Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Вербус, Л. Мартина, А. П. Протогенов, Блоховские гамильтонианы и топологически упорядоченные состояния, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 220–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:43:32

© 2009 г. В. А. Вербус*, Л. Мартина[†], А. П. Протогенов[‡]

БЛОХОВСКИЕ ГАМИЛЬТониАНЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрено универсальное представление для гамильтониана систем, находящихся в топологически упорядоченном фазовом состоянии. Показано, что в сильно коррелированных электронных системах гамильтониан, записанный через проекторы алгебры Темперли–Либа на синглетное по спине состояние, в случае двукратно зацепленных мировых линий возбуждений имеет вид двумерной матрицы Блоха, при этом различные топологические упорядочения разделены квантовой критической точкой, в которой матричные элементы гамильтониана обращаются в нуль.

Ключевые слова: топологически упорядоченные состояния, квантовые фазовые переходы, алгебра Темперли–Либа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Непрерывные фазовые переходы между неупорядоченными и упорядоченными фазовыми состояниями сопровождаются спонтанным нарушением симметрии. Теория фазовых переходов второго рода Ландау, описывающая это явление, базируется на использовании локальных параметров порядка, имеющих ненулевое значение в состояниях с меньшей симметрией. Однако эта теория не может описать все непрерывные фазовые переходы между квантово-упорядоченными состояниями. Причина состоит в том, что в системах с развитыми квантовыми флуктуациями фазовые переходы между неупорядоченными фазами могут возникать при нулевой температуре без нарушения симметрии. Типичным примером является топологический фазовый переход между состояниями с соседними значениями фактора заполнения уровня Ландау в квантовых электронных жидкостях, где существует дробный

*Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: verbus@ipm.sci-nnov.ru

[†]Dipartimento di Fisica dell'Universita di Lecce, INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: luidi.martina@le.infn.it

[‡]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru

квантовый эффект Холла. При этом начальное и конечное топологически упорядоченные состояния представляют собой специальный случай порядка, характеризующегося только щелевыми возбуждениями. В настоящее время одной из актуальных проблем является описание топологического фазового перехода такого типа, поскольку обычный параметр порядка в рассматриваемом случае отсутствует.

Изучение топологически упорядоченных состояний и квантовых фазовых переходов между ними важно для классификации разнообразных фазовых состояний в низкоразмерных системах, где роль квантовых флуктуаций велика. В этом случае новые типы упорядочения сильно коррелированных спиновых степеней свободы могут быть основаны на использовании топологических особенностей динамики возбуждений в низкоразмерных системах, в частности на использовании эффекта зацепления мировых линий возбуждений. В пространственно-двумерных системах с внутренними степенями свободы явления зацепления ведут к неабелевой статистике возбуждений и соответствующей форме топологического порядка.

В системах с неабелевыми квазичастицами сильно коррелированные состояния составляют некоторую часть низкоэнергетического гильбертова пространства. В случаях, если рассматриваемые квазичастицы пространственно разделены, низкоэнергетическое пространство оказывается вырожденным, а его состояния характеризуются чисто топологическими квантовыми числами. Это означает, что такие состояния не могут быть различимы с помощью локальных воздействий. Такого рода топологическая жесткость обеспечивает защиту от воздействия, приводящего к сбою фазы волновой функции в квантовых вычислениях с использованием неабелевых возбуждений.

Установление соотношений эквивалентности между гамильтонианами точно решаемых квантовых моделей [1]–[4], изучение корреляционных функций [5], а также классификация топологического порядка [6] и квантовых фазовых переходов составляют неполный список задач в этой актуальной области. В настоящей работе, используя подход, развитый в работе [7], мы покажем, что для двукратно зацепленных мировых линий возбуждений эффективный низкоэнергетический гамильтониан, записанный в форме проекторов на спин-синглетное состояние, совпадающий с гамильтонианом модели Изинга в поперечном поле, принадлежит семейству блоховских гамильтонианов. Некоторые стороны этой проблемы уже обсуждались в работе [8]. Поэтому мы обратим основное внимание на некоторые универсальные черты внешне различных моделей [9] и обсудим связь с длинноволновым подходом при описании эффектов зацепления. Мы также рассмотрим соотношения эквивалентности [10]–[14] гамильтонианов низкоразмерных точно интегрируемых спиновых моделей [3], [15], описывающих топологически упорядоченные состояния [16], [17].

