Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Сколаричи, Замечания об альтернативных эрмитовых структурах для составных квантовых систем, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 211–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:56:00

© 2009 г.

Дж. Сcolariчи*

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ СОСТАВНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Приводятся некоторые замечания, касающиеся квантовых систем, которые состоят из двух частей и обладают альтернативными эрмитовыми структурами на бесконечномерных комплексных гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: биунитарные преобразования, квантовые бигамильтоновы системы, альтернативные эрмитовы структуры, запутанность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что значительное число нелинейных эволюционных уравнений являются интегрируемыми системами [1]. Почти во всех случаях интегрируемые системы допускают альтернативное гамильтоново описание и называются бигамильтоновыми системами [2]. В целом ряде работ [3]–[16] было показано, что аналог альтернативного гамильтонова описания можно реализовать в рамках квантовой теории. В этом контексте интересно проанализировать, насколько подобное альтернативное квантовое описание окажется применимым при рассмотрении составных систем и взаимодействий между ними [10]. В настоящей работе представлены некоторые замечания, касающиеся этого анализа. В частности, показано, что составные квантовые системы, наделенные альтернативными эрмитовыми структурами на одном и том же бесконечномерном комплексном векторном пространстве, допускают подходящее описание в терминах составляющих систем тогда и только тогда, когда положительный оператор, который связывает альтернативное скалярное произведение с опорным, можно записать как тензорное произведение положительных операторов в составляющих пространствах. Более того, показано, что энтропия фон Неймана, связанная со смешанными состояниями оператора плотности, в сильной степени зависит от альтернативных эрмитовых структур.

*Dipartimento di Fisica dell'Università del Salento; INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: scolarici@le.infn.it

Работа построена следующим образом. В разделе 2, после краткого описания биунитарной группы на бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве, показано, что альтернативные эрмитовы структуры отвечают разным средним биэрмитовых наблюдаемых; в частности, показано, что энтропия фон Неймана сильно зависит от альтернативного скалярного произведения. В разделе 3 установлено необходимое и достаточное условие для того, чтобы составные квантовые системы, наделенные альтернативными эрмитовыми структурами, можно было рассматривать в терминах составляющих систем на бесконечномерном гильбертовом пространстве (см. предложения 2 и 3). Более того, доказано необходимое условие того, что альтернативная эрмитова структура, связанная с составляющими системами, находится в общем положении по отношению к опорной (см. предложение 1). В разделе 4 рассматривается простой пример, в разделе 5 приведены заключительные замечания.

2. БИУНИТАРНЫЕ ОПИСАНИЯ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Геометрический подход к квантовой механике основан на овеществлениях $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. В квантовой механике комплексная структура входит непосредственно в уравнение Шредингера, поэтому естественно рассматривать вещественные гильбертовы пространства $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$, возникающие при одном и том же овеществлении пространства $\mathcal{H}$. В настоящей работе мы будем рассматривать две эрмитовы структуры $h_1 = g_1 + i\omega_1$ и $h_2 = g_2 + i\omega_2$ на пространстве $\mathcal{H}$, происходящие, разумеется, из двух допустимых троек (g_1, J_1, ω_1) и (g_2, J_2, ω_2) на $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ [10], причем мы предполагаем, что комплексные структуры совпадают, $J_1 = J_2 = J$.

В случае, когда $J_1 = J_2$, теорема Ритца обеспечивает выполнение следующего соотношения для h_1 и h_2 :

$$h_2(x, y) = h_1(Fx, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad (1)$$

