Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Пеллони, Спектральный анализ эллиптического уравнения синус-Гордон в квадранте, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 189–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:51:15

© 2009 г.

Б. Пеллони*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН В КВАДРАНТЕ

С помощью метода спектрального преобразования исследуется эллиптическое уравнение синус-Гордон в четверти плоскости. Определяется задача Римана–Гильберта, которая связана с корректно поставленными краевыми задачами для этой области; эта задача в дальнейшем используется при построении формального представления для решения. Анализ основан на обобщении стандартного метода обратной задачи рассеяния, недавно введенном Фокасом при исследовании линейной эллиптической задачи.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение синус-Гордон, нелинейная краевая задача, задача Римана–Гильберта.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптическое уравнение синус-Гордон представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) вида

$$q_{xx} + q_{yy} = \sin q, \quad q = q(x, y). \quad (1.1)$$

Это уравнение возникает, например, в теории эффекта Джозефсона, в сверхпроводниках, в спиновых волнах в ферромагнетиках [1]. С точки зрения строгой математики эллиптическое уравнение синус-Гордон является примером *интегрируемого* ДУЧП, по крайней мере в смысле того, что оно допускает формулировку в терминах пары Лакса. Отсюда, в свою очередь, следует, что для его анализа можно применять методы, разработанные для так называемой обратной задачи рассеяния. В самом деле, анализ этого интегрируемого уравнения, основанный на методе обратной задачи рассеяния, был проведен в работе [2] для задачи на плоскости $\mathbb{R}^2$ с предписанным периодическим поведением решения на бесконечности, а в работе [1] – для задачи на полуплоскости $y \geq 0$, когда граничные условия подчинены некоторым нелинейным соотношениям. Ввиду ограниченных возможностей метода обратной задачи рассеяния при решении краевых задач в этих работах не удалось эффективно построить решение. Отдельные точные решения уравнения синус-Гордон на всей

*Department of Mathematics, University of Reading, Reading, UK.
E-mail: b.pelloni@reading.ac.uk

плоскости $\mathbb{R}^2$ были найдены в ряде работ в 80-х г.г. (см. литературу в работе [1]), но более реалистичный вариант краевой задачи для этого уравнения пока остается открытым.

В настоящей работе применяется обобщение метода обратной задачи рассеяния на случай краевых задач, предложенное Фокасом [3], [4]. Оно основано на одновременном решении обоих ДУЧП в представлении пар Лакса и на исследовании соотношения, которому подчиняются все граничные условия. Это соотношение Фокас предложил называть *общим соотношением*. Из него вытекает алгоритмический метод построения представления для решения в случае, когда данные граничные условия оказываются *допустимыми* в том смысле, что они тождественно удовлетворяют общему соотношению. Заметим, что результат работы [1] оказывается частным случаем, когда предполагается, что имеют место допустимые граничные условия, а потому этот случай содержится в нашем общем подходе.

Мы даем описание общего подхода и характеризуем решение в случае допустимых граничных условий. Для иллюстрации нашего метода мы рассматриваем частный случай, когда задача ставится в первом квадранте $x \geq 0, y \geq 0$. С помощью этого метода также представляется возможным исследовать в явном виде отдельные задачи, отвечающие ситуации, в которой граничные условия оказываются *линеаризуемыми* (см. статьи [5], [6]). Методы исследования этих, равно как и более сложных случаев, отвечающих граничным условиям общего вида, находятся в стадии разработки.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы используем следующие обозначения. Для произвольной (2×2) -матрицы M положим $\widehat{\sigma_3}M = [\sigma_3, M]$, $e^{\sigma_3}M = e^{\sigma_3}Me^{-\sigma_3}$, где σ_i – стандартные матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет смысл *спектрального параметра*; введем функции

$$w_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad w_2(\lambda) = \frac{1}{2i} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Будем писать

$$\lambda \in (i) \quad \text{или} \quad \lambda \in (ij), \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

если параметр λ лежит в i -м квадранте комплексной плоскости переменной λ или в объединении i -го и j -го квадрантов соответственно. Для (2×2) -матрицы $M(\lambda)$ обозначение $\lambda \in ((i), (j))$ подразумевает, что $\lambda \in (i)$ для первого столбца матрицы и $\lambda \in (j)$ для второго столбца матрицы. Элементы матрицы M являются ограниченными функциями.