2. ПРОЕКТОРЫ НА СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

Один из способов описания нелокальных эффектов, связанных с зацеплениями мировых линий квазичастиц, основан на использовании одномерной модели с гамильтонианом

$$H = - \sum_{i=1}^N H_i = - \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{d}, \quad (1)$$

где e_i – операторы алгебры Темперли–Либа, $d = 2 \cos(\pi/(k+2))$ – число Бераха [18], k – уровень $SU(2)_k$ -теории Весса–Зумино–Виттена–Новикова. Это число, совпадающее с коэффициентом в действии Черна–Саймонса, определяет степень зацепления мировых линий $(2+1)$ -мерных возмущений.

Операторы Темперли–Либа e_i удовлетворяют коммутационным соотношениям [19] $e_i^2 = de_i$, $e_i e_{i+1} e_i = e_i$, $e_i e_j = e_j e_i$, $j \neq i \pm 1$. Отсюда следует, что локальные операторы H_i являются проекторами: $H_i^2 = H_i$. Поэтому выражение (1) имеет вид гамильтониана клейновского типа [20].

Чтобы воспользоваться эквивалентностью модели (1) и модели Изинга в поперечном поле в критической точке, мы будем рассматривать случай однократно зацепленных мировых линий при $k = 2$. Такое представление модели (1) нам понадобится в разделе 3 при обсуждении свойств двумерных точно интегрируемых спиновых моделей. При этом мы будем опираться на результаты, полученные в работе [7]. Подход, основанный на использовании RSOS-представлений (restricted solid on solid) операторов e_i [21], [22], приводит к тем же результатам [8].

Пусть фермионный оператор $c_{i,i+1}$ определен на звене $(i, i+1)$ цепочки, узлы которой пронумерованы индексом i . Запишем проекционный оператор $H_i = e_i/d$ как $e_i/d = 1 - c_{i,i+1}^+ c_{i,i+1} = 1 - n_{i,i+1}$, где $n_{i,i+1} = c_{i,i+1}^+ c_{i,i+1} = (1 + \sigma^3)_{i,i+1}/2$ – оператор числа частиц, σ^3 – третья компонента матриц Паули. В дальнейшем мы будем обращаться к представлению через майорановские фермионы γ_k , удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям $\{\gamma_k, \gamma_l\} = 2\delta_{kl}$. Они связаны с фермионами $c_{i,i+1}$ следующим образом: $c_{i,i+1} = (\gamma_{1,i} - i\gamma_{2,i+1})/\sqrt{2}$, $c_{i,i+1}^+ = (\gamma_{1,i} + i\gamma_{2,i+1})/\sqrt{2}$, где самосопряженные $(\gamma_i^+ = \gamma_i)$ майорановские переменные γ_1 и γ_2 определены соответственно в левом и правом узлах звена $(i, i+1)$. Используя обратное соотношение $\gamma_1 = (c^+ + c)/\sqrt{2}$, $\gamma_2 = (c^+ - c)/(i\sqrt{2})$, получаем $2i\gamma_2\gamma_1 = 2n - 1 = \sigma^3$. Отсюда следует

$$\frac{e}{d} = 1 - n = \frac{1}{2} (1 - \sigma^3) = \frac{1}{2} + i\gamma_1\gamma_2. \quad (2)$$

Тогда с точностью до константы

$$H = - \sum_j H_j = - \sum_j i\gamma_{1,j}\gamma_{2,j} - \sum_j i\gamma_{2,j}\gamma_{1,j+1}, \quad (3)$$

где первое слагаемое учитывает связь внутри j -й пары, а второе слагаемое описывает взаимодействие между правым фермионом в j -й паре и левым фермионом в $(j+1)$ -й паре. Применяя преобразование Иордана–Вигнера [7],

$$\gamma_{1,j} = \sigma_j^1 \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k^3, \quad \gamma_{2,j} = \sigma_j^2 \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k^3,$$

мы получаем модель Изинга в поперечном поле в критической точке:

$$H = - \sum_j \sigma_j^3 - \sum_j \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^1. \quad (4)$$