где F – ограниченный положительный самосопряженный оператор по отношению к обеим эрмитовым структурам, причем он содержит как вещественную, так и мнимую части h_1 и h_2 :

$$F = (g_1 + i\omega_1)^{-1} \circ (g_2 + i\omega_2). \quad (2)$$

Любой биунитарный оператор U должен коммутировать с F , поэтому группа биунитарных операторов принадлежит коммутанту F' оператора F :

$$U^\dagger F U = F, \quad [F, U] = 0. \quad (3)$$

Более того, h_1 и h_2 определяют два представления $U(\mathcal{H}, h_a)$, $a = 1, 2$, унитарной группы $U(\mathcal{H})$ на том же гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (здесь $U(\mathcal{H}, h_a)$ обозначает группу преобразований, унитарных относительно h_a). Тогда группа биунитарных преобразований является подгруппой как группы $U(\mathcal{H}, h_1)$, так и группы $U(\mathcal{H}, h_2)$, принадлежащей коммутанту F' оператора F :

$$\{U\} = U(\mathcal{H}, h_1) \cap U(\mathcal{H}, h_2). \quad (4)$$

Обозначим через $H(\mathcal{H}, h_a)$, $a = 1, 2$, множества эрмитовых операторов относительно h_a . Множество биэрмитовых операторов H , т.е. эрмитовых операторов относительно h_1 и h_2 , является подмножеством как в $H(\mathcal{H}, h_1)$, так и в $H(\mathcal{H}, h_2)$:

$$\{H\} = H(\mathcal{H}, h_1) \cap H(\mathcal{H}, h_2). \quad (5)$$

Опишем явно биунитарную группу в бесконечномерном случае [16]. Связывающий оператор F может иметь в своем спектре как точечную, так и непрерывную части. Что касается точечной части, то биунитарная группа есть $U(n_1) \times U(n_2) \times \cdots \times U(n_k) \times \cdots$, где вырождения n_k собственных значений оператора F могут быть также равными бесконечности. В отношении непрерывной части напомним [16], что (слабозамкнутое коммутативное) кольцо $R(F)$, порожденное оператором F , индуцирует разложение гильбертова пространства $\mathcal{H}$ в прямой интеграл

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \int_{\Delta_k} \mathcal{H}_\lambda d\sigma(\lambda), \quad (6)$$

где полный спектр Δ оператора F представляет собой объединение счетного числа измеримых множеств Δ_k таких, что при $\lambda \in \Delta_k$ пространства $\mathcal{H}_\lambda$ имеют одну и ту же размерность n_k (возможно, бесконечную), а мера $\sigma(\lambda)$ получается обычным путем при использовании спектрального семейства $\{P_F(\lambda)\}$ оператора F и циклических векторов [17].

Элементы U действующей на $\mathcal{H}$ биунитарной группы имеют вид [16]

$$U = \bigoplus_k \int_{\Delta_k} U_{n_k}(\lambda) d\sigma(\lambda), \quad (7)$$

где $U_{n_k}(\lambda)$ – элемент унитарной группы $U(n_k)$ при каждом $\lambda \in \Delta_k$. Более того, поскольку F действует как оператор умножения на каждой компоненте пространства $\mathcal{H}_\lambda$, выражения для h_1 и h_2 на $\mathcal{H}$ имеют вид

$$h_1(x, y) = \sum_k \int_{\Delta_k} \langle x_\lambda | y_\lambda \rangle d\sigma(\lambda), \quad (8)$$

$$h_2(x, y) = \sum_k \int_{\Delta_k} \lambda \langle x_\lambda | y_\lambda \rangle d\sigma(\lambda), \quad (9)$$

где $\langle x_\lambda | y_\lambda \rangle$ – скалярное произведение на $\mathcal{H}_\lambda$.

Две эрмитовы структуры находятся в общем положении, если бикоммутант F'' оператора F совпадает с его коммутантом F' [10] или, что эквивалентно, если оператор F является циклическим на $\mathcal{H}$ [16]. В этом случае биунитарная группа сводится к умножению на фазовый множитель $e^{i\vartheta(\lambda)}$ на одномерном пространстве $\mathcal{H}_\lambda$ для почти каждого λ :

$$U = \int_{\Delta} e^{i\vartheta(\lambda)} d\sigma(\lambda). \quad (10)$$

Поэтому в более актуальном случае общего положения, который соответствует полной интегрируемости квантовой системы, группа биунитарных преобразований параметризуется σ -измеримыми вещественными функциями ϑ на Δ , а следовательно,

можно записать

$$U_{\vartheta} = e^{i\vartheta(F)}.$$

В этом случае биэрмитов гамильтониан имеет вид

$$H_{\vartheta} = \vartheta(F) \quad (11)$$

и однопараметрическую биунитарную группу эволюции можно записать в обычном виде:

$$U(t) = e^{-iH_{\vartheta}t}. \quad (12)$$

Используя альтернативное скалярное произведение (9), среднее значение биэрмитова оператора H в (нормированном) состоянии можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{h_2(x, Hx)}{h_2(x, x)} &= \frac{1}{h_2(x, x)} \sum_k \int_{\Delta_k} \lambda \langle x_{\lambda} | H | x_{\lambda} \rangle d\sigma(\lambda) = \frac{1}{h_2(x, x)} \sum_k \int_{\Delta_k} \langle Fx_{\lambda} | H | x_{\lambda} \rangle d\sigma(\lambda) = \\ &= \frac{1}{h_2(x, x)} \sum_k \int_{\Delta_k} |x_{\lambda}\rangle \langle Fx_{\lambda} | H d\sigma(\lambda) = \text{Tr} \left(\frac{|x\rangle \langle Fx|}{\langle Fx | x \rangle} H \right) = \text{Tr}(\rho_F H), \end{aligned} \quad (13)$$

где Tr обозначает операцию взятия следа, а

$$\rho_F = \frac{|x\rangle \langle Fx|}{\langle Fx | x \rangle} \quad (14)$$

представляет собой оператор плотности ранга 1 в новом описании. Взяв выпуклую комбинацию проекторов ранга 1, мы можем построить всю совокупность состояний, связанных с оператором плотности, которую мы также обозначим как ρ_F . В конечномерном случае геометрия таких состояний очевидна, если рассматривается стандартная эрмитова структура [18]–[20].

Легко проверить, что динамика оператора ρ_F определяется на инфинитезимальном уровне уравнением Лиувилля–фон Неймана

$$\frac{d}{dt} \rho_F(t) = -i[H_{\vartheta}, \rho_F]. \quad (15)$$

Ясно, что изменение скалярного произведения соответствует различным средним значениям оператора H в одном и том же состоянии. На самом деле ρ_F и ρ представляют одно и то же (смешанное) состояние в двух разных описаниях, но, вообще говоря, они имеют различные спектры, так что

$$\langle H \rangle_2 = \text{Tr}(\rho_F H) \neq \text{Tr}(\rho H) = \langle H \rangle_1. \quad (16)$$

В частности, обозначая через S энтропию фон Неймана, связанную с оператором плотности, мы немедленно получаем

$$S(\rho_F) = -\text{Tr}(\rho_F \ln \rho_F) \neq -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = S(\rho), \quad (17)$$

а потому энтропия фон Неймана зависит от альтернативного скалярного произведения, которое мы можем использовать. Тогда можно заключить, что энтропия и среднее значение биэрмитовых наблюдаемых сильно зависят от альтернативного описания, рассматриваемого на $\mathcal{H}$, и поэтому альтернативные описания могут представлять различные физические теории, если только мы не обнаружим различные способы отождествления математических сущностей с физическими величинами.