Приведем теперь определение допустимых граничных условий. Пусть $d_1(y), u_1(y), d_2(x), u_2(x)$ – гладкие функции, заданные на $[0, \infty)$, убывающие на бесконечности и совместимые в угловой точке $(x, y) = (0, 0)$, т.е. $d_1(0) = d_2(0)$, $d'_1(0) = u_2(0)$,

$d'_2(0) = u_1(0)$. Зададим вектор-столбцы $(a_0(\lambda), b_0(\lambda))^T$, $(a_1(\lambda), b_1(\lambda))^T$ равенствами

$$\begin{pmatrix} a_0(\lambda) \\ b_0(\lambda) \end{pmatrix} = \psi_3(0, \lambda), \quad \lambda \in (12), \quad \begin{pmatrix} a_1(\lambda) \\ b_1(\lambda) \end{pmatrix} = \psi_1(0, \lambda), \quad \lambda \in (14), \quad (2.1)$$

в которых ψ_1 , ψ_3 – единственные решения системы

$$\begin{aligned} \psi_1(y, \lambda)_y + w_1(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi_1(y, \lambda) &= iQ_0(0, y, -\lambda)\psi_1(y, \lambda), \\ \psi_3(x, \lambda)_x + w_2(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi_3(x, \lambda) &= Q_0(x, 0, \lambda)\psi_3(x, \lambda), \end{aligned}$$

удовлетворяющие условиям

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \psi_1(y, \lambda) \rightarrow (1, 0)^T, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_3(x, \lambda) \rightarrow (1, 0)^T,$$

где

$$Q_0(x, 0, \lambda) = \frac{id'_2(x) + u_2(x)}{2} \sigma_1 - \frac{i}{4\lambda} \sin d_2(x) \cdot \sigma_2 + \frac{i}{4\lambda} (1 - \cos d_2(x)) \sigma_3, \quad (2.2)$$

$$Q_0(0, y, \lambda) = \frac{i u_1(y) + d'_1(y)}{2} \sigma_1 - \frac{i}{4\lambda} \sin d_1(y) \cdot \sigma_2 + \frac{i}{4\lambda} (1 - \cos d_1(y)) \sigma_3. \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор функций $\{d_1(y), u_1(y), d_2(x), u_2(x)\}$ называется *допустимым*, если

$$a_0(\lambda) \equiv a_1(\lambda), \quad b_0(\lambda) \equiv b_1(\lambda), \quad \lambda \in (1).$$

Сформулируем теперь основную теорему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для эллиптического уравнения синус-Гордон в первом квадранте

$$q_{xx} + q_{yy} = \sin q, \quad q = q(x, y), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (2.4)$$

$$q(0, y) = d_1(y), \quad q(x, 0) = d_2(x), \quad d_1(0) = d_2(0), \quad (2.5)$$

где функции d_1 , d_2 лежат в классе функций Шварца. Предположим, что существуют две функции $u_1(y)$, $u_2(x)$ такие, что набор условий $\{d_1(y), u_1(y), d_2(x), u_2(x)\}$ допустим в смысле определения 1. Предположим также, что $a(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in (1)$.

Рассмотрим комплексную переменную $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, и зададим $\Psi(z, \bar{z}, \lambda)$ как решение следующей задачи Римана–Гильберта (см. рис. 1):

$$\Psi_-(z, \bar{z}, \lambda) = \Psi_+(z, \bar{z}, \lambda) J(z, \bar{z}, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}, \quad (2.6)$$

где

$$J(z, \bar{z}, \lambda) = J^\alpha(z, \bar{z}, \lambda), \quad \text{если} \quad \arg \lambda = \alpha, \quad \alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} J^0 &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\bar{b}_0}{a_0} e^{i\theta(z)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & J^{\pi/2} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\bar{b}_1}{a_0} e^{i\theta(z)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ J^\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b_0}{a_1} e^{-i\theta(z)} & 1 \end{pmatrix}, & J^{3\pi/2} &= J_\pi^{-1} J_0 J_{\pi/2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рис. 1. Задача Римана-Гильберта.

a функции $a_0(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, $b_0(\lambda)$, $b_1(\lambda)$ задаются формулами (2.1), $\bar{a}_0 = \overline{a_0(\lambda)}$, $\bar{b}_{0,1} = \overline{b_{0,1}(\bar{\lambda})}$,

$$\theta(z) = \frac{1}{2} \left[\lambda z - \frac{\bar{z}}{\lambda} \right]. \quad (2.9)$$

Тогда функция $q(x, y)$, определяемая соотношением

$$\cos q(z, \bar{z}) = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{\Gamma_-} (\Psi_+)_{12} \frac{b(\lambda)}{a(-\lambda)} e^{-\frac{i}{2}(\lambda z - \frac{\bar{z}}{\lambda})} d\lambda, \quad (2.10)$$

где $\Gamma_- = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}^-$, $b(\lambda) = b_0(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}^-$, $b(\lambda) = b_1(\lambda)$ при $\lambda \in i\mathbb{R}^-$, $a(-\lambda) = a_0(-\lambda) = a_1(-\lambda)$ при $\lambda \in (3)$, удовлетворяет уравнению $q_{xx} + q_{yy} = \sin q$ и граничным условиям

$$q(0, y) = d_1(y), \quad q_x(0, y) = u_1(y), \quad q(x, 0) = d_2(x), \quad q_y(x, 0) = u_2(x).$$