Критической ситуации отвечают совпадающие значения констант связи – множители J и gJ у первого и второго слагаемых соответственно в выражении (4), где они

равны единице. Если константы связи произвольны, модель (4), записанная в дуальной форме как $H = -J \sum_j (g\sigma_j^1 + \sigma_j^3 \sigma_{j+1}^3)$, или через майорановские фермионы $\gamma_{\mathbf{k}}$ в диагональном виде $H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}} - 1/2)$ [23], содержит щель $\Delta = J(1 - g)$ в спектре $\epsilon_{\mathbf{k}} = J\sqrt{(g-1)^2 + 4g \sin^2(\mathbf{k}/2)}$. Щель обращается в нуль в критической точке $g = 1$.

Эта модель является точно интегрируемой [23], [24] и известны ее корреляционные функции [25]–[27]. Квантовая критическая точка разделяет спин-поляризованное состояние с $\Delta > 0$ и топологически упорядоченное состояние квантового парамагнетика, где $\Delta < 0$. Спин-поляризованное состояние представляет собой конденсат открытых струн, в то время как топологический порядок описывает конденсат струн в форме петель [16].

3. СООТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В этом разделе мы обсудим отображение некоторых точно решаемых квантовых спиновых моделей, которые содержат топологически упорядоченные состояния, в модель Изинга в поперечном поле (4). Топологический порядок в двумерных спиновых системах характеризует фазовые состояния, существующие в моделях торического кода Китаева [4], в модели Китаева с анизотропным взаимодействием на гексагональной решетке [3], в системе джозефсоновских контактов на этой решетке [28] и в модели Вена [29]. Мы рассмотрим соотношения эквивалентности для модели Вена, определенной на квадратной решетке в поперечном поле h [12], с гамильтонианом, имеющим вид

$$H = g \sum_{i,j} F_{ij} + h \sum_{i,j} \sigma_{i,j}^2 = g \sum_{i,j} \sigma_{i,j}^2 \sigma_{i+1,j}^1 \sigma_{i+1,j+1}^2 \sigma_{i,j+1}^1 + h \sum_{i,j} \sigma_{i,j}^2, \quad (5)$$

где с помощью индексов i, j обозначены декартовы координаты каждого узла квадратной решетки, $g < 0$ – константа связи. В терминах фермионных операторов $c_{i,j}$, когда

$$\sigma_{i,j}^1 + i\sigma_{i,j}^2 = 2 \left[\prod_{j' < j} \prod_{i'} \sigma_{i',j'}^3 \right] \left[\prod_{i' < i} \sigma_{i',j}^3 \right] c_{i,j}^\dagger, \quad \sigma_{i,j}^3 = 2c_{i,j}^\dagger c_{i,j} - 1, \quad (6)$$

и майорановских полей $A_{i,j} = c_{i,j}^\dagger + c_{i,j}$, $B_{i,j} = i(c_{i,j}^\dagger - c_{i,j})$ каждое слагаемое в гамильтониане (5) равно $F_{i,j} = A_{i,j} A_{i+1,j} B_{i,j+1} B_{i+1,j+1}$.

Фермионы $d_{i,j}$ определены на вертикальных звеньях $(i, j+1)$ следующим образом:

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j} + iB_{i,j+1}}{2}, \quad d_{i,j}^\dagger = \frac{A_{i,j} - iB_{i,j+1}}{2}. \quad (7)$$

Записанное через фермионы $d_{i,j}$ произведение операторов $iA_{i,j} B_{i,j+1} = 2d_{i,j}^\dagger d_{i,j} - 1 = \mu_{i,j}^3$, а гамильтониан (5) при $h = 0$ имеет вид

$$H = g \sum_{i,j} \mu_{i,j}^3 \mu_{i+1,j}^3. \quad (8)$$

Этот гамильтониан описывает систему расцепленных цепочек Изинга (4) в отсутствие внешнего магнитного поля.

Следуя [12], при $h \neq 0$ определим операторы $A_i = \sigma_i^1 \sigma_{i+e_1}^2 \sigma_{i+e_1+e_2}^1 \sigma_{i+e_2}^2 = \tau_{i+1/2}^1$ и $B_i = \sigma_i^1 = \tau_{i-1/2}^3 \tau_{i+1/2}^3$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[A_i, B_j] = 2A_i B_j (\delta_{j,i+e_1} + \delta_{j,i+e_2}), \quad [A_i, A_j] = 0, \quad [B_i, B_j] = 0.$$

Переписанный в терминах матриц Паули $\tau_{a,i+1/2}^\alpha$ гамильтониан (5),

$$H = - \sum_a \sum_i (g \tau_{a,i+1/2}^1 + h \tau_{a,i-1/2}^3 \tau_{a,i+1/2}^3), \quad (9)$$

совпадает с гамильтонианом двумерной квантовой модели Изинга в поперечном поле для системы невзаимодействующих цепочек. После преобразования Иордана–Вигнера

$$\tau_{a,j+1/2}^1 = 2c_{a,j}^+ c_{a,j} - 1, \quad \tau_{a,j+1/2}^3 = (-1)^{j-1} \exp \left[\pm i\pi \sum_{n=1}^{j-1} c_{a,n}^+ c_{a,n} \right] (c_{a,j}^+ + c_{a,j})$$

спиновых операторов в (9) в бесспиновые фермионы $c_{a,j}$ модель Изинга в поперечном поле будет описываться гамильтонианом

$$H = h \sum_j \left[(c_j - c_j^+) (c_{j+1} + c_{j+1}^+) + \frac{g}{h} (c_j^+ - c_j) (c_j^+ + c_j) \right].$$

Рассматриваемый гамильтониан квадратичен по фермионным операторам и может быть приведен с помощью преобразования Боголюбова к диагональному виду. Из боголюбовского представления модели следует, что спектр фермионов содержит щель $\Delta = h|g - 1|$, которая, как уже отмечалось, обращается в нуль при $g \rightarrow 1$. В квантовой критической точке $g = 1$ энергия возбуждений становится равной $E_{\mathbf{k}} = ck$, где $c = 2h$ – скорость фермионных возбуждений.

Поскольку топологически упорядоченные состояния при $g \neq 1$ защищены конечным значением щели, для того чтобы разрушить топологическое фазовое состояние, нам необходимо закрыть щель. Поэтому квантовые критические переходы между различными топологическими фазами сопровождаются обращением щелей в спектре в нуль, что происходит в центре или на границе зоны Бриллюэна.

4. БЛОХОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА

При изучении особенностей фазовых состояний с топологическим упорядочением в двумерных сильно коррелированных спиновых системах имеют место два универсальных свойства. Прежде всего, как было недавно отмечено в работе [30], все состояния с топологическим порядком в точно решаемых спиновых моделях могут быть описаны p -симметричными БКШ-подобными волновыми функциями. При этом состояние с щелью в спектре возбуждений не является сверхпроводящим, а относится к основному состоянию, существующему в топологических диэлектриках [31], [32].

Другое важное свойство состоит в том, что структура гамильтонианов в этих моделях такова, что он оказывается представим в виде

$$H = \sum_{\alpha, \mathbf{k}} \bar{\Psi} h_{\alpha}(\mathbf{k}) \sigma^{\alpha} \Psi, \quad \sigma_{\alpha} = (\mathbb{I}, \boldsymbol{\sigma}). \quad (10)$$

Гамильтониан в такой форме обсуждался в работах [33]–[35]. Чтобы прояснить свойства топологического порядка и квантового критического поведения, приведем явные выражения для функций $h_{\alpha}(k_x, k_y, \{g_i\})$ для различных случаев. Совокупность констант связи обозначим $\{g_i\}$. При вычислении фазы Берри в задаче о динамике спина [35], находящегося во внешнем магнитном поле, компоненты вектора h_{α} , $\alpha = 1, 2, 3$, совпадают с компонентами напряженности магнитного поля, которое является адиабатическим параметром. Фермионному спектру Дирака в графене отвечают функции $h_{\alpha} \equiv p_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, где $\mathbf{p}$ – импульс частиц.

Пусть в некоторой точке пространства параметров $(\mathbf{k}, \{g\})$ существует вырождение спектра квазичастиц. Случаю общего положения отвечает двухзонное вырождение. Поэтому без потери общности можно считать, что вблизи точки вырождения форма гамильтониана совпадает с формой Берри (10), а в точке вырождения $\mathbf{k}_0$ имеем $h_{\alpha}(\mathbf{k}_0) = 0$. Обычно точка $\mathbf{k}_0$ является одной из четырех точек $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) в зоне Бриллюэна. В силу инвариантности относительно инверсии времени следует, что $h_{\alpha}(-\mathbf{k}) = -h_{\alpha}(\mathbf{k})$, $\alpha = 0, 1, 2$, и $h_3(-\mathbf{k}) = h_3(\mathbf{k})$.

Квадратичный по фермионным операторам гамильтониан наиболее общего вида

$$H = \begin{pmatrix} h_3(\mathbf{k}) & \Delta(\mathbf{k}) \\ \Delta^*(\mathbf{k}) & -h_3(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

который дает спектр $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{h_3^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2}$ с щелью $\Delta(\mathbf{k}) \equiv h_1(\mathbf{k}) + ih_2(\mathbf{k})$, соответствует волновой функции

$$|\Omega\rangle = P \prod_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}|^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}} \right] |0\rangle, \quad (12)$$

где P – оператор проецирования на состояние с одной частицей на узле,

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_3(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_3(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad g_{\mathbf{k}} = \frac{u_{\mathbf{k}}}{v_{\mathbf{k}}},$$

$a_{\mathbf{k}}$ – фермионные операторы в четырех приведенных выше точках вырождения.

Приведем явные выражения для функций $h_3(\mathbf{k})$ и $\Delta(\mathbf{k})$ в случаях, когда возможны безщелевые моды. В одном из них, отвечающем спроецированной p -волновой функции [6], функции $h_{\alpha}(\mathbf{k})$ равны [30]

$$h_1(\mathbf{k}) = J \sin k_x + J \sin k_y, \quad h_2(\mathbf{k}) = 0, \quad h_3(\mathbf{k}) = J_z - J_x \cos k_x - J_y \cos k_y. \quad (13)$$

Безмассовые возбуждения возможны еще в двух случаях [6]:

$$h_1(\mathbf{k}) = J' \sin k_x, \quad h_2(\mathbf{k}) = J \sin(k_x + k_y), \quad h_3(\mathbf{k}) = \pm J \cos(k_x + k_y), \quad (14)$$

где J_i , J' – константы связи.

Чтобы сохранить интегрируемость и описать эффекты, аналогичные действию внешнего магнитного поля, в модели Китаева с дополнительными слагаемыми [3] функции $h_\alpha(\mathbf{k})$ заданы в виде

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{k}) &= -J_y \sin \alpha(\mathbf{k}) + J_x \sin \beta(\mathbf{k}), & h_2(\mathbf{k}) &= J_z + J_y \cos \alpha(\mathbf{k}) + J_x \cos \beta(\mathbf{k}), \\ h_3(\mathbf{k}) &= 2J' \sin \sqrt{3}k_x, & \alpha(\mathbf{k}) &= \frac{\sqrt{3}k_x - 3k_y}{2}, & \beta(\mathbf{k}) &= \frac{\sqrt{3}k_x + 3k_y}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Интересующая нас область параметров, где спектр возбуждений при $J' = 0$ является бесщелевым ($|\mathbf{h}(\mathbf{k})| = 0$), принадлежит интервалу констант связи $|J_x - J_y| < J_z < J_x + J_y$ [3]. Аналогичное условие на константы связи, при котором возможна бесщелевая мода, существует для спектра возбуждений в графене с различными амплитудами перескоков [36]. Учет взаимодействия с последующими ближайшими соседями на решетке изменяет степень констант связи [15], участвующих в этом неравенстве: $|J_x^2 - J_y^2| < J_z^2 < J_x^2 + J_y^2$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе нас интересовал низкоэнергетический сектор пространства состояний в теории, гамильтониан которой действует как проектор на синглетное по спину основное состояние. Поэтому, чтобы найти энионную аналогию гамильтониана Гейзенберга для квантового антиферромагнетика со спином $1/2$, гамильтониан для $k = 2$ был выражен через проекторы алгебры Темперли–Либа. В связи с этим возникает естественный вопрос: можно ли распространить это построение на случай произвольных значений k ?

Формально трансфер-матрица $T = \tau_1 \tau_3 \dots \tau_{2N-1} T_0 \tau_2 \tau_4 \dots \tau_{2N-2} T_{2N}$, из которой может быть получен гамильтониан для предельных значений параметра анизотропии x , выражается через операторы алгебры Темперли–Либа как $\tau_i = I_i + x e_i$ для любых значений k , где для четных i

$$e_i = \delta_{h_{i-1}, h_{i+1}} \frac{\sqrt{[h_i]_q [h'_i]_q}}{[h_{i+1}]_q} \prod_{j=\text{even}, j \neq i} I_j,$$

для нечетных i

$$e_i = \delta_{h'_{i-1}, h'_{i+1}} \frac{\sqrt{[h_i]_q [h'_i]_q}}{[h'_{i+1}]_q} \prod_{j=\text{even}, j \neq i} I_j,$$

где $[h]_q = (q^h - q^{-h})/(q - q^{-1})$, $q = e^{\pi i/(k+2)}$, $I_i = \delta_{h_i, h'_i}$, $h_i = 1, 2, \dots, (k+1)$.

В рассмотренном выше случае при $k = 2$, $|h_i - h_{i+1}| = 1$, $h_i = 1, 2, 3$, для нечетных $i = 2j - 1$ оператор e_i равен

$$e_{2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $k = 3$, то гамильтониан [8]

$$H = \sum_i [w(d_i + d_i^+)(1 - n_{i-1})(1 - n_{i+1}) + u n_i + v n_i n_{i+2}], \quad (16)$$

где $n_i = d_i^+ d_i$, d_i – операторы бозонов с твердой сердцевиной (hard-core bosons), является решеточным аналогом трикритической модели Изинга в критической точке, если $w_c = \phi^{-1/2}$, $v_c = -\phi^2$, $u_c = 2 + \phi^{-2}$. Здесь золотое сечение $\phi = \cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/2$ определяет алгебраические свойства теории с энионами Фибоначчи. В этой теории гамильтониан может быть представлен также в следующем виде [37]:

$$H = -\frac{1}{\phi} \sum_i e_i = \sum_i [(n_{i-1} + n_{i+1} - 1) - n_{i-1} n_{i+1} (\phi^{-3/2} \sigma_i^x + \phi^{-3} n_i + 1 + \phi^{-2})]. \quad (17)$$

В случае непрерывной теории, определенной на косет-пространстве, мы имеем для произвольных значений k минимальную конформную теорию поля с центральным зарядом $c = 1 - 6/((k+1)(k+2))$, а для ферромагнитного знака константы связи в гамильтониане – парафермионное значение центрального заряда $c = 2(k-1)/(k+2)$. Построение решеточных аналогов этих теорий представляет собой сложную задачу, связанную с необходимостью замены алгебры Темперли–Либана на алгебру моноидов Кауфмана, содержащую рекуррентные соотношения между интересующими нас проекторами [38]. Нерешенной актуальной проблемой является также изучение структуры теории в случае больших значений k , когда число примарных полей, участвующих в формировании кластера в квантовой электронной жидкости, велико. Мы надеемся вернуться к этой проблеме в будущем.

Благодарности. Выражаем благодарность А. Г. Абанову, П. А. Пирсу за замечания и полезные обсуждения. Работа была частично поддержана грантом консорциума E.I.N.S.T.E.IN (Л. Мартина, А. П. Протогенов), РФФИ (гранты № 09-01-00268, 09-01-92426 (В. А. Вербус, А. П. Протогенов)) и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”. Авторы выражают благодарность INFN за частичную поддержку в рамках проекта LE41, а также Международному центру теоретической физики им. Абдуса Салама (Triest, Italy), Институту теоретической физики им. Галилео Галилея (Florence, Italy) и Институту физики твердого тела и исследования материалов им. Лейбница (Dresden, Germany), где была начата эта работа, за гостеприимство.

Список литературы

- [1] S. Trebst, P. Werner, M. Troyer, K. Shtengel, C. Nayak, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:7 (2007), 070602.
- [2] H. Yao, S. A. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:24 (2007), 247203.
- [3] A. Yu. Kitaev, *Ann. Phys.*, **321**:1 (2006), 2–111.
- [4] A. Yu. Kitaev, *Ann. Phys.*, **303**:1 (2003), 2–30.
- [5] G. Baskaran, S. Mandal, R. Shankar, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:24, 247201.
- [6] S.-P. Kou, X.-G. Wen, *Projected p-wave superconducting wave-functions for topological orders*, [arXiv: 0711.0571](#).
- [7] N. E. Bonesteel, K. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:14 (2007), 140405.
- [8] P. Fendley, *J. Phys. A*, **39**:50 (2006), 15445–15475.
- [9] H.-D. Chen, J. Hu, *Phys. Rev. B*, **76**:19 (2007), 193101.
- [10] H.-D. Chen, Z. Nussinov, *J. Phys. A*, **41**:7 (2008), 075001; [arXiv: cond-mat/0703633](#).
- [11] Y. Yu, T. Si, *Explicit demonstration of nonabelian anyon, braiding matrix and fusion rules in the Kitaev-type spin honeycomb lattice models*, [arXiv: 0804.0483](#).

- [12] J. Yu, S.-P. Kou, X.-G. Wen, *Exact results of the quantum phase transition for the topological order*, [arXiv: 0709.2276](#).
- [13] S. Yang, D. L. Zhou, C. P. Sun, *Phys. Rev. B*, **76**:18 (2007), 180404.
- [14] S. Dusuel, K. P. Schmidt, J. Vidal, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:17 (2008), 177204.
- [15] J. K. Pachos, *Ann. Phys.*, **322**:6 (2007), 1254–1264.
- [16] M. A. Levin, X.-G. Wen, *Phys. Rev. B*, **71**:4 (2005), 045110.
- [17] X.-Y. Feng, G.-M. Zhang, T. Xiang, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:8 (2007), 087204.
- [18] S. Beraha, J. Kahane, *J. Combin. Theory Ser. B*, **27** (1979), 1–12; S. Beraha, J. Kahane, N. J. Weiss, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **72**:11 (1975), 4209.
- [19] H. N. V. Temperley, E. H. Lieb, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **322**:1549 (1971), 251–280.
- [20] D. J. Klein, *J. Phys. A*, **15**:2 (1982), 661–671.
- [21] P. Fendley, E. Fradkin, *Phys. Rev. B*, **72**:2 (2005), 024412.
- [22] V. Jones, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **298**:20 (1984), 505–508; A. Kuniba, Y. Akutsu, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **55**:10 (1986), 3285–3288; V. Pasquier, *Nucl. Phys. B*, **285**:1 (1987), 162–172.
- [23] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [24] B. K. Chakrabarti, A. Dutta, P. Sen, *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models*, Lecture Notes in Phys., **41**, Springer, Berlin, 1996.
- [25] B. M. McCoy, E. Barouch D. B. Abraham, *Phys. Rev. A*, **4**:6 (1971), 2331–2341.
- [26] A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Ju. Novokshenov, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 752–758.
- [27] S. Sachdev, A. P. Young, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:11 (1997), 2220–2223.
- [28] B. Douçot, M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, A. S. Ioselevich, *Phys. Rev. B*, **71**:2 (2005), 024505.
- [29] X.-G. Wen, *Phys. Rev. Lett.*, **90**:1 (2003), 016803.
- [30] Y. Yu, Z. Wang, *Europhys. Lett.*, **84**:5 (2008), 57002; [arXiv: 0708.0631](#).
- [31] C. L. Kane, E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:14 (2005), 146802; no. 22 (2005), 226801.
- [32] J. E. Moore, L. Balents, *Phys. Rev. B*, **75**:12 (2007), 121306.
- [33] R. Roy, *Three dimensional topological invariants for time reversal invariant Hamiltonians and the three dimensional quantum spin Hall effect*, [arXiv: cond-mat/0607531](#).
- [34] D.-H. Lee, G.-M. Zhang, T. Xiang, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:19 (2007), 196805.
- [35] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **392**:1802 (1984), 45–57.
- [36] M. Kohmoto, Y. Hasegawa, *Phys. Rev. B*, **76**:20 (2007), 205402.
- [37] A. Feiguin, S. Trebst, A. W. W. Ludwig, M. Troyer, A. Kitaev, Z. Wang, M. Freedman, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:16 (2007), 160409.
- [38] P. A. Pearce, J.-B. Zuber, *Lattice Realizations of $sl(2)_k$ WZW Models*, unpublished, 1998.