Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Борисов, Асимптотическое поведение сингулярных солитонов и метод обратной задачи рассеяния для решения краевых задач, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 2, 279–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:57:34

© 2000 г.

А. Б. Борисов*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ СОЛИТОНОВ И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В рамках метода обратной задачи рассеяния рассматривается решение краевых задач для уравнения синус-Гордон и эллиптической решетки Тоды. Данный подход позволяет включить в рассмотрение решения в виде сингулярного солитона – спирального вихря.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод обратной задачи в настоящее время используется как эффективная процедура решения многих универсальных интегрируемых нелинейных уравнений. С его помощью можно получать не только специальные типы решений – многосолитонные и конечнозонные, но и эффективно исследовать асимптотическое поведение многих уравнений гиперболического типа, т.е. исследовать решение задачи Коши так же полно, как это можно сделать в линейном случае. При анализе асимптотического поведения решений на больших временах выяснилось, что несолитонная часть в большинстве случаев ведет себя не так, как решения линеаризованной задачи: нелинейный сдвиг частоты волны приводит к изменению фазы асимптотического решения, и существуют пространственно-временные области с нелинейным характером решения при любой малой амплитуде [1, 2].

В последнее время выявились трудности традиционного метода обратной задачи рассеяния при решении начально-краевых задач на полубесконечном интервале. Так при произвольном краевом условии на полубесконечном интервале для нелинейного уравнения Шредингера отображение решений полевых уравнений в данные рассеяния не приводит к линейному уравнению для них, их эволюция определяется нелинейным интегральным уравнением [3]. К настоящему времени методом обратной задачи решались лишь некоторые специальные типы начально-краевых задач [4–6], которые, по-видимому, наиболее эффективно исследовать с помощью преобразования Беклунда или условия совместности краевых условий с высшими симметриями [7]. Наиболее очевидны

*Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: Borisov@imp.uran.ru

трудности решения подобных задач в случае дискретных систем, которые в континуальном пределе редуцируются в нелинейное уравнение эллиптического типа.

Традиционный метод обратной задачи не может быть прямо применен и к нелинейным уравнениям эллиптического и параболического типов, обладающим представлением Лакса (эллиптическое уравнение синус-Гордон, $0(3)$ -инвариантная модель, уравнение Эрнста и т. д.). Известно, что интегрируемые параболические уравнения редуцируются в линейные при помощи обобщенного преобразования Коула-Хопфа. Для эллиптических уравнений метод обратной задачи требует существенной модификации при решении краевых задач. Для уравнения синус-Гордон краевые задачи впервые обсуждались независимо для полуплоскости (с нелокальными краевыми условиями) [8] и для цилиндрически-симметричных сингулярных решений (уравнение гиперболический синус-Гордон) [9–11]. В работах [10, 11] была найдена эффективная модификация метода обратной задачи для описания вихреподобных решений уравнения синус-Гордон. Вихреподобные конфигурации полей характеризуются сингулярными решениями $u(x, y)$ с ненулевым целым топологическим зарядом

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \nabla u \, d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где γ – любой контур, окружающий точку сингулярности – центр вихря. Предложенная процедура позволила описать вихри и вихревые диполи с различными топологическими зарядами, которые представляют собой полубесконечные 2π -кинки или 2π -кинки конечной длины, соединяющие центры вихрей. В магнитных системах такие вихри являются элементарными возбуждениями двумерных систем с обменным взаимодействием и анизотропией или магнитным полем в плоскости пленки. Влияние вихрей на статистические свойства этих систем впервые обсуждались в работе [12]. В протяженных джозефсоновских контактах вихреподобными решениями являются магнитные диполи на фоне кноидальной волны (смешанное состояние сверхпроводников) [13].

Сущность модификации метода обратной задачи для решения подобных эллиптических задач состоит в следующем. Используя граничные условия по одной из пространственных переменных (например, y), можно произвести преобразование к данным рассеяния (в каждой полуплоскости), зависящим от спектрального параметра λ и переменной x . Граничные условия на функцию $u(x, y)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ определяют часть данных рассеяния. Дальнейшая сшивка решений при $x = 0$ и условие (1) определяют с точностью до произвольной постоянной сингулярные данные рассеяния. Однако использование этой процедуры для краевых задач в полуплоскости приводит к нелинейным интегральным уравнениям для прямой задачи рассеяния [14], так как пара Лакса неизвестна на прямой $x = 0$.

