psi - C^{(n)} \bar{\psi}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем

$$A^{(n)} = -i\kappa^2 \int^x (\bar{\psi} C^{(n)} - \psi \bar{C}^{(n)}). \quad (37)$$

Подставив (37) в рекуррентное соотношение, получаем

$$\left(\frac{C^{(n)}}{\bar{C}^{(n)}} \right) = -\frac{1}{2} \mathcal{R} \left(\frac{C^{(n+1)}}{\bar{C}^{(n+1)}} \right), \quad (38)$$

где $\mathcal{R}$ – матричнозначный интегродифференциальный оператор, который есть не что иное, как рекуррентный оператор иерархии НУШ [6]

$$\mathcal{R} = i\sigma_3 \begin{pmatrix} \partial_x + 2\kappa^2 \psi \int^x \bar{\psi} & -2\kappa^2 \psi \int^x \psi \\ -2\kappa^2 \bar{\psi} \int^x \bar{\psi} & \partial_x + 2\kappa^2 \bar{\psi} \int^x \psi \end{pmatrix}, \quad (39)$$

а σ_3 – третья матрица Паули. Тогда имеем

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_{t_N} = \mathcal{R}^N \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где t_N , $N = 1, 2, 3, \dots$, – бесконечная иерархия времен. В линейном приближении при $\kappa = 0$ рекуррентный оператор представляет собой оператор импульса $\mathcal{R}_0 = i\sigma_3 \partial / \partial x$, а иерархия НУШ (40) принимает вид иерархии линейного уравнения Шредингера

$$i\psi_{t_n} = i^n \partial_x^n \psi. \quad (41)$$

Представление Маделунга для этой иерархии, задаваемое комплексным преобразованием Коула–Хопфа, обеспечивается комплекснозначной иерархией Бюргерса [4].

Каждое уравнение иерархии (40) интегрируемо. Линейная задача для N -го уравнения описывается задачей Захарова–Шабата (35) для пространственной части и задачей

$$\frac{\partial}{\partial t_N} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iA_N & -\kappa^2 \bar{C}_N \\ C_N & iA_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = J_{0N} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

для временной составляющей. Коэффициентные функции C_N могут быть найдены в следующем удобном виде:

$$\begin{pmatrix} C_N \\ \bar{C}_N \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N p^{N-k} \mathcal{R}^{k-1} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = (p^{N-1} + p^{N-2} \mathcal{R} + \dots + \mathcal{R}^{N-1}) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Чтобы записать это выражение в более компактном виде, введем обозначение для оператора в терминах q -чисел:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} \equiv [N]_q, \quad (44)$$

где q – линейный оператор. Тем самым в терминах оператора $q \equiv \mathcal{R}/p$ получаем следующее конечное разложение Лорана по спектральному параметру p :

$$1 + \frac{\mathcal{R}}{p} + \left(\frac{\mathcal{R}}{p} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\mathcal{R}}{p} \right)^{N-1} \equiv [N]_{\mathcal{R}/p}. \quad (45)$$

Тогда имеем

$$\left(\frac{C_N}{\bar{C}_N}\right) = p^{N-1}[N]_{\mathcal{R}/p} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right). \quad (46)$$

Аналогично получаем

$$A_N = -\frac{p^N}{2} - i\kappa^2 p^{N-1} \left(\int^x \bar{\psi}, - \int^x \psi \right) [N]_{\mathcal{R}/p} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right). \quad (47)$$

Уравнения (42), (46) и (47) задают временную составляющую линейной задачи (представления Лакса) для N -го потока иерархии НУШ (40), выраженного в терминах q -анализа.

2.2. Общее уравнение иерархии НУШ. Общее уравнение иерархии НУШ для времени t , которое задается формальным рядом $\partial_t = \sum_{N=0}^{\infty} E_N \partial_{t_N}$ с произвольными постоянными E_N , имеет вид

$$i\sigma_3 \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right)_t = (E_0 + E_1 \mathcal{R} + \dots + E_N \mathcal{R}^N + \dots) \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right). \quad (48)$$