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ СОСТАВНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Перейдем к составным системам. Предположим, что два гильбертовых пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ (размерности которых могут равняться бесконечности) наделены альтернативными эрмитовыми структурами, соответственно задаваемыми с помощью $h_{F_1}(\cdot, \cdot) = h(\cdot, F_1 \cdot)$ и $h_{F_2}(\cdot, \cdot) = h(\cdot, F_2 \cdot)$, где h обозначает опорное скалярное произведение в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Отображение тензорного произведения

$$\otimes: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

переводит произведение лучей в луч, так что оно индуцирует каноническое вложение на уровне комплексных проективных пространств [19], [20]

$$\begin{aligned} \text{Seg}: \mathcal{PH}_1 \times \mathcal{PH}_2 &\rightarrow \mathcal{PH} = \mathcal{P}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \\ \left(\frac{|x_1\rangle\langle F_1 x_1|}{\langle F_1 x_1 | x_1 \rangle}, \frac{|x_2\rangle\langle F_2 x_2|}{\langle F_2 x_2 | x_2 \rangle} \right) &\mapsto \frac{|x_1 \otimes x_2\rangle\langle F_1 x_1 \otimes F_2 x_2|}{\langle F_1 x_1 \otimes F_2 x_2 | x_1 \otimes x_2 \rangle}. \end{aligned}$$

Это вложение связано с тензорным произведением основных представлений унитарных групп $U(\mathcal{H}_1, h_{F_1})$ и $U(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$, т.е. с представлением прямого произведения групп на $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$,

$$\begin{aligned} U(\mathcal{H}_1, h_{F_1}) \times U(\mathcal{H}_2, h_{F_2}) &\ni (U_1, U_2) \mapsto U_1 \otimes U_2 \in U(\mathcal{H}, h_{F_1 \otimes F_2}), \\ (U_1, U_2)(x_1 \otimes x_2) &= U_1(x_1) \otimes U_2(x_2). \end{aligned}$$

Группа $U_1 \otimes U_2$ является унитарной, поскольку эрмитово произведение $h_{F_1 \otimes F_2}$ в $\mathcal{H}$ связано с эрмитовыми произведениями h_{F_1} и h_{F_2} в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ следующим образом:

$$h_{F_1 \otimes F_2}(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = h_{F_1}(x_1, y_1)h_{F_2}(x_2, y_2). \quad (18)$$

Приведенное выше групповое вложение порождает соответствующее вложение их групповых алгебр, что мы обозначим как

$$\begin{aligned} H(\mathcal{H}_1, h_{F_1}) \times H(\mathcal{H}_2, h_{F_2}) &\rightarrow H(\mathcal{H}, h_{F_1 \otimes F_2}), \\ (H_1, H_2) &\mapsto H_1 \otimes H_2. \end{aligned}$$

Следующее предложение дает необходимое условие того, чтобы альтернативная эрмитова структура, связанная с составной системой, находилась в общем относительном положении по отношению к опорной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Альтернативная структура $h_{F_1 \otimes F_2}$ находится в общем положении на $\mathcal{H}$, только если h_{F_1} и h_{F_2} находятся в общем относительном положении на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя от противного, предположим, что бикоммутант F_1'' оператора F_1 (или бикоммутант F_2'' оператора F_2) отличается от его коммутанта F_1' (F_2'). Тогда имеется некоторый элемент из множества $\{f_1'' \otimes f_2''\}$, где $f_1'' \in F_1''$

и $f_2'' \in F_2''$, который не может принадлежать множеству $\{f_1' \otimes f_2'\}$, где $f_1' \in F_1'$ и $f_2' \in F_2'$, но $\{f_1'' \otimes f_2''\} \subset (F_1 \otimes F_2)''$ и $\{f_1' \otimes f_2'\} \subset (F_1 \otimes F_2)'$. Тогда немедленно получаем $(F_1 \otimes F_2)'' \neq (F_1 \otimes F_2)'$. ■

Если эрмитовы структуры h_{F_1} и h_{F_2} находятся в общих относительных положениях (по отношению к опорным) на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно, а F_1 и F_2 допускают дискретные спектры,

$$F_1 = \sum_i r_i |r_i\rangle\langle r_i|, \quad r_i > 0,$$

$$F_2 = \sum_j s_j |s_j\rangle\langle s_j|, \quad s_j > 0,$$

то редуцированные операторы плотности, связанные с оператором

$$\rho_{F_1 \otimes F_2} = \frac{|x\rangle\langle (F_1 \otimes F_2)x|}{\langle (F_1 \otimes F_2)x | x\rangle} \in \mathcal{PH} = \mathcal{P}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2),$$