Данное утверждение можно доказать аналогично теореме 3.1 в работе [5], как только определена соответствующая задача Римана-Гильберта. В настоящей работе приводится построение такой задачи Римана-Гильберта и в терминах ее решения определяется функция $q(x, y)$, являющаяся решением задачи Дирихле для эллиптического уравнения синус-Гордон.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА: МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В пределе малых q уравнение (1.1) линеаризуется и переходит в модифицированное уравнение Гельмгольца

$$q_{xx} + q_{yy} = q, \quad q = q(x, y). \quad (3.1)$$

Это уравнение было всесторонне исследовано с помощью метода спектрального преобразования, предложенного Фокасом, в работах [3], [7], [8]. В терминах переменных

$z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ можно переписать (3.1) в виде $4q_{z\bar{z}} = q$ или, что эквивалентно, в виде $\mu_{z\bar{z}} = \mu_{\bar{z}z}$, где μ удовлетворяет уравнениям пары Лакса

$$\mu_z - \frac{i\lambda}{2} \mu = 2q_z, \quad \mu_{\bar{z}} + \frac{i}{2\lambda} \mu = \frac{i}{\lambda} q. \quad (3.2)$$

Заметим, что данная функция μ также удовлетворяет соотношению

$$\mu \sim O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Задача Дирихле в квадранте. Рассмотрим модифицированную задачу Гельмгольца (3.1) в квадранте $x \geq 0$, $y \geq 0$ с заданными граничными условиями Дирихле

$$q(0, y) = d_1(y), \quad q(x, 0) = d_2(x), \quad (3.3)$$

предположив, что решение является достаточно гладким, убывает на бесконечности и граничные условия совместны в точке $x = y = 0$. Производя спектральный анализ пары Лакса (3.2), можно доказать следующее утверждение [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Решение уравнения (3.1) в первом квадранте с граничными условиями Дирихле (3.3) допускает интегральное представление*

$$q(z, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{i\mathbb{R}^+} e^{\frac{i}{2}(\lambda z - \frac{\bar{z}}{\lambda})} \hat{q}_1(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + \int_{\mathbb{R}^+} e^{\frac{i}{2}(\lambda z - \frac{\bar{z}}{\lambda})} \hat{q}_2(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \right], \quad (3.4)$$

где спектральные функции $\hat{q}_j(\lambda)$ задаются равенствами

$$\hat{q}_1(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) D_1(\lambda) - \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) D_2(i\lambda), \quad \lambda \in i\mathbb{R}^+,$$

$$\hat{q}_2(\lambda) = i \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) D_2(-i\lambda) - \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) D_2(i\lambda) - \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) D_1(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

с

$$D_j(\lambda) = \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})s} d_j(s) ds, \quad j = 1, 2. \quad (3.5)$$

Переопределение функций $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ через функции $d_1(y)$, $d_2(x)$ в этой задаче имеет смысл перехода от граничных условий Дирихле к граничным условиям Неймана. Это переопределение основано на применении общего соотношения, получаемого на основе спектрального анализа для пары Лакса и на инвариантности системы относительно преобразований $\lambda \rightarrow \pm 1/\lambda$. Для этой задачи общее соотношение проявляется в виде следующего явного алгебраического ограничения на функции $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$:

$$\hat{q}_1(\lambda) + \hat{q}_2(\lambda) = 0, \quad \pi \leq \arg \lambda \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (3.6)$$

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА

Пара Лакса для нелинейной задачи. Запишем эллиптическое уравнение синус-Гордон (1.1) через переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ в виде $q_{z\bar{z}} = (\sin q)/4$. Это уравнение представляет собой уравнение совместности для следующей пары обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Psi_z - \frac{i\lambda}{4} [\sigma_3, \Psi] = Q\Psi, \quad (4.1)$$

$$\Psi_{\bar{z}} + \frac{i}{4\lambda} [\sigma_3, \Psi] = \frac{1}{\lambda} \tilde{Q}\Psi, \quad (4.2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Psi = \Psi(z, \bar{z}, \lambda)$ – несингулярная (2×2) -матрица, а матрицы Q и $\tilde{Q}$ задаются формулами

$$\begin{aligned} Q(z, \bar{z}) &= \frac{iq_z(z, \bar{z})}{2} \sigma_1, \\ \tilde{Q}(z, \bar{z}) &= \frac{i}{4} (1 - \cos q(z, \bar{z})) \sigma_3 - \frac{i}{4} \sin q(z, \bar{z}) \cdot \sigma_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эта пара Лакса, переходящая в (3.2) в линейном пределе, похожа, но не идентична паре Лакса, применявшейся в работах [1], [2].

