Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Визинеску, Д. Греку, Р. Феделе, С. Де Никола, Гидродинамический подход Маделунга к обобщенному нелинейному уравнению Шредингера с производной потенциала. Специальные решения и их устойчивость, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 1, 229–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:32:34

© 2009 г.

А. Визинеску*, Д. Греку*,
Р. Феделе†, С. Де Никола‡

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД МАДЕЛУНГА К ОБОБЩЕННОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

С помощью гидродинамического описания Маделунга недавно удалось обнаружить соответствие между решениями обобщенного нелинейного уравнения Шредингера и решениями обобщенных уравнений КдФ. Аналогичным образом рассматривается специальное нелинейное уравнение Шредингера с производной потенциала. В случае движения с неизменным профилем вектора скорости потока найдено семейство решений в виде уединенных волн и периодические решения (выраженные через эллиптические функции Якоби). Устойчивость яркой солитонной моды (низшего состояния) исследуется в предположении о применимости критерия Вахитова–Колоколова.

Ключевые слова: нелинейное уравнение в частных производных, обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, обобщенное уравнение КдФ, гидродинамический подход Маделунга.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1926 г. Маделунг предложил первое статистическое описание квантовой механики [1]. Если представить волновую функцию в виде $\Psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$, то уравнение Шредингера в одномерном случае можно записать как

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + mU(x)\Psi, \quad (1)$$

при этом оно становится эквивалентным двум уравнениям на “плотность жидкости” $\rho = |\Psi|^2$ и “скорость жидкости” $v = (\hbar/m)(\partial\theta/\partial x)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad (2)$$

*Department of Theoretical Physics, National Institute for Physics and Nuclear Engineering “Horia Hulubei”, Bucharest, Romania. E-mail: avisin@theory.nipne.ro

†University “Federico II, Naples”, Naples, Italy

‡Institute of Cybernetics “Eduardo Caianello”, Pozzuoli, Naples, Italy

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right)v = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3)$$

Первое из этих уравнений представляет собой уравнение непрерывности для плотности жидкости, а второе – уравнение движения для вектора потока жидкости. Интерпретация величины v как скорости также следует из представления плотности потока через эти новые переменные:

$$j = -i \frac{\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = \rho v. \quad (4)$$

В правой части уравнения (3), кроме обычного силового члена $\partial U / \partial x$, появляется квантовая составляющая $\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \right)$, которая в литературе обычно называется потенциалом Бома.

В дальнейшем усилиями многих авторов подход Маделунга получил более наглядное объяснение (см. работы [2], [3] и приведенную в них литературу) и были предложены его многочисленные применения в различных областях, от стохастической квантовой механики [4] и квантовой космологии [5] до квантовых поправок к электронно-позитронной плазме [6], квантовомеханических эффектов в микроэлектронных приборах [7] и квантовых эффектов динамики пучков в ускорителях высоких энергий [8].

Некоторое время назад в работах [9] подход Маделунга был применен для вывода интересного соответствия между обобщенным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) и обобщенными уравнениями КдФ. Это соответствие справедливо по крайней мере для решений типа уединенной волны. В недавней работе [10] в рамках этого же подхода было исследовано обобщенное НУШ с производной потенциала. При интегрировании соответствующих обобщенных уравнений КдФ был получен обширный класс решений типа уединенных волн и периодических решений [11]. Также была обнаружена интересная связь между цилиндрическим НУШ и цилиндрическим уравнением КдФ [12].

Перечислим вкратце рассматриваемые нами уравнения.

Обобщенное НУШ [9]

$$i\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - U(|\Psi|^2)\Psi = 0, \quad (5)$$

где U – некоторая функция от $|\Psi|^2$. При $U(|\Psi|^2) \propto |\Psi|^2$ уравнение (5) – это хорошо известное вполне интегрируемое НУШ. Интересен случай потенциала $U(|\Psi|^2) = q_1|\Psi|^{2p} + q_2|\Psi|^{4p}$, отвечающего при $p = 1$ нелинейности типа кубики-квинтики, которая имеет физически значимые применения.

Обобщенные НУШ с производной потенциала [10]

$$i\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + i\beta \frac{\partial}{\partial x} (U(|\Psi|^2)\Psi) = 0, \quad (6)$$

$$i\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + i\beta U(|\Psi|^2) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Уравнения (16) и (17) называются обобщенными уравнениями дНУШ-1 и дНУШ-2 соответственно. При $U(|\Psi|^2) = |\Psi|^2$ эти уравнения вполне интегрируемы [13], [14].