В настоящей работе мы обсуждаем применение метода обратной задачи для решения краевых задач для уравнения синус-Гордон и эллиптической решетки Тоды. Статья построена следующим образом. В разделе 2 для эллиптического уравнения синус-Гордон методом обратной задачи рассеяния изучаются сингулярные солитоны – спиральные вихри. Спиральные солитоны, впервые исследованные численным методом [15], отличаются от рассматриваемых нами граничными условиями. Сингулярное поведение таких

солитонов вблизи центра, зависящее от параметров α (интенсивность точечного источника) и Q (топологический заряд вихря), позволяет, следуя [9–11], найти общий вид данных рассеяния, зависящий от двух произвольных параметров ρ и ω . Однако, в отличие от авторов указанных работ, мы не определяем параметры ρ, ω из линеаризованного уравнения синус-Гордон вблизи центра вихря. Мы показываем, что при больших значениях спектрального параметра функции Йоста, ассоциированные со спектральной задачей, имеют автомодельный характер. Это позволяет, используя методы, предложенные в работах [16, 17], найти точную нелинейную (перенормированную) связь параметров ρ, ω с α, Q и асимптотическое поведение полей спирального вихря на больших расстояниях от его центра. В разделе 3 описана дискретная эллиптическая модель Тоды в полуплоскости, которая является простым обобщением решетки Тоды и редуцируется в нелинейное уравнение эллиптического типа в континуальном пределе. Мы показываем, что для достаточно общих граничных условий краевая задача для такой системы может быть решена методом обратной задачи. Здесь он сводится к нетривиальной задаче решения нелинейных алгебраических уравнений, которая решается в терминах тэта-констант.

2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СПИРАЛЬНОГО ВИХРЯ

В этом разделе мы обсудим решение краевой задачи уравнения синус-Гордон

$$u_{xx}(x, y) + u(x, y)_{yy} = \sin u(x, y) \quad (2)$$

для спирального вихря. Его асимптотика вблизи начала координат в полярной системе координат имеет вид

$$u \rightarrow -\alpha \ln r + Q\varphi + \beta \quad (r \rightarrow 0) \quad (3)$$

и удовлетворяет линеаризованному уравнению синус-Гордон вблизи начала координат, исключая точку $r = 0$. Первое слагаемое описывает точечный источник силы α . Для полей $u(r)$, убывающих при $r \rightarrow \infty$, такие сингулярные решения представляют собой солитоноподобный волновой пакет, они численно исследовались в работах [17, 18]. Второе и третье слагаемые описывают вихрь с топологическим зарядом Q . В дальнейшем без потери общности мы полагаем $Q = -1$. Линии постоянных значений $u(x, y)$ являются логарифмическими спиралями, закручивающимися около начала координат. Изменение $u(x, y)$ при обходе вокруг центра вихря по часовой стрелке равно $2\pi Q$, и для $Q = -1$ мы выберем граничные условия в следующем виде:

$$u \rightarrow 4 \arctg e^{-y} \pmod{2\pi}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0 \pmod{2\pi}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (5)$$

$$u \rightarrow 0 \pmod{2\pi}, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (6)$$

Эллиптическое уравнение синус-Гордон представляется как условие совместности $L_x - A_y + [L, A] = 0$ двух дифференциальных операторов

$$\Phi_y = L\Phi, \quad L = -iq\sigma_1 + \frac{i\sigma_3}{4} \left(\lambda - \frac{\cos u}{\lambda} \right) + \frac{i}{4\lambda} \sin u \sigma_2, \quad (7)$$

$$\Phi_x = A\Phi + \Phi C, \quad A = -q\sigma_1 + \frac{\sigma_3}{4} \left(\lambda + \frac{\cos u}{\lambda} \right) - \frac{1}{4\lambda} \sin u \sigma_2. \quad (8)$$

Здесь σ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) – матрицы Паули, $q = (iu_x + u_y)/4$ и вид произвольной матрицы C выбирается в соответствии с граничными условиями. Найдем отображение потенциалов в данные рассеяния. С этой целью для вещественных значений λ определим матрицы Йоста Ψ, Φ как решения системы со следующим асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned}\Psi &\rightarrow e^{ik_2 \frac{\sigma_3}{2}} \quad (y \rightarrow \infty), \\ \Phi &\rightarrow e^{ik_2 \frac{\sigma_3}{2}} \quad (y \rightarrow -\infty), \\ k_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right).\end{aligned}\tag{9}$$

Используя треугольное представление матриц Йоста, с помощью стандартной процедуры можно показать, что при условии ограниченности интегралов

$$\int_y^\infty |q| dy, \quad \int_y^\infty |\cos u| dy, \quad \int_y^\infty |\sin u| dy$$

вектор-функции

$$\chi_{\alpha 1}(\lambda) = \Psi_{\alpha 1}(\lambda) e^{-\frac{ik_2}{2}}, \quad \chi_{\alpha 2}(\lambda) = \Phi_{\alpha 2}(\lambda) e^{\frac{ik_2}{2}} \quad (\alpha = 1, 2)$$

аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость комплексной переменной λ , а вектор-функции

$$\Psi_{\alpha 2}(\lambda) e^{\frac{ik_2}{2}}, \quad \Phi_{\alpha 1}(\lambda) e^{-\frac{ik_2}{2}} \quad (\alpha = 1, 2)$$