можно получить обычным способом, вычисляя частичные следы:

$$\begin{aligned} \rho_{F_1} &= \text{Tr}_2(\rho_{F_1 \otimes F_2}) = \sum_j \langle s_j | \rho_{F_1 \otimes F_2} | s_j \rangle, \\ \rho_{F_2} &= \text{Tr}_1(\rho_{F_1 \otimes F_2}) = \sum_i \langle r_i | \rho_{F_1 \otimes F_2} | r_i \rangle. \end{aligned} \tag{19}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что если $F = F_1 \otimes F_2$, то свойство состояния, связанного с составными системами, быть или не быть запутанным не зависит от альтернативных структур h_{F_1} и h_{F_2} на составляющих пространствах. Действительно, рассмотрим состояние $|z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$. Состояние $|z'\rangle = S|z\rangle$ становится запутанным тогда и только тогда, когда $S \in GL(\mathcal{H})$ и $S \neq S_1 \otimes S_2$ для любого $S_1 \in GL(\mathcal{H}_1)$ и $S_2 \in GL(\mathcal{H}_2)$ [19], [20]. Поэтому (альтернативная) эрмитова структура не играет никакой роли.

Рассмотрим обратную задачу. Предположим, что на бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задана однопараметрическая биунитарная групповая эволюция (12), связанная с составными квантовыми системами и оставляющая инвариантной альтернативную эрмитову структуру $h_F(\cdot, \cdot) = h(\cdot, F\cdot)$. Тогда возникает вопрос: возможно ли чисто квантово-механическое описание таких составных квантовых систем в терминах составляющих их систем, если рассматривается альтернативная эрмитова структура?

Следующее предложение дает необходимое и достаточное условие того, чтобы гильбертовы пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, связанные с составляющими системами, были наделены подходящими альтернативными эрмитовыми структурами h_{F_1} и h_{F_2} такими, что $\forall (U_1, U_2) \in U(\mathcal{H}_1, h_{F_1}) \times U(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$

$$U_1 \otimes U_2 \in U(\mathcal{H}, h_F).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Группа $U(\mathcal{H}, h_F)$ содержит преобразования $U_1 \otimes U_2$ для любых $U_1 \in U(\mathcal{H}_1, h_{F_1})$ и $U_2 \in U(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$ тогда и только тогда, когда $F = F_1 \otimes F_2$.

Доказательство предложения 2 легко получить, если переписать это утверждение в терминах соответствующей групповой алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Множество $H(\mathcal{H}, h_F)$ содержит операторы $H_1 \otimes H_2$ для любых $H_1 \in H(\mathcal{H}_1, h_{F_1})$ и $H_2 \in H(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$ тогда и только тогда, когда $F = F_1 \otimes F_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $F = F_1 \otimes F_2$. Тогда тривиальным образом имеем $H_1 \otimes H_2 \in H(\mathcal{H}, h_F)$ для любых $H_1 \in H(\mathcal{H}_1, h_{F_1})$ и $H_2 \in H(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$. Обратно, предположим, что $F \neq F_1 \otimes F_2$ для любых положительных операторов F_1 и F_2 . Тогда множество $\{H_1 \otimes H_2\}$ при всех $H_1 \in H(\mathcal{H}_1, h_{F_1})$ и $H_2 \in H(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$, очевидно, является неприводимым множеством эрмитовых операторов в пространстве $\mathcal{H}$, наделенном эрмитовой структурой $h_{F_1 \otimes F_2}$, поэтому оператор $F_1 \otimes F_2$ является единственным (с точностью до нормировочного множителя) [21]. Тогда множество $\{H_1 \otimes H_2\}$ содержит некоторый оператор, который не может быть эрмитовым по отношению к альтернативной эрмитовой структуре h_F . ■