Решение системы (4.1), (4.2) удовлетворяет условию:

$$\Psi(z, \bar{z}, \lambda) = I + \frac{\psi_1(z, \bar{z})}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

В терминах переменных x, y (функция $\Psi(x, y)$ обозначается тем же символом, что и функция, зависящая от переменных $(z, \bar{z})$) имеем

$$\begin{aligned} \Psi_x + \frac{w_2(\lambda)}{2} [\sigma_3, \Psi] &= Q_0(x, y, \lambda) \Psi, \\ \Psi_y + \frac{w_1(\lambda)}{2} [\sigma_3, \Psi] &= iQ_0(x, y, -\lambda) \Psi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} Q_0(x, y, \lambda) &= Q(x, y) + \frac{1}{\lambda} \tilde{Q}(x, y) = \\ &= \frac{i(q_x - iq_y)}{4} \sigma_1 + \frac{i}{4\lambda} (1 - \cos q) \sigma_3 - \frac{i}{4\lambda} \sin q \cdot \sigma_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

и q, q_x, q_y рассматриваются как функции от переменных x, y . Заметим, что эта пара Лакса обладает той же зависимостью от λ в правой части, что и пара Лакса для гиперболического уравнения синус-Гордон. В дальнейшем мы будем в некоторых местах писать $Q_0(\lambda)$ вместо $Q_0(x, y, \lambda)$.

Матрицы (4.3) и (4.6) удовлетворяют следующим двум условиям: $\text{Tr } Q = \text{Tr } \tilde{Q} = 0$; $\det(w_1(\lambda)\sigma_3/2 - iQ_0(-\lambda))$ зависит от переменной λ только через функцию $w_1(\lambda)$; $\det(w_2(\lambda)\sigma_3/2 - Q_0(\lambda))$ зависит от переменной λ только через $w_2(\lambda)$. Последнее из этих условий оказывается основным для характеристики линейризуемых граничных условий.

Граничная задача в квадранте. Рассмотрим эллиптическое уравнение синус-Гордон при $(z, \bar{z})$, лежащих в заданном выпуклом многоугольнике $\mathcal{P}$.

Пара Лакса уравнений (4.1), (4.2) эквивалентна одному уравнению

$$d\left(e^{(-\frac{i\lambda}{4}z + \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3}\Psi(z, \bar{z}, \lambda)\right) = W(z, \bar{z}, \lambda), \quad (4.7)$$

где W – точная 1-форма, задаваемая формулой

$$W(z, \bar{z}, \lambda) = e^{(-\frac{i\lambda}{4}z + \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} \left(Q\Psi dz + \frac{1}{\lambda}\tilde{Q}\Psi d\bar{z} \right). \quad (4.8)$$

Из этих соотношений немедленно следует, что решения уравнений (4.1), (4.2) должны иметь вид

$$\Psi(z, \bar{z}, \lambda) = I + \int_{z^*}^z e^{(\frac{i\lambda}{4}z - \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} W(\zeta, \bar{\zeta}, \lambda) d\zeta,$$

где z^* – произвольная точка, принадлежащая внутренности многоугольника. В дополнение, используя свойство выпуклости многоугольника, получим, что форма W замкнута, следовательно,

$$\int_{\partial\mathcal{P}} W(z, \bar{z}, \lambda) dz = 0. \quad (4.9)$$

Это интегральное тождество и есть *общее соотношение*.

Ограничимся теперь случаем, когда граничная задача задана в квадранте $x > 0$, $y > 0$, а потому $\mathcal{P} = \mathcal{I}$ – первый квадрант в комплексной плоскости переменной z . В этом случае углы многоугольника имеют вид $z_1 = 0 + i\infty$, $z_2 = 0$, $z_3 = \infty + i0$. Отталкиваясь от анализа линейной задачи, будем считать z_j вершинами многоугольника и зададим частные решения, получаемые при $z^* = z_j$, $j = 1, 2, 3$, а именно положим

$$\Psi_j = I + \int_{z_j}^z e^{\frac{i}{4}[\lambda(z-\zeta) - \frac{1}{\lambda}(\bar{z}-\bar{\zeta})]\widehat{\sigma}_3} \left(Q\Psi d\zeta + \frac{1}{\lambda}\tilde{Q}\Psi d\bar{\zeta} \right). \quad (4.10)$$

Функция Ψ_j представляет собой единственное решение уравнения (4.8) такое, что $\Psi_j(z_j) = I$.