– в нижнюю полуплоскость. Отметим, что из представления (7), (8) следуют ограничения на вид этих матриц:

$$\Psi(-\lambda) = \sigma_1 \Psi(\lambda) \sigma_1, \quad \Phi(-\lambda) = \sigma_1 \Phi(\lambda) \sigma_1,\tag{10}$$

поэтому матрица рассеяния $T(\lambda)$: $\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)T(\lambda, x)$, имеет вид

$$T(\lambda, x) = \begin{pmatrix} a(\lambda, x) & b(-\lambda, x) \\ b(\lambda, x) & a(-\lambda, x) \end{pmatrix}.\tag{11}$$

Найдем зависимость матричных элементов от переменной x . Асимптотика функций Йоста не зависит от этой переменной при выборе

$$C = -\frac{k_1}{2}\sigma_3, \quad k_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}).$$

Тогда из уравнений (8) мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}T(\lambda, x) &= [T(\lambda, x), C], \\ a(\lambda, x) &= a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, x) = b(\lambda, 0)e^{-k_1 x}.\end{aligned}$$

Обсудим ограничения на данные рассеяния, налагаемые граничными условиями при $x \rightarrow \pm\infty$. Прямыми вычислениями мы находим явный вид функций Йоста в этой асимптотике:

$$\Psi \rightarrow e^{ik_2 y \frac{\sigma_3}{2}}, \quad \Phi \rightarrow e^{ik_2 y \frac{\sigma_3}{2}} \quad (x \rightarrow -\infty), \quad (12)$$

$$(\Psi_{11}(\lambda), \Psi_{21}(\lambda)) = \left(\lambda + i \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right) e^{\frac{ik_2 y}{2}} (\lambda + i)^{-1} \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (13)$$

$$(\Phi_{11}(\lambda), \Phi_{21}(\lambda)) = \left(\lambda + i \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right) e^{\frac{ik_2 y}{2}} (\lambda - i)^{-1} \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (14)$$

Отсюда мы находим важные соотношения $b(\lambda, -\infty) = b(\lambda, \infty) = 0$ и определяем часть данных рассеяния:

$$a(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - i)(\lambda + i)^{-1}, & x > 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$b(\lambda, x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad \lambda > 0, \\ 0, & x > 0, \quad \lambda < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Причина различного вида данных рассеяния состоит в том, что при $x = 0$ оператор L имеет полюс ($L \sim 1/y$), аналогичный полюсу в спектральной задаче Захарова–Шабата [18]. Из-за особенности потенциала q в начале координат функции Йоста неоднозначны в плоскости (x, y) , и при обходе по замкнутому контуру они умножаются справа на матрицы монодромии. Мы будем рассматривать отдельно случаи $x < 0$ и $x > 0$ и обозначать дополнительными индексами (0) и (1) полевые переменные, относящиеся соответственно к левой и правой половинам плоскости (x, y) . Так, через $\Phi^{(0)}(\lambda)$ мы будем обозначать функцию Йоста $\Phi(\lambda)$ при $x < 0$, через $T^{(0)}(\lambda, x)$ – матрицу рассеяния при $x < 0$, а $T^{(n)}(\lambda, x)$ при $x = 0$ определим как $T^{(0)}(\lambda, -\varepsilon)$, $T^{(1)}(\lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из представлений (7), (8) нетрудно получить важную, согласованную с граничными условиями редукцию (условие вещественности полей $u(x, y)$)

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(\lambda) &= B \Phi^{*(0)} \left(\frac{1}{\lambda^*} \right), \quad \Psi(\lambda) = B \Psi^* \left(\frac{1}{\lambda^*} \right), \\ T^{(0)}(\lambda) &= T^{*(0)} \left(\frac{1}{\lambda^*} \right), \quad \Phi^{(1)}(\lambda) = -B \Phi^{*(1)} \left(\frac{1}{\lambda^*} \right), \quad T^{(1)}(\lambda) = -T^{*(1)} \left(\frac{1}{\lambda^*} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$B = \cos \frac{u}{2} - i \sigma_1 \sin \frac{u}{2}. \quad (18)$$

Заметим, что из явного вида диагональных элементов матрицы рассеяния и асимптотических разложений нетрудно получить интегральные характеристики спирального вихря и показать, в частности, что уравнение синус-Гордон представимо как условие потенциальности $\Delta_{x,x} + \Delta_{y,y} = 0$ векторного поля $\vec{\Delta} = (u_x u_y, u_y^2/2 - u_x^2/2 + \cos u - 1)$.

Уравнения обратной задачи рассеяния могут быть получены традиционным образом [2] с помощью матричной задачи Римана для аналитической функции

$$\Omega_{\alpha} = \begin{cases} \Phi_{\alpha 1}(\lambda) \frac{e^{-\frac{ik_2 y}{2}}}{a(-\lambda)}, & \text{Im } \lambda < 0, \\ \Psi_{\alpha 1}(\lambda) e^{-\frac{ik_2 y}{2}}, & \text{Im } \lambda > 0. \end{cases}$$

При $x > 0$ спектральная задача имеет одно связанное состояние — нуль функции $a^{(1)}(\lambda) = \det[\Psi_{\alpha 1}(\lambda), \Phi_{\beta 2}(\lambda)]$. Не зависящую от x постоянную c в соотношении $\Psi_{\alpha 1}(\lambda)|_{\lambda=i} = c\Phi_{\alpha 2}(\lambda)|_{\lambda=i}$ можно найти из явного вида входящих в него функций при $x \rightarrow \infty$ (см. (13), (14)). Уравнения обратной задачи удобно записать для функций

$$m(\lambda) = \chi_1(-\lambda) + \chi_2(-\lambda), \quad n(\lambda) = \chi_1(-\lambda) - \chi_2(-\lambda) \quad (19)$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} m^{(1)}(\lambda) &= 1 - 2m^{(1)}(\lambda)|_{\lambda=-i} \frac{e^{-y}}{\lambda - i} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{r^{(1)}(\lambda') m^{(1)}(\lambda')}{\lambda + \lambda' - i\epsilon} e^{-k_1(\lambda')x - ik_2(\lambda')y} d\lambda', \\ \epsilon \rightarrow 0, \quad r^{(1)}(\lambda) &= \frac{b^{(1)}(\lambda, 0)}{a^{(1)}(\lambda)}, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$\begin{aligned} m^{(0)}(\lambda) &= 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{r^{(0)}(\lambda') m^{(0)}(\lambda')}{\lambda + \lambda' - i\epsilon} e^{-k_1(\lambda')x - ik_2(\lambda')y} d\lambda', \\ \epsilon \rightarrow 0, \quad r^{(0)}(\lambda) &= \frac{b^{(0)}(\lambda, 0)}{a^{(0)}(\lambda)}, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения для функций $n^{(1)}(\lambda)$, $n^{(0)}(\lambda)$ совпадают с (20), (21) после замены $m^{(1)}(\lambda) \rightarrow n^{(1)}(\lambda)$, $m^{(0)}(\lambda) \rightarrow n^{(0)}(\lambda)$ и смены знака перед интегралом и полюсным слагаемым. Вычисляя коэффициенты асимптотического разложения $\chi_{\alpha}(\lambda)$ по прямым и обратным степеням λ , из уравнений (7) мы находим выражение полей через функции спектральной задачи:

$$\chi_2(\lambda) = -\frac{2q}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (22)$$

$$m(\lambda)|_{\lambda=0} = e^{-\frac{iy}{2}}, \quad n(\lambda)|_{\lambda=0} = e^{\frac{iy}{2}}, \quad (23)$$

согласованные с уравнениями обратной задачи рассеяния и редукцией

$$m(\lambda) = m^* \left(\frac{1}{\lambda^*} \right) e^{-\frac{iy}{2}}, \quad n(\lambda) = n^* \left(\frac{1}{\lambda^*} \right) e^{\frac{iy}{2}}, \quad (24)$$

являющейся следствием (17), (18).

Отметим важное обстоятельство. Из уравнений (20), (21) следуют замечательные свойства спектральных задач уравнения (2): согласно условию ограниченности потенциалов (ограничения на $b(\lambda, 0)$) функции Ёоста допускают аналитическое продолжение с полуплоскости на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча ($\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \lambda = 0$) или луча ($\operatorname{Re} \lambda < 0$, $\operatorname{Im} \lambda = 0$).

При $x < 0$ мы выберем данные рассеяния в виде

$$a^{(0)}(\lambda) = 1, \quad b^{(0)}(\lambda, 0) = \rho + \omega(\lambda - i)(\lambda + i)^{-1} \quad (25)$$

по следующим причинам. Выражение (25) при вещественном ρ и мнимом ω — это простейшая рациональная функция, которая дает особенность (3) при итерационном решении уравнений обратной задачи (21) уже в первом порядке. При $\omega = 0$ ($\rho = 0$) данные (25) описывают кольцевую область [17], при $\rho = 0$ — вихрь [10, 11].

При $x > 0$ данные рассеяния выбираются из условия сшивки потенциала при $x = 0$ следующим образом. Как следует из граничных условий (9), функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$ непрерывны при $y > 0$ на оси $x = 0$ и разрывны при $y < 0$. Тогда условие непрерывности полей $u(-\epsilon, y) = u(\epsilon, y)$ ($y > 0$, $\epsilon \rightarrow 0$) посредством уравнений (20), (21) сводится к интегральным соотношениям, которые в первом итерационном порядке имеют решение $r^{(1)}(\lambda) = -r^{(0)}(\lambda)$. Такое соотношение было справедливо для всех рассматриваемых ранее сингулярных солитонов.

Выразим постоянные ρ, ω в данных рассеяния через α, Q . С этой целью мы используем эффективный прием, предложенный в работах [16, 17] при описании сингулярных автомодельных решений $u(r)$ в методе изомонодромных деформаций. Подставим в уравнения (7), (8) асимптотику (3) и определим главные члены асимптотики функций Ёоста. Для наших целей достаточно найти их для малых и больших значений λ . Нетрудно показать, что при $|\lambda| > r^{-1/2}$ в уравнениях (7), (8) члены, пропорциональные λ^{-1} , можно опустить, и упрощенную систему уравнений удобно записать в новых независимых переменных: $r, \gamma = \lambda r \exp(i\varphi)$. Тогда функции $\chi(-\lambda)$ удовлетворяют укороченной системе уравнений

$$\partial_\gamma \chi(-\lambda) = \left(\frac{\sigma_1(i\alpha - Q)}{4\gamma} + \frac{I - \sigma_3}{4} \right) \chi(-\lambda) \quad (26)$$

(I — единичная матрица), общее решение которой выражается через функции Бесселя мнимого аргумента:

$$m(\gamma) = e^{\gamma/4} \sqrt{\gamma} \left[C_1 I_\nu \left(\frac{\gamma}{4} \right) + C_2 K_\nu \left(\frac{\gamma}{4} \right) \right], \quad (27)$$

$$n(\gamma) = e^{\gamma/4} \sqrt{\gamma} \left[-C_1 I_{\nu+1} \left(\frac{\gamma}{4} \right) + C_2 K_{\nu+1} \left(\frac{\gamma}{4} \right) \right], \quad (28)$$

с порядком $\nu = (i\alpha - Q)/4 - 1/2$. С помощью системы уравнений, полученной из (7), (8) и определяющей зависимость $\chi(-\lambda)$ от переменной r , можно показать, что величины C_1, C_2 зависят только от спектрального параметра λ . При $x < 0$ ($-3\pi/2 < \varphi < \pi/2$)

функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$ аналитичны в нижней λ -полуплоскости и в этой области $-\pi/2 < \arg \gamma < 3\pi/2$. Поэтому из условия нормировки $m(\lambda) \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} \lambda < 0$) мы находим $C_1 \rightarrow O(1/\lambda)$, $C_2 \rightarrow 1/\sqrt{2\pi} + O(1/\lambda)$. Аналогичным образом можно определить вид функций Йоста при малых значениях $|\lambda| < r^{1/2}$, согласованный с редукциями.

Таким образом, при больших значениях λ , как и для изомонодромных решений ($Q = 0$), функции Йоста автомодельны (зависят только от переменной γ), так как определяются одинаковым типом сингулярности $q = (-i\alpha + Q) \exp(-i\varphi)/4r$ ($r \rightarrow 0$). Почти полностью получить вид функции $m(\lambda)$ при больших значениях λ из уравнений обратной задачи. Используя редукцию (25) и деформируя контур из интегрального уравнения (21), можно получить замкнутое интегральное уравнение для полей $m(\gamma)$ ($\gamma > r$). Оно включает интегрирование функций $m(\gamma)$, $m^*(\gamma)$ по переменной γ только в пределах от r до ∞ , и в низшем порядке по переменной r имеет простой вид

$$m(\gamma) = 1 + \frac{\rho + \omega}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{m(\gamma')}{\gamma + \gamma' - i \sin gx} e^{-\frac{\gamma'}{2}} d\gamma'. \quad (29)$$

После замены $m(2\gamma) = \mu(\gamma) \exp[\gamma/2]$ интегральное уравнение для полей $\mu(\gamma)$ имеет симметричное ядро

$$\left(\frac{\rho + \omega}{2\pi i} \right) (\gamma' + \gamma)^{-1} e^{-\frac{\gamma' + \gamma}{2}}.$$

Поскольку функции $K_\nu(\gamma/2)/\sqrt{\gamma}$ являются собственными функциями этого ядра:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\gamma' + \gamma}{2}} \frac{K_\nu(\gamma'/2)}{\sqrt{\gamma'}(\gamma' + \gamma)} d\gamma' = \frac{\pi K_\nu(\gamma/2)}{\sqrt{\gamma} \cos \pi\nu},$$

то удобно использовать преобразование Лебедева–Конторовича [19]

$$\mu(\gamma) = \int_0^\infty K_{it} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \frac{\bar{\mu}(t) dt}{\sqrt{\gamma}}.$$

Тогда непосредственно из интегрального уравнения (29) находим функцию $\bar{\mu}(t) = 2t \operatorname{sh} \pi t / \sqrt{\pi} (\operatorname{ch} \pi t + \cos \pi\nu)$, обратное преобразование которой приводит к соотношению

$$m(\gamma) = e^{\gamma/4} \sqrt{\gamma} K_\nu \left(\frac{\gamma}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (30)$$

где порядок функции Макдональда определяется формулой $\rho + \omega = -2i \cos \pi\nu$. Сравнивая его со значением, полученным из решения прямой задачи, мы получаем важное соотношение

$$\rho + \omega = -2i \sin \left[\frac{\pi(i\alpha - Q)}{4} \right], \quad (31)$$

связывающее параметры данных рассеяния с параметрами асимптотического поведения полей $u(x, y)$ вблизи центра спирального вихря. При $Q = 0$ соотношение (31) совпадает с полученными в работе [17], при $\alpha = 0$ – с результатами работ [10, 11], но при малых

значениях Q , так как в этих работах параметр ω вычислялся некорректно из линейного приближения. Случаю безотражательного потенциала отвечают значения $Q = \pm 4$, $\alpha = 0$, при которых вихри можно описать в аналитическом виде [20].

Отметим, что соотношение (31) можно получить из явного вида функций Йоста прямой задачи. Действительно, с учетом области аналитичности и определения полей $m^{(0)}(\lambda)$ уравнение (21) представимо в виде

$$m^{(0)}(\lambda) - m^{(0)}(\lambda e^{-2\pi i}) = -r^{(0)}(-\lambda) \times \\ \times m^{(0)}(\lambda e^{-\pi i}) e^{k_1(\lambda)x + i k_2(\lambda)y} \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

тогда (31) сразу следует из (30) и формул преобразования функций Бесселя.

Обсудим асимптотику спирального вихря при $r \rightarrow \infty$ в наиболее интересной области $x > 0$. После поворота контура интегрирования на угол φ интеграл в уравнении (20) преобразуется в интеграл по переменной $\tau = \lambda' \exp(i\varphi)$ ($0 < \tau < 1$) и интересующая нас зависимость от r содержится только в множителе $\exp[-(\tau + \tau^{-1})r/2]$. Тогда асимптотика решения уравнения (20) при $r \rightarrow \infty$ вычисляется методом Лапласа и основной вклад дает точка $\tau = 1$. Вычисляя таким образом функцию $m^{(1)}(\lambda)$ и ее значение при $\lambda = 0$, мы находим асимптотическую формулу при $r \rightarrow \infty$ и конечных значениях x для полей u в первом порядке:

$$u \rightarrow u_0 + \frac{\cos(\varphi - u_0/2)}{\cos \varphi} e^{-r} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left[\rho - i\omega \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (32)$$

где $u_0 = 4 \arctg[\exp(-y)]$. Отсюда следует, что в этом порядке на больших расстояниях солитон деформируется и центр солитона ($u = \pi$) не сдвигается. Аналогичным образом можно найти громоздкую формулу для полей во втором порядке и показать, что при $\alpha > 0$ центр солитона сдвигается на величину

$$\Delta y = \frac{\sin(\pi\alpha/4)e^{-r}}{\sqrt{\pi}r^{3/2}} + O(e^{-2r}).$$

3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ТОДЫ

Эллиптическая цепочка Тоды

$$-Q_{n,xx} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad (33)$$

описывает деформацию в анизотропных кристаллах в случае, если взаимодействие между цепочками атомов (индекс n) нелинейно и континуальное приближение не применимо. Уравнение (33) допускает представление Лакса

$$(L\varphi)_n \equiv i[a_{n-1}\varphi_{n-1} + a_n\varphi_{n+1}] + b_n\varphi_n = \lambda\varphi_n, \quad (34)$$

$$\frac{d\varphi_n}{dx} = i[a_{n-1}\varphi_{n-1} - a_n\varphi_{n+1}]. \quad (35)$$

Здесь введены обозначения

$$b_n = \frac{1}{2}Q_{n,x}, \quad a_n = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(Q_{n+1}-Q_n)},$$

в терминах которых уравнение (33) имеет простой вид

$$a_{n,x} = a_n(b_n - b_{n-1}), \quad b_{n,x} = 2(a_n^2 - a_{n-1}^2). \quad (36)$$

Мы обсудим краевую задачу Дирихле для уравнений (36) с периодическими граничными условиями по дискретному индексу

$$a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad (37)$$

краевыми условиями по переменной x ($0 < x < \infty$)

$$Q_n \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (38)$$

и заданными смещениями g_n на границе $x = 0$

$$Q_n(x)|_{x=0} = g_n. \quad (39)$$

Процедура решения краевой задачи (36)–(39) состоит в следующем.

Прежде всего, используя граничные условия (37), мы отобразим потенциалы a_n, b_n в данные рассеяния: спектр и дополнительный спектр оператора L . С этой целью согласно [21] вводятся два фундаментальных решения $S(n), C(n)$ уравнения (34) с граничными условиями $C(0) = S(1) = 1, C(1) = S(0) = 0$. Тогда след $\Lambda(\lambda) = C(N) + S(N+1)$ матрицы монодромии является интегралом движения ($d\Lambda/dx = 0$) системы (35). Дополнительный спектр $\mu_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) определим корнями функций $C(h, \lambda|k), C(N+1, \lambda|k)|_{\lambda=\mu_i(k)} = 0$. Здесь $C(h, \lambda|k)$ – решения уравнения (34) (в котором сделана замена $a_n \rightarrow a_{n+k}, b_n \rightarrow b_{n+k}$) с граничными условиями $C(0, \lambda|k) = 1, C(1, \lambda|k) = 0$. Эволюция переменных μ_k согласно (35) имеет вид

$$\mu_{k,x} = \left(\frac{i}{2}\right)^N \frac{\pm 2\sqrt{\Delta^2(\mu_k) - 4}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j)}. \quad (40)$$

Далее с помощью граничных условий при $x \rightarrow \infty$ мы находим функцию $\Lambda(\lambda) = z^N + z^{-N}$, где $\lambda = (i/2)(z + z^{-1})$, и, следовательно, спектр $z_k = \exp(i\pi k/N)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, оператора L . Отметим, что этот оператор не определен при $x = 0$ и традиционный метод прямой и обратной задачи не применим. В нашем случае при $x = 0$ необходимо решить смешанную задачу: по известной функции $\Lambda(\lambda)$ и потенциалам $a_n(x)|_{x=0} = g_n$ найти другие потенциалы $b_n(x)|_{x=0}$ и дополнительный спектр $\mu_k(x)|_{x=0}$.

Примечательно, что явный вид дискриминанта Хилла определяет численные значения интегралов движения. Так при $N = 3$ мы находим следующие значения интегралов движения:

$$\begin{aligned} I_1 &= b_1 b_2 + b_3 = 0, \\ I_2 &= b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{3}{4}, \\ I_3 &= b_1 b_2 b_3 + b_1 a_2^2 + b_2 a_3^2 + b_3 a_1^2 = 0, \end{aligned}$$

и решение краевой задачи в этом случае, в отличие от задач классической механики, есть решение системы (36) с заданными значениями интегралов движения и обобщенными координатами $a_n(x)|_{x=0}$.

Найдем сначала общее решение задачи. Несложные вычисления показывают, что функции Блоха $\varphi^\pm(x, n)$ ($\varphi^\pm(n+N) = z^{\pm N} \varphi^\pm(n)$) мероморфны в плоскости комплексной переменной z ($\lambda = (i/2)(z + z^{-1})$) и имеют следующий вид:

$$\varphi^\pm(k+1, z) = z^{\pm k} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\frac{z - \nu_i^{\pm 1}(k)}{z - \nu_i^{\mp 1}(k)} \right) e^{\pm \left(\frac{Q_{k+1} - Q_1}{2} \right)},$$

где $\nu_i = \nu_i(k=0)$ и $\mu_k = (i/2)(\nu_k + \nu_k^{-1})$. Наконец, используя соотношения между $\nu_i(k)$ и ν_i [21]

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{\nu_i}^{\nu_i(k)} \omega_l(z) dz = \int_{z_l^{-1}}^{z_l} \left(\chi^+(k) - \frac{k}{z} \right) dz = -2k \ln z_l$$

и

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\nu_0}^{\nu_i(k)} \omega_l(\nu) d\nu = i,$$

где

$$\omega_l(z) = (z - z_l)^{-1} (z - z_l^{-1})^{-1}, \quad \chi(k) = \frac{d}{dz} \ln \varphi^+(k+1),$$

мы находим зависимость от x симметризованных функций от $\nu_i(k)$ в явном виде:

$$\prod_{i=1}^{N-1} \frac{\nu_i(k) - z_l}{\nu_i(k) - z_l^{-1}} = z^{-2k} e^{2t_l x} C_l, \quad l = 1, 2, \dots, N-1, \quad t_l = \frac{i}{2}(z_l - z_l^{-1}).$$

Здесь выполняются редукции $C_l = C_{N-l}^*$ и $\nu_i^* = -\nu_{N-i}$.

В результате общее решение системы (36) с краевыми условиями (37), (38) имеет простой вид

$$e^{Q_k} = \frac{D(k-1)}{D(k)}, \quad (41)$$

где $D(k) = \det A$ и элементы квадратной $((N-1) \times (N-1))$ -матрицы A

$$A_{ls}(k) = (-z_l)^{s-1} e^{-t_l x} - (-z_{l-1})^{-s+1} (z_l)^{-2k} C_l e^{t_l x}$$

зависят от постоянных C_l .