Интегрируемость этого уравнения связана с задачей Захарова–Шабата (35) и с временной эволюцией

$$J_0 = \sum_{N=0}^{\infty} E_N J_{0N} = \begin{pmatrix} -iA & -\kappa^2 \bar{C} \\ C & iA \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где

$$\left(\frac{C}{\bar{C}}\right) = \sum_{N=0}^{\infty} E_N \left(\frac{C_N}{\bar{C}_N}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} E_N p^{N-1} [N]_{\mathcal{R}/p} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right); \quad (50)$$

здесь было использовано, что для $N = 0$ величина $C_0 = 0$. В результате получаем

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} E_N A_N = -\frac{1}{2} \sum_{N=0}^{\infty} E_N p^N - i\kappa^2 \left(\int^x \bar{\psi}, - \int^x \psi \right) \left(\frac{C}{\bar{C}}\right). \quad (51)$$

Уравнение (48) задает интегрируемое нелинейное расширение линейного уравнения Шредингера (1) с обобщенным аналитическим законом дисперсии. Рассмотрим систему классических частиц с соотношением энергии-импульса $E(p) = E_0 + E_1 p + E_2 p^2 + \dots$. Тогда соответствующее волновое уравнение Шредингера, зависящее от времени, принимает вид (1), где гамильтонов оператор получается стандартной подстановкой $p \rightarrow -i\hbar \partial / \partial x$ для импульса в законе дисперсии. Уравнение (1) вместе со своим комплексно-сопряженным уравнением запишем в виде

$$i\hbar \sigma_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right) = H \left(-i\hbar \sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right). \quad (52)$$

Оператор импульса в этом выражении – это оператор рекурсии в линейном приближении: $\mathcal{R}_0 = i\sigma_3 \partial / \partial x$. Таким образом, уравнение (52) оказывается линейным

уравнением Шредингера с произвольным аналитическим законом дисперсии. Нелинейное интегрируемое расширение уравнения (52) проявляется в виде (48), что соответствует подстановке $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ ($\hbar = 1$), так что

$$i\sigma_3 \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right)_t = H(\mathcal{R}) \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right). \quad (53)$$

С этой точки зрения стандартная подстановка для классического импульса $p \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ или, эквивалентно, $p \rightarrow -i\hbar\sigma_3\partial/\partial x = \mathcal{R}_0$ для уравнения в спинорной форме записи задает квантование в виде линейного уравнения Шредингера. В то же время при подстановке $p \rightarrow \mathcal{R}$ получаем “нелинейное квантование” и уравнение из иерархии НУШ.

Представление Лакса, связанное с уравнением (53), задается формулами (50), (51). По определению q -производной

$$D_q^{(\zeta)} f(\zeta) = \frac{f(q\zeta) - f(\zeta)}{(q-1)\zeta}$$

для оператора $q = \mathcal{R}/p$ получаем соотношение $D_{\mathcal{R}/p}^{(p)} \zeta^N = [N]_{\mathcal{R}/p} p^{N-1}$. Тогда уравнение (50) можно переписать в виде

$$\left(\frac{C}{\bar{C}} \right) = \sum_{N=1}^{\infty} E_N p^{N-1} [N]_{\mathcal{R}/p} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right) = \sum_{N=1}^{\infty} E_N D_{\mathcal{R}/p}^{(p)} p^N \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right), \quad (54)$$

или, учитывая линейность q -производной и конкретный вид аналитической дисперсии,

$$\left(\frac{C}{\bar{C}} \right) = D_{\mathcal{R}/p}^{(p)} \sum_{N=0}^{\infty} E_N p^N \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right) = D_{\mathcal{R}/p}^{(p)} E(p) \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right). \quad (55)$$

В силу приведенного выше определения выражение (55) сводится к простой формуле

$$\left(\frac{C}{\bar{C}} \right) = \frac{E(\mathcal{R}) - E(p)}{\mathcal{R} - p} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right). \quad (56)$$

Тогда для функции A получаем

$$A = -\frac{1}{2} E(p) - i\kappa^2 \left(\int^x \bar{\psi}, - \int^x \psi \right) \frac{E(\mathcal{R}) - E(p)}{\mathcal{R} - p} \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} \right). \quad (57)$$

Уравнения (56) и (57) задают представление Лакса для общей интегрируемой модели иерархии НУШ (53) в простом и компактном виде. Стоит отметить, что конкретный вид закона дисперсии $E = E(p)$ определяется рассматриваемой физической задачей. В разделе 3 рассмотрим релятивистскую форму этого закона дисперсии и соответствующее квазирелятивистское НУШ.

3. КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКОЕ НУШ

В п. 1.2 рассматривался релятивистский закон дисперсии $E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$. С его помощью можно построить квазирелятивистское уравнение Шредингера с гамильтонианом (13). Тогда, объединяя два комплексно-сопряженных уравнения, получаем

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = mc^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Заметим, что если ψ описывает движение релятивистской частицы в положительном направлении времени и с положительной энергией, то волновая функция $\bar{\psi}$ отвечает движению в отрицательном направлении времени и с отрицательной энергией. С этой точки зрения уравнение (58) оказывается полным, так как оно описывает оба случая одновременно.

В соответствии с общей процедурой, изложенной в разделе 2, можно заменить оператор производной $\mathcal{R}_0 = i\sigma_3 \partial / \partial x$, отвечающий линейному импульсу p , на полный рекуррентный оператор $\mathcal{R}$ (39), что в итоге приведет к интегрируемому релятивистскому нелинейному уравнению Шредингера

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = mc^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \mathcal{R}^2} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (59)$$

где квадратный корень из операторнозначного выражения имеет смысл формального разложения в ряд, так что

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2m^2 c^2} \mathcal{R}^2 - \frac{1}{8m^4 c^4} \mathcal{R}^4 + \frac{1}{16m^6 c^6} \mathcal{R}^6 - \dots \right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Для приведенного выше релятивистского закона дисперсии и уравнения (59) получаем следующую линейную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -ip/2 & -\kappa^2 \bar{\psi} \\ \psi & ip/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -iA & -\kappa^2 \bar{C} \\ C & iA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{m^2 c^4 + \mathcal{R}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}}{\mathcal{R} - p} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \\ A &= -\frac{1}{2} \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - i\kappa^2 \left(\int^x \bar{\psi}, \quad - \int^x \psi \right) \frac{\sqrt{m^2 c^4 + \mathcal{R}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}}{\mathcal{R} - p} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а спектральный параметр p имеет смысл классического импульса. Модель (59) представляет собой интегрируемое НУШ с релятивистским законом дисперсии

$$i\psi_t = mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \psi + F(\psi), \quad (62)$$

где нелинейная часть, разложенная в ряд по $1/c^2$, задается как

$$F(\psi) = \frac{1}{2m} [-2\kappa^2 |\psi|^2 \psi] - \\ - \frac{1}{8m^3 c^2} [2\kappa^2 (2|\psi_x|^2 \psi + 4|\psi|^2 \psi_{xx} + \bar{\psi}_{xx} \psi^2 + 3\bar{\psi} \psi_x^2) + 6\kappa^4 |\psi|^4 \psi] + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Если разложить в ряд по $1/c^2$ также и дисперсионный член, то в каждом порядке по $1/c^2$ возникнет интегрируемая система. Тем самым наша процедура приводит к интегрируемым релятивистским поправкам к НУШ во всех порядках теории возмущений. Ни одна из известных интегрируемых релятивистских моделей типа модели синус-Гордон или уравнения Лиувилля не обладает таким свойством. Наконец, заметим, что нелинейные релятивистские уравнения, построенные в настоящей работе, отличаются от уравнений, полученных в работах [1]–[3] и в статьях, цитируемых в этих работах. Наши модели могут найти применение при исследовании релятивистских поправок к солитонам, к конденсатам Бозе–Эйнштейна или к другим системам конденсированных сред, описываемым эффективными уравнениями релятивистской природы.

Благодарности. Настоящая работа частично поддержана Izmir Institute of Technology (Turkey) (грант BAP 200 8IYTE25).

Список литературы

- [1] L. J. Nickisch, L. Durand, B. Durand, *Phys. Rev. D*, **30**:3 (1984), 660–670.
- [2] J. Fröhlich, E. Lenzmann, *Comm. Pure Appl. Math.*, **60**:11 (2007), 1691–1705.
- [3] Y. Cho, T. Ozawa, *SIAM J. Math. Anal.*, **38**:4 (2006), 1060–1074.
- [4] О. К. Пашаев, З. Н. Гюркан, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 163–176.
- [5] E. Schrödinger, *Ann. Phys.*, **384**:4 (1926), 361–376.
- [6] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.