Найдем, при каких условиях каждое решение является ограниченной аналитической функцией. Ограниченность экспоненциальных членов, участвующих в определении Ψ_j , очевидно, зависит от положения параметра λ на комплексной плоскости. Заметим, что

$$R_j = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{4} \left[\lambda(z - \zeta) - \frac{1}{\lambda}(\bar{z} - \bar{\zeta}) \right] \right) = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \operatorname{Im}(\lambda(z - \zeta)),$$

а потому можно произвести явные вычисления в секторе $\bar{\Sigma}_j$, в котором e^{R_j} ограничена (при $\lambda \rightarrow \infty$ и при $\lambda \rightarrow 0$). Также обозначим через $\bar{\Sigma}_j$ “сопряженные” секторы, в которых функция $-R_j$ ограничена. Секторы Σ_j , $j = 1, 2, 3$, задаются следующими

явными формулами:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{CP}^1 : \arg \lambda \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}, & \overline{\Sigma}_1 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{CP}^1 : \arg \lambda \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \\ \Sigma_2 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{CP}^1 : \arg \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}, & \overline{\Sigma}_2 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{CP}^1 : \arg \lambda \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}, \\ \Sigma_3 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{CP}^1 : \arg \lambda \in [\pi, 2\pi] \right\}, & \overline{\Sigma}_3 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{CP}^1 : \arg \lambda \in [0, \pi] \right\}.\end{aligned}$$

Эти секторы покрывают всю комплексную плоскость, кроме того, $\Sigma_1 \cap \Sigma_3 = (3)$ и $\overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_3 = (1)$.

В силу определения величин $\widehat{\sigma}_3$ и $e^{A\widehat{\sigma}_3}$ зависимость от переменных z и ζ для каждого решения Ψ_j имеет вид

$$\Psi_j = \begin{pmatrix} * & *e^{i\theta(z-\zeta)} \\ *e^{-i\theta(z-\zeta)} & * \end{pmatrix},$$

где $*$ обозначает функции, зависящие только от λ , а $\theta(z)$ задается формулой (2.9). Таким образом, элементы в первом столбце матрицы Ψ_j ограничены при $\lambda \in \overline{\Sigma}_j$, а элементы во втором столбце ограничены при $\lambda \in \Sigma_j$. Применяя обозначения $\Psi = (\Psi^{(\cdot)}, \Psi^{(\cdot)})$ для (2×2) -матрицы и составляющих ее вектор-столбцов, получим

$$\Psi_1 = (\Psi_1^{(14)}, \Psi_1^{(23)}), \quad \Psi_2 = (\Psi_2^{(3)}, \Psi_2^{(1)}), \quad \Psi_3 = (\Psi_3^{(12)}, \Psi_3^{(34)}),$$

где верхний индекс указывает область, в которой задан каждый вектор-столбец (как функция от λ). В силу следового тождества $\operatorname{tr} Q = \operatorname{tr} \tilde{Q} = 0$ каждое решение этой пары Лакса имеет определитель, равный единице, а потому обратимо.

Таким образом, любые два решения системы (4.1), (4.2) связаны соотношением

$$\Psi^{-1} \tilde{\Psi} = e^{(\frac{i\lambda}{4}z - \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} \rho(\lambda).$$

Так как по определению $\Psi_2(0, 0, \lambda) = I$, можно записать

$$\Psi_3(z, \bar{z}, \lambda) = \Psi_2(z, \bar{z}, \lambda) e^{(\frac{i\lambda}{4}z - \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} \Psi_3(0, 0, \lambda), \quad \lambda \in (\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+), \quad (4.11)$$

$$\Psi_1(z, \bar{z}, \lambda) = \Psi_2(z, \bar{z}, \lambda) e^{(\frac{i\lambda}{4}z - \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} \Psi_1(0, 0, \lambda), \quad \lambda \in (i\mathbb{R}^-, i\mathbb{R}^+), \quad (4.12)$$

равно как и

$$\begin{aligned}\Psi_3(z, \bar{z}, \lambda) &= \Psi_1(z, \bar{z}, \lambda) e^{(\frac{i\lambda}{4}z - \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} \Psi_1^{-1}(0, 0, \lambda) \Psi_3(0, 0, \lambda), \\ \lambda &\in ((1), (3)).\end{aligned} \quad (4.13)$$

Заметим, в частности, что последнее условие выполнено для всех вектор-столбцов не только в окрестности полупрямых, но и во всем квадранте в плоскости переменной λ .

Общее соотношение и спектральные функции. Как и в общем случае (4.9), интеграл от точной дифференциальной формы $W(z, \bar{z}, \lambda)$, определяемой формулой (4.8), вдоль границы области $\mathcal{I}$ обращается в нуль:

$$\int_{\partial \mathcal{I}} e^{(-\frac{i\lambda}{4}z + \frac{i}{4\lambda}\bar{z})\widehat{\sigma}_3} \left(Q \Psi dz + \frac{1}{\lambda} \tilde{Q} \Psi d\bar{z} \right) = 0.$$