Таким образом, решение краевой задачи (36)–(39) редуцируется в решение системы нелинейных алгебраических уравнений

$$e^{g_k} = \frac{D(k-1)}{D(k)} \Big|_{x=0}, \quad (42)$$

определяющих постоянные C_l через заданные переменные g_n . Детерминанты, входящие в формулу (42), являются аналогами тэта-функций [22] и линейны по любой постоянной $C_{lk} = z_l^{-2k} C_l(z_l)|_{z_l = \exp[i\pi l/N]}$:

$$\begin{aligned} D(k)(-1)^{N-1} = & W(z_1, z_2, \dots, z_{N-1}) - \sum_i C_{ik} W(z_1, z_2, \dots, z_i^{-1}, \dots, z_{N-1}) + \\ & + \sum_{i < j} C_{ik} C_{jk} W(z_1, z_2, \dots, z_i^{-1}, \dots, z_j^{-1}, \dots, z_{N-1}) - \\ & - \sum_{i < j < l} C_{ik} C_{jk} C_{lk} W(z_1, z_2, \dots, z_i^{-1}, \dots, z_j^{-1}, \dots, z_l^{-1}, \dots, z_{N-1}) - \dots, \end{aligned}$$

где W – определитель Вандермонда. Мы нашли, что при $N = 3$ постоянные $C_1, C_2 = C_1^*$ определяются уравнением четвертого порядка. При $N = 4$ соответствующая система уравнений редуцируется в нелинейные уравнения по каждой переменной $C_1, C_2, C_3 = C_1^*$, степень которых выше пятой. Численные расчеты показывают, что эти уравнения не имеют кратных корней, поэтому, за исключением специальных случаев, явное решение уравнений (42) возможно только в терминах тэта-констант (см. в [22] Х. Умемура “Решение алгебраических уравнений с помощью тэта-констант”).

Итак, мы показали, что решение краевой задачи совместно с методом обратной задачи рассеяния и редуцируется в решение системы алгебраических уравнений. Их эффективная “линеаризация” будет обсуждаться нами в другой работе. В заключение заметим, что в терминах тэта-функций возможно получить общее решение и для ограниченной эллиптической решетки Тоды ($0 < x < l$). В этом случае краевая задача при заданных смещениях $Q_n(x)|_{x=0}, Q_n(x)|_{x=l}$ редуцируется в нетривиальную задачу определения параметров тэта-функций.

Благодарности. Автор глубоко признателен В. В. Дякину за интерес к работе и консультации по интегральным уравнениям и С. А. Зыкову за помощь в проведении численных расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 97-01-00431).

Список литературы

- [1] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М: Мир, 1987.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [3] A. S. Fokas. Physica D. 1989. V. 35. P. 167.
- [4] E. K. Sklyanin. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375.
- [5] А. С. Фокас, А. Р. Итс. ТМФ. 1992. Т. 92. № 3. С. 387.

- [6] *R. F. Bikbaev, V. O. Tarasov.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 2507.
- [7] *И. Т. Хабибуллин.* ТМФ. 1992. Т. 91. № 3. С. 363.
- [8] *Е. С. Гутцабаи, В. Д. Липовский.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 180. С. 53.
- [9] *D. J. Kaup.* Two new aspects of the inverse scattering transform: (1) the elliptic sinh-Gordon equation, and (2) growing solitons. In: Nonlinear World. Proceed. 4th Intern. Wookshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Kiev, 1989). V. 1. Ed. V.G. Bar'yakhtar. River Edge, NJ: World Scientific, 1990. P. 139.
- [10] *A. B. Borisov, S. N. Ionov, A. G. Shagalov.* New types of vortices and the solutions of the boundary value problem for the sine-Gordon equation by the inverse scattering transform. In: Nonlinear World. Proceed. 4th Intern. Wookshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Kiev, 1989). V. 1. Ed. V. G. Bar'yakhtar. River Edge, NJ: World Scientific, 1990. P. 65.
- [11] *A. B. Borisov.* Phys. Lett. A. 1990. V. 143. № 1. P. 52.
- [12] *M. D. Einhorn, R. Savit, E. A. Rabinovich.* Nucl. Phys. 1980. V. 170. P. 16.
- [13] *A. B. Borisov, V. V. Kiseliev.* Physica D. 1995. V. 87. P. 64.
- [14] *A. B. Borisov, S. N. Ionov, A. G. Shagalov.* Vortices, strings and the solutions of the boundary value problem by the inverse scattering transform. In: Proceed. NEED's 92. Eds. V.G. Makhn'kov, F. Calogero. Singapore: World Scientific, 1992. P. 67.
- [15] *A. G. Shagalov.* Phys. Lett. A. 1992. V. 165. P. 412.
- [16] *A. R. Its, V. Yu. Novokshenov.* The Isomonodromic Deformation in the Theory of the Painleve' Equations. Lecture Notes in Mathematics. V. 1191. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1986.
- [17] *В. Ю. Новокшенов, А. Г. Шагалов.* ТМФ. 1997. Т. 111. С. 15.
- [18] *Ю. И. Ялышев.* Частное сообщение, 1994.
- [19] *В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов.* ТМФ. 1982. Т. 53. С. 163.
- [20] *В. А. Диткин, А. П. Прудников.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
- [21] *М. Toda.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [22] *Д. Мамфорд.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 22.XII.1999 г.