В настоящей работе рассматривается специальный класс **обобщенных НУШ с производной**:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2i\Psi^2 \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + U(|\Psi|^2)\Psi = 0, \quad (8)$$

где U – некоторая функция от $|\Psi|^2$; при $U(|\Psi|^2) = 4|\Psi|^4$ уравнение является вполне интегрируемым [15]. Особый характер уравнения (8) связан с формой нелинейного члена с производной $\Psi^2 \partial \Psi^* / \partial x$, который отличен от похожего на него члена в уравнениях (6), (7) и который не преобразуется к выражениям более общего вида. В следующем разделе будут представлены основные уравнения. В разделе 3 они интегрируются в случае стационарного профиля скорости потока. Легко находятся яркие солитоны и различные периодические решения. Последние становятся серыми (темными) солитонами в пределе $k \rightarrow 1$ (k – модуль эллиптической функции Якоби). В разделе 4 на основе хорошо известного критерия Вахитова–Колоколова (ВК) [16] и более позднего подхода Кузнецова [17] к решению уравнений из широкого класса НУШ с производными обсуждается устойчивость ярких солитонов. Мы предполагаем, что критерий ВК применим к уравнению (8), которое, как оказалось, не было включено в широкий класс уравнений НУШ, рассмотренных в работах [16], [17], поэтому применимость результатов работ [16], [17] к уравнению (8) представляет на сегодняшний день открытую проблему. Наконец, некоторые замечания и выводы приведены в разделе 5.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если подставить $\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$ в уравнение (8), то после разделения вещественной и мнимой частей получаются уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v + \rho^2) = 0 \quad (9)$$

и уравнение движения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (10)$$

где $\rho(x, t) = |\Psi|^2$ и $v(x, t) = \partial \theta(x, t) / \partial x$ суть соответственно плотность жидкости и ее скорость. Используя преобразования из работ [9], уравнение (10) можно привести к обобщенному уравнению КдФ

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + 2 \left[C_0(t) - \int \frac{\partial v}{\partial t} dx \right] \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + \left(\rho \frac{dU}{d\rho} + 2U \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\rho^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 4v \frac{\partial \rho^2}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $C_0(t)$ – произвольная функция.

Легко видеть, что не существует решения с постоянной скоростью потока. В самом деле, если $v = v_0$, то из уравнения непрерывности (9) получим

$$\rho(x, t) = f[x - (v_0 + 2\rho)t], \quad (12)$$

где $f(x) = \rho(x, 0)$ – начальное условие. Данное решение несовместно с дисперсионным уравнением движения (10), и это является общим свойством НУШ с производной [10].

Таким образом, существуют только решения с непостоянным профилем скорости потока. Записав $\rho(x, t) = \rho(\xi)$, $v(x, t) = v(\xi)$, где $\xi = x - u_0 t$, и интегрируя (9), получим

$$v = u_0 - \rho + \frac{A_0}{\rho}, \quad (13)$$

где A_0 – постоянная интегрирования. Заметим, что функция $C_0(t)$ здесь становится произвольной константой c_0 . Более того, $A_0 = 0$, если $\rho \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ (яркие солитоны); для темных солитонов $\rho \rightarrow \rho_0$, $v \rightarrow v_0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, константа A_0 имеет вид $A_0 = \rho_0(v_0 - u_0 + \rho_0)$. Уравнение типа КдФ (11) при этом записывается как

$$\frac{1}{4} \frac{d^3 \rho}{d\xi^3} + \left(\rho \frac{dU}{d\rho} + 2U \right) \frac{d\rho}{d\xi} + (2c + u_0^2) \frac{d\rho}{d\xi} + 3u_0 \frac{d\rho^2}{d\xi} - \frac{10}{3} \frac{d\rho^3}{d\xi} = 0, \quad (14)$$

где введена новая константа $c = c_0 + 3A_0$. Уравнение (14) можно проинтегрировать при $U(\rho) = q\rho^p$ для $p = 1, 2$, а также в случае комбинации кубики-квинтики. В следующем разделе приводятся разнообразные решения уравнения (8) – уединенные волны, периодические решения, волны типа серых и темных солитонов.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