Вычисляя этот интеграл явно (в предположении, что $q, q_z, q_{\bar{z}}$ убывают при $|z| \rightarrow \infty$), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{i}{4}(\lambda - \frac{1}{\lambda})x\widehat{\sigma}_3} \left(Q + \frac{1}{\lambda} \widetilde{Q} \right) \Psi(x, x, \lambda) dx - \\ & - i \int_0^\infty e^{\frac{i}{4}(\lambda + \frac{1}{\lambda})y\widehat{\sigma}_3} \left(Q - \frac{1}{\lambda} \widetilde{Q} \right) \Psi(iy, -iy, \lambda) dy = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Это общее соотношение, в частности, справедливо при $\Psi = \Psi_3$. В этом случае по определению первый интеграл в левой части имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-\frac{i}{4}(\lambda - \frac{1}{\lambda})x\widehat{\sigma}_3} \left(Q + \frac{1}{\lambda} \widetilde{Q} \right) \Psi_3(x, x, \lambda) dx = I - \Psi_3(0, 0, \lambda).$$

Второй интеграл можно вычислить, если вспомнить, что мы имеем, применяя (4.13),

$$\begin{aligned} & i \int_0^\infty e^{\frac{i}{4}(\lambda + \frac{1}{\lambda})y\widehat{\sigma}_3} \left(Q - \frac{1}{\lambda} \widetilde{Q} \right) \Psi_3(iy, -iy, \lambda) dy = \\ & = i \int_0^\infty e^{\frac{i}{4}(\lambda + \frac{1}{\lambda})y\widehat{\sigma}_3} \left(Q - \frac{1}{\lambda} \widetilde{Q} \right) \Psi_1(iy, -iy, \lambda) dy \cdot \Psi_1^{-1}(0, 0, \lambda) \Psi_3(0, 0, \lambda) = \\ & = (\Psi_1(0, 0, \lambda) - I) \Psi_1^{-1}(0, 0, \lambda) \Psi_3(0, 0, \lambda) = \Psi_3(0, 0, \lambda) - \Psi_1^{-1}(0, 0, \lambda) \Psi_3(0, 0, \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае из условия (4.14) следует, что

$$\Psi_1^{-1}(0, 0, \lambda) \Psi_3(0, 0, \lambda) = I, \quad \lambda \in ((1), (3)),$$

и из соотношения (4.13) можно получить, что две собственные функции совпадают в их совместной области определения:

$$\Psi_1(z, \bar{z}, \lambda) = \Psi_3(z, \bar{z}, \lambda), \quad \lambda \in ((1), (3)). \quad (4.15)$$

Дадим теперь следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Спектральные функции $S_0(\lambda)$, $S_1(\lambda)$ – это функции, задающиеся с помощью частных решений Ψ_3 и Ψ_1 следующим образом:*

$$S_0(\lambda) = \Psi_3(0, 0, \lambda), \quad S_1 = \Psi_1(0, 0, \lambda). \quad (4.16)$$

Точнее, спектральные функции S_i определяются с помощью решений интегральных уравнений

$$\Psi_3(x, 0, \lambda) = I - \int_0^\infty e^{-\frac{i}{4}(\lambda - \frac{1}{\lambda})\xi\widehat{\sigma}_3} Q_0(\xi, 0, \lambda) \Psi_3(\xi, 0, \lambda) d\xi, \quad (4.17)$$

$$\Psi_1(0, y, \lambda) = I - \int_0^\infty e^{\frac{i}{4}(\lambda + \frac{1}{\lambda})\eta\widehat{\sigma}_3} i Q_0(0, \eta, -\lambda) \Psi_1(0, \eta, \lambda) d\eta, \quad (4.18)$$

где величина Q_0 определена формулой (4.6). Положив теперь

$$\psi_3(x, \lambda) = \Psi_3(x, 0, \lambda), \quad \psi_1(y, \lambda) = \Psi_1(0, y, \lambda),$$

получим, что $S_0(\lambda) = \psi_3(0, \lambda)$ и $S_1(\lambda) = \psi_1(0, \lambda)$. Эти функции ограничены:

$$S_0(\lambda) = (S_0^{(12)}, S_0^{(34)}), \quad S_1(\lambda) = (S_1^{(14)}, S_1^{(23)}).$$

Общее соотношение теперь можно записать в терминах спектральных функций следующим образом:

$$S_0(\lambda) = S_1(\lambda), \quad \lambda \in ((1), (3)). \quad (4.19)$$

Это следует из тождества (4.15) для Ψ_3 и Ψ_1 в указанных секторах.

Свойства спектральных функций. Из равенства $\text{tr } Q = \text{tr } \tilde{Q} = 0$ получаем

$$\det S_0 = \det S_1 = 1. \quad (4.20)$$

Положим

$$Q_0(z, \bar{z}, \lambda) = Q(z, \bar{z}) + \frac{1}{\lambda} \tilde{Q}(z, \bar{z}) = \frac{iq_z}{2} \sigma_1 - \frac{i}{4\lambda} \sin q \cdot \sigma_2 + \frac{i}{4\lambda} (1 - \cos q) \sigma_3.$$

Для вещественнозначных q получим, что Q_0 удовлетворяет симметричным свойствам

$$Q_0(\lambda)_{22} = Q_0(-\lambda)_{11} = \overline{Q_0(\bar{\lambda})_{11}}, \quad Q_0(\lambda)_{12} = Q_0(-\lambda)_{21} = -\overline{Q_0(\bar{\lambda})_{21}}.$$

Любое решение системы (4.1), (4.2) обладает теми же свойствами симметрий, так что можно считать, что S_0, S_1 задаются как

$$S_0(\lambda) = \begin{pmatrix} a_0(\lambda) & -\overline{b_0(\bar{\lambda})} \\ b_0(\lambda) & \overline{a_0(\bar{\lambda})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(\lambda) & -b_0(-\lambda) \\ b_0(\lambda) & a_0(-\lambda) \end{pmatrix},$$

$$S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & -\overline{b_1(\bar{\lambda})} \\ b_1(\lambda) & \overline{a_1(\bar{\lambda})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & -b_1(-\lambda) \\ b_1(\lambda) & a_1(-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Общее соотношение (4.14) принимает вид

$$a_0(\lambda) = a_1(\lambda), \quad b_0(\lambda) = b_1(\lambda), \quad \lambda \in (1). \quad (4.21)$$

Таким образом, для $\lambda \in (1)$ можно писать $a(\lambda), b(\lambda)$ без нижнего индекса. Аналогично для $\lambda \in (3)$ будем писать $a(-\lambda), b(-\lambda)$.

Задача Римана–Гильберта. Анализируя свойство ограниченности каждой из собственных функций Ψ_i , получим, что в каждом квадранте в плоскости переменной λ среди вектор-столбцов, задающих множество матричнозначных функций Ψ_j , имеются по крайней мере два, которые ограничены и аналитичны в этом квадранте. В первом и третьем квадрантах имеются две собственные функции, которые можно получить соответственно из первого или второго столбца. А именно, сформируем следующие матрицы (см. рис. 2):

$$\left(\left\{ \begin{pmatrix} \Psi_3^{(12)} \\ \Psi_1^{(14)} \end{pmatrix} \right\}, \Psi_2^{(1)} \right), \quad (\Psi_3^{(12)}, \Psi_1^{(23)}),$$

$$\left(\Psi_2^{(3)}, \left\{ \begin{pmatrix} \Psi_3^{(34)} \\ \Psi_1^{(23)} \end{pmatrix} \right\} \right), \quad (\Psi_1^{(14)}, \Psi_3^{(34)}).$$

Рис. 2. Ограниченные собственные функции и задача Римана–Гильберта.

Эти матрицы задают решение прямой задачи. Заметим, что в тех квадрантах, в которых две собственные функции оказываются ограниченными, они на самом деле совпадают. Имеются следующие явные тождества для вектор-столбцов:

$$\begin{aligned}\Psi_3^{(12)}(z, \bar{z}, \lambda) &= \Psi_1^{(14)}(z, \bar{z}, \lambda), & \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0, \\ \Psi_3^{(34)}(z, \bar{z}, \lambda) &= \Psi_1^{(23)}(z, \bar{z}, \lambda), & \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \quad \operatorname{Im} \lambda \leq 0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Уравнения (4.11)–(4.13), которые связывают различные аналитические собственные функции, можно записать в виде, однозначно определяющем задачу Римана–Гильберта со скачками функций на вещественной и мнимой осях. В силу тождеств (4.22) скачки на каждой из четырех полуосей происходят или в первом, или во втором вектор-столбцах.

В самом деле, имеем

$$\Psi_-(z, \bar{z}, \lambda) = \Psi_+(z, \bar{z}, \lambda)J(z, \bar{z}, \lambda), \quad (4.23)$$

где с использованием обозначений $\bar{a}(\lambda) = \overline{a(\bar{\lambda})}$ можно определить матрицы $\Psi_\pm$ и J следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi_+ &= \begin{cases} (\Psi_3^{(12)}, \Psi_2^{(1)}/a(\lambda)), & \arg \lambda \in [0, \pi/2], \\ (\Psi_2^{(3)}/\bar{a}(\lambda), \Psi_3^{(34)}), & \arg \lambda \in [\pi, 3\pi/2], \end{cases} \\ \Psi_- &= \begin{cases} (\Psi_3^{(12)}, \Psi_1^{(2)}), & \arg \lambda \in [\pi/2, \pi], \\ (\Psi_1^{(4)}, \Psi_3^{(34)}), & \arg \lambda \in [3\pi/2, 2\pi], \end{cases}\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$J(z, \bar{z}, \lambda) = J^\alpha(z, \bar{z}, \lambda), \quad \text{если} \quad \arg \lambda = \alpha, \quad \alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},$$

а J^α задаются формулами (2.8). Нормировка здесь такова, что все матрицы J^α имеют определитель, равный единице.

Будем для простоты предполагать, что $a(\lambda) \neq 0$, и тем самым решение не имеет полюсов. Решения с особенностями в виде полюсов можно включить в рассмотрение

с помощью стандартной процедуры (см. работу [3]). Переписав условие скачка, получим

$$\Psi_+ - \Psi_- = \Psi_+ - \Psi_+ J = \Psi_+ (I - J) \Rightarrow \Psi_+ - \Psi_- = \Psi_+ \tilde{J}, \quad (4.25)$$

где $\tilde{J} = I - J$. Эти соотношения вместе с асимптотическим условием (4.4) однозначно задают задачу Римана–Гильберта. Решение этой задачи имеет вид

$$\Psi(z, \bar{z}, \lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi_+(z, \bar{z}, \lambda') \tilde{J}(z, \bar{z}, \lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\psi_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Psi_+(z, \bar{z}, \lambda) \tilde{J}(z, \bar{z}, \lambda) d\lambda, \quad (\psi_1)_{12} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda \Psi_{12}). \quad (4.27)$$

Характеристики $q(z, \bar{z})$. Последним шагом нашей конструкции будет вычисление выражения для q в терминах решения задачи Римана–Гильберта. Применяя условие (4.4) в первом (обыкновенном) дифференциальном уравнении (4.1) пары Лакса, получим, что коэффициент при члене λ^0 имеет вид

$$-\frac{i}{4} [\sigma_3, \psi_1] = i \frac{q_z}{2} \sigma_1 \Rightarrow q_z = -(\psi_1)_{12} = -\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda \Psi_{12}),$$

в то время как, применяя второе уравнение (4.2), получим, что элемент с номером $(1, 1)$ в коэффициенте при члене λ^{-1} имеет вид

$$\cos q(z, \bar{z}) = 1 + 4i \frac{\partial(\psi_1)_{11}}{\partial \bar{z}}.$$

В силу явных выражений для $\tilde{J}$ это приводит к формуле (2.10) для величины $\cos q(x, y)$, что завершает доказательство предложения 1.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формальная процедура, составляющая содержание данной работы, представляет собой первый шаг на пути к построению эффективных решений краевых задач для эллиптического уравнения синус-Гордон (1.1), поставленных в выпуклых многоугольниках. Основными свойствами данной процедуры оказываются, во-первых, одновременное решение обоих обыкновенных дифференциальных уравнений в паре Лакса и, во-вторых, вывод и анализ общего соотношения. В отличие от случая эволюционных ДУЧП типа уравнения синус-Гордон $q_{tt} - q_{xx} = \sin q$, общее соотношение оказывается справедливым в двумерной области комплексной плоскости спектрального параметра, откуда следует, что собственные функции спектральной задачи совпадают в этой области. Важным следствием этого свойства спектральной задачи оказывается то, что для решения требуется найти только две неизвестные спектральные функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Однако, опять же в отличие от эволюционного случая, в котором начальные условия полностью задают одну из спектральных функций, в данном случае ни одна из спектральных функций не известна явно. Оказывается, что для того чтобы полностью характеризовать спектральные данные,

необходимо задать вспомогательную задачу Римана–Гильберта для функций $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ (см. также работу [9]). Когда эту задачу Римана–Гильберта можно решить явно, мы называем соответствующие граничные условия линеаризуемыми. Решение задачи в этом случае будет представлено в следующей работе. Проблема определения этой вспомогательной задачи Римана–Гильберта в случае граничных условий общего вида оказывается более сложной и находится в процессе решения.

Благодарности. Исследования были поддержаны фондом EPSRC (грант EP/E022960/1).

Список литературы

- [1] Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **180** (1990), 53–62.
- [2] A. B. Borisov, V. V. Kiseliev, *Inverse Problems*, **5**:6 (1989), 959–982.
- [3] A. S. Fokas, *A Unified Approach to Boundary Value Problems*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. in Appl. Math., **78**, SIAM, Philadelphia, PA, 2008.
- [4] A. S. Fokas, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **453**:1962 (1997), 1411–1443.
- [5] A. S. Fokas, *Comm. Math. Phys.*, **230**:1 (2002), 1–39.
- [6] A. S. Fokas, *Nonlinearity*, **17**:4 (2004), 1521–1534.
- [7] A. S. Fokas, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **457**:2006 (2001), 371–393.
- [8] A. S. Fokas, E. Spence, *Novel analytical and numerical methods for elliptic boundary value problems*, preprint, 2008.
- [9] Y. A. Antipov, A. S. Fokas, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **138**:2 (2005), 339–365.