Прямое следствие предложения 3 заключается в том, что тензорное произведение двух наблюдаемых в $H(\mathcal{H}_1, h_{F_1})$ и $H(\mathcal{H}_2, h_{F_2})$, несомненно, является наблюдаемой в $H(\mathcal{H}, h_F)$ тогда и только тогда, когда $F = F_1 \otimes F_2$. Тогда можно заключить, что любое альтернативное описание квантовых систем, состоящих из двух частей, допускает чисто квантово-механическую интерпретацию в терминах составляющих их систем тогда и только тогда, когда $F = F_1 \otimes F_2$.

Более того, если задан некоторый оператор F , допускающий разложение $F = F_1 \otimes F_2$, то такое разложение не является единственным. Действительно, можно, например, изменить операторы F_1 и F_2 , умножив их на (положительные) множители r и $1/r$ соответственно.

4. ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Теперь, ввиду актуальности двухкубитовых квантовых вентилей в квантовой теории информации и в области квантовых компьютеров, рассмотрим альтернативные описания для порождения оптимальной запутанности, недавно введенной в литературе [22]. Рассматриваемая система состоит из двух кубитов, поэтому $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^4$. Оператор эволюции всей системы имеет вид

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Пусть начальное состояние есть

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Рассмотрим в гильбертовом пространстве, связанном с составной системой, альтернативное скалярное произведение, связанное с опорным посредством (положительного) оператора,

$$F = F_1 \otimes F_2 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Заметим, что если $r_1 \neq r_2$, $s_1 \neq s_2$, то альтернативную эрмитову структуру h_F на $\mathcal{H}$ можно выбрать в общем относительном положении в соответствии с предложением 1.

Исходный оператор плотности по отношению к h_F имеет вид

$$\rho_F(0) = \frac{|x\rangle\langle Fx|}{\text{Tr } |x\rangle\langle Fx|}, \quad (22)$$

в момент времени t получаем

$$\rho_F(t) = U(t)\rho_F(0)U(t)^\dagger, \quad (23)$$

и из соотношений (19) можно вычислить редуцированные операторы плотности:

$$\begin{aligned} \rho_{F_1}(t) &= \text{Tr}_2(\rho_F(t)) = \frac{1}{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \cos(2t) \\ r_1 \cos(2t) & r_2 \end{pmatrix}, \\ \rho_{F_2}(t) &= \text{Tr}_1(\rho_F(t)) = \frac{1}{s_1 + s_2} \begin{pmatrix} s_1 & -is_2 \cos(2t) \\ is_1 \cos(2t) & s_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

Собственные значения оператора $\rho_{F_1}(t)$ имеют вид

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(4t)}}{r_1 + r_2} \right),$$

отсюда соответствующая энтропия фон Неймана имеет вид

$$S(\rho_{F_1}(t)) = -\text{Tr}(\rho_{F_1}(t) \ln \rho_{F_1}(t)) = -r_+ \ln r_+ - r_- \ln r_-, \quad (25)$$

откуда немедленно получаем, что энтропия зависит от альтернативного скалярного произведения.

Тогда мера запутывания сильно зависит от альтернативной эрмитовой структуры. Однако $S(\rho_{F_1}(t)) = 0$, если степень чистоты обеих редуцированных матриц плотности

$$\begin{aligned} P_{\rho_{F_1}(t)} &= \text{Tr}(\rho_{F_1}(t)^2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(4t)}{(r_1 + r_2)^2} \right), \\ P_{\rho_{F_2}(t)} &= \text{Tr}(\rho_{F_2}(t)^2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 \cos(4t)}{(s_1 + s_2)^2} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

становится равной единице, что имеет место, если $t = k\pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, независимо от матричных элементов r_1 , r_2 , s_1 и s_2 .

Из равенств (26) заключаем, что, тогда как энтропия зависит от альтернативного скалярного произведения, свойство состояния быть или не быть запутанным не зависит от альтернативного описания, как и можно было ожидать исходя из замечания в предыдущем разделе.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы проанализировали, в какой степени альтернативные квантовые описания применимы к составным системам (состоящим из двух частей) на бесконечномерных комплексных гильбертовых пространствах. Мы показали, что только в случае, если альтернативная эрмитова структура связана с опорной посредством положительно-го оператора F такого, что $F = F_1 \otimes F_2$, проекцию на составляющие пространства можно выполнить вычислением частичных следов. Более того, мы показали, что энтропия фон Неймана сильно зависит от альтернативной эрмитовой структуры.

Мы надеемся, что настоящая работа может послужить основанием для дальнейших исследований положительных динамических отображений квантовых систем, состоящих из многих частей и наделенных альтернативными эрмитовыми структурами.

Благодарности. Автор благодарен профессору Дж. Мармо за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097; В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:4 (1971), 18–27.
- [2] F. Magri, *J. Math. Phys.*, **19**:5 (1978), 1156–1162; “A geometrical approach to the nonlinear solvable equations”, *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, Proc. Meeting (Univ. Lecce, Lecce, 1979), Lecture Notes in Phys., **120**, eds. M. Boiti et al., Springer, Berlin–New York, 1980, 233–263.
- [3] S. De Filippo, G. Vilasi, G. Marmo, M. Salerno, *Nuovo Cimento B*, **83**:2 (1984), 97–112.
- [4] G. Marmo, E. J. Saletan, R. Schmid, A. Simoni, *Nuovo Cimento B*, **100**:3 (1987), 297–317.
- [5] B. A. Dubrovin, G. Marmo, A. Simoni, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:15 (1990), 1229–1234.
- [6] J. F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo, *Internat. J. Modern Phys. A*, **15**:30 (2000), 4797–4810.
- [7] A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, *J. Geom. Phys.*, **33**:3–4 (2000), 210–228.
- [8] G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Rep. Math. Phys.*, **48**:1–2 (2001), 149–157.
- [9] F. Ventriglia, *Modern Phys. Lett. A*, **17**:24 (2002), 1589–1599.
- [10] G. Marmo, G. Morandi, A. Simoni, F. Ventriglia, *J. Phys. A*, **35**:40 (2002), 8393–8406.
- [11] G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Rep. Math. Phys.*, **51**:2–3 (2003), 275–285.
- [12] G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:15 (2004), 2561–2578.
- [13] G. Marmo, G. Sclarici, A. Simoni, F. Ventriglia, *Note Mat.*, **23**:2 (2004–2005), 173–181.
- [14] Дж. Мармо, Дж. Сколаричи, А. Симони, Ф. Вентрилья, *ТМФ*, **144**:2 (2005), 364–383.
- [15] G. Marmo, G. Sclarici, A. Simoni, F. Ventriglia, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **2**:5 (2005), 919–937.
- [16] G. Marmo, G. Sclarici, A. Simoni, F. Ventriglia, *J. Phys. A*, **38**:17 (2005), 3813–3821.
- [17] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
- [18] V. I. Man’ko, G. Marmo, F. Zaccaria, E. C. G. Sudarshan, *Rep. Math. Phys.*, **55**:3 (2005), 405–422.
- [19] J. Grabowski, M. Kuś, G. Marmo, *J. Phys. A*, **38**:47 (2005), 10217–10244.
- [20] J. Grabowski, M. Kuś, G. Marmo, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **13**:4 (2006), 343–362.
- [21] F. G. Sholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, *Ann. Phys.*, **213**:1 (1992), 74–101.
- [22] C. A. Rodriguez, A. Shaji, E. C. G. Sudarshan, *Dynamics of two qubits: decoherence and entanglement optimization protocol*, [arXiv: quant-ph/0504051](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0504051).