3.1. Решения типа уединенных волн. Начнем список специальных решений уравнения (14) со случая $U(\rho) = q\rho^2$. Яркие солитоны получаются в качестве решений при $E = 2c + u_0^2 = -b^2 < 0$ и $u_0 > 0$. При $q < 5/2$, положив $\mu = (5 - 2q)/3$ и $\Delta = u_0^2 - \mu b^2 > 0$, получим решение в виде

$$\rho = \frac{b^2}{u_0 + \sqrt{\Delta} \operatorname{ch}(2b\xi)}. \quad (15)$$

При $q > 5/2$ решение имеет тот же вид (15), но с $\mu = (2q - 5)/3$ и $\Delta = u_0^2 + \mu b^2$. Напомним, что вполне интегрируемый случай ($q = 4$) отвечает $\mu = 1$ и $\Delta = u_0^2 + b^2$.

На основании формулы (15) легко вывести фазу $\theta(\xi) = \int (u_0 - \rho) d\xi$. При $q < 5/2$ имеем

$$\theta(\xi) = u_0 \xi + \frac{1}{\sqrt{\mu}} f(\xi), \quad (16)$$

где

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\Delta} e^{2b\xi} + u_0 + \sqrt{\mu} b}{\sqrt{\Delta} e^{2b\xi} + u_0 - \sqrt{\mu} b}. \quad (17)$$

Легко видеть, что $f(\xi)$ монотонно убывает,

$$f(-\infty) = \frac{1}{2} \ln \frac{u_0 + \sqrt{\mu}b}{u_0 - \sqrt{\mu}b}, \quad f(+\infty) = 1.$$

При $q > 5/2$

$$f(\xi) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta} e^{2\xi b} + u_0}{\sqrt{\mu}b}, \quad (18)$$

эта функция также монотонно убывает, $f(-\infty) = \operatorname{arctg}(u_0/\sqrt{\mu}b)$, $f(+\infty) = \pi/2$.

Аналогично можно найти яркие солитоны при $U(\rho) = q\rho$ или при потенциале типа кубики-квинтики $U(\rho) = q_1\rho + q_2\rho^2$.

3.2. Периодические решения. Далее мы будем обсуждать периодические решения, причем будем рассматривать лишь интегрируемый случай $U = 4\rho^2$. Интегрируя дважды уравнение (14), получим

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d\rho}{d\xi} \right)^2 = -P(\rho), \quad (19)$$

где $P(\rho) = \rho^4 + 2u_0\rho^3 + E\rho^2 + B\rho + D$, а B и D – константы.

Интересен случай, когда $P(\rho)$ имеет четыре различных корня, из которых хотя бы два положительны. Обозначим эти корни через $\rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$ и будем считать, что корни ρ_1, ρ_2 положительны. Напомним, что интерес представляет область значений $\rho_2 < \rho < \rho_1$, в которой $-P(\rho) > 0$. Тогда решение уравнения (17) записывается через эллиптический интеграл:

$$\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{dt}{\sqrt{(\rho_1 - t)(t - \rho_2)(t - \rho_3)(t - \rho_4)}} = 2\xi. \quad (20)$$

Результат выражается через эллиптическую функцию Якоби (см. справочник [18], формула 257.00):

$$\rho = \rho_4 + \frac{\rho_1 - \rho_4}{1 + m^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad (21)$$

где $\operatorname{sn}(u, k)$ – эллиптическая функция Якоби,

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2 - \rho_4}, & k^2 &= \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_4)}{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_4)}, \\ u &= \frac{2\xi}{g}, & g &= \frac{2}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_4)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Другой интересный случай имеет место, если все четыре вещественных корня оказываются положительными (тогда $u_0 < 0$) и $\rho \in (\rho_4, \rho_3)$. Решение выражается через интеграл:

$$\int_{\rho}^{\rho_4} \frac{dt}{\sqrt{(\rho_1 - t)(\rho_2 - t)(\rho_3 - t)(t - \rho_4)}} = 2\xi, \quad (23)$$

а результат записывается в виде

$$\rho = \frac{\rho_4 + \rho_1 m^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 + m^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\xi}{g}, & g &= \frac{2}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_4)}}, \\ m^2 &= \frac{\rho_3 - \rho_4}{\rho_1 - \rho_3}, & k^2 &= m^2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2 - \rho_4}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если найдена функция $\rho(\xi)$, то фазу $\theta(\xi)$ можно вычислить, используя соотношение

$$\theta(\xi) = u_0 \xi - \int \rho(\xi) d\xi + A_0 \int \frac{d\xi}{\rho(\xi)}. \quad (26)$$

Здесь A_0 связана со значением скорости при $\xi = 0$: если $v(\xi) = v_0$ при $\xi = 0$, то $A_0 = \rho(0)[v_0 - u_0 + \rho(0)]$. Интегралы в выражении (26) можно выразить через неполные эллиптические интегралы третьего рода

$$\int_0^u \frac{du'}{1 + m^2 \operatorname{sn}^2 u'} = \Pi(u, -m^2). \quad (27)$$

Например, в случае решения (24) получим

$$\theta(\xi) = \left(u - \rho_1 + \frac{A_1}{\rho_1} \right) \xi + \frac{g}{2} (\rho_1 - \rho_4) \Pi(u, -m^2) + A_1 \frac{\rho_1 - \rho_4}{\rho_1 \rho_4} \Pi(u, -m_1^2), \quad (28)$$

где $m_1^2 = (\rho_1/\rho_4)m^2$. Более сложный случай, который тем не менее может быть решен в терминах эллиптических функций Якоби, возникает, когда многочлен $P(\rho)$ имеет два несовпадающих положительных корня ($0 < \rho_2 < \rho < \rho_1$) и два комплексно сопряженных корня ($\rho_3 = \rho_4^*$) (см. справочник [18], формула 259.00).

3.3. Предельные случаи. Рассмотрим теперь полученные решения в предельном случае, когда $k^2 \rightarrow 1$ и $\operatorname{sn} u \rightarrow \operatorname{th} u$. В обоих случаях, обсуждаемых выше, это происходит при $\rho_2 = \rho_3$. Для решений из п. 3.1 соотношение (21) принимает вид

$$\rho = \rho_4 + \frac{\rho_1 - \rho_4}{1 + m^2 \operatorname{th}^2(2\xi/g)} \quad (29)$$

и описывает солитон типа яркого солитона, но с исчезающими значениями на бесконечности ($\rho(\xi) = \rho_1$ при $\xi = 0$, в то время как $\rho(|\xi|) \rightarrow \rho_2$ при $|\xi| \rightarrow \infty$). Если $\rho_2 = 0$, то это решение переходит в солитон яркого типа, найденный ранее.

В случае решений из п. 3.2 соотношение (24) приобретает вид

$$\rho = \frac{\rho_4 + \rho_1 m^2 \operatorname{th}^2 u}{1 + m^2 \operatorname{th}^2 u} \quad (30)$$

и описывает серый солитон ($\rho(0) = \rho_4$, $\rho(\infty) = \rho_3$). При $\rho_4 = 0$ уравнение (30) описывает решение типа темного солитона.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

Фундаментальным вопросом при исследовании решений нелинейных эволюционных уравнений является их устойчивость относительно малых возмущений. В дальнейшем мы ограничим рассмотрение возмущениями, которые сохраняют симметрию уравнения, т.е. имеют ту же размерность, что и само решение. Для обобщенного НУШ

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + f(|\Psi|)\Psi = 0 \quad (31)$$

устойчивость его (ярких) солитонных решений исследовалась в рамках различных подходов (см. работы [16], [19]–[21] и статью [22], в которой приведен обзор последних результатов в трехмерном случае). Наиболее устойчивым должно быть основное состояние, которое для уравнения (31) имеет вид

$$\Psi = e^{i\omega t} \Phi(x, \omega) \quad (32)$$

с вещественнозначной функцией $\Phi(x, \omega)$. Критерий устойчивости был сформулирован Вахитовым и Колоколовым в работе [16]. Положив

$$N(\omega) = \int \Phi^2(x, \omega) dx,$$

получим, что (яркое) основное состояние теряет устойчивость, если выполняется “условие наклона”

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} < 0. \quad (33)$$

Доказательство критерия ВК [16], [19], [20] использует линеаризацию задачи в окрестности основного состояния и сводится к исследованию задачи на собственные значения для оператора, представляющего собой произведение двух линейных операторов Шредингера, один из которых в случае уравнений типа НУШ положительно определен, а другой имеет одно отрицательное собственное значение. Это свойство играет ключевую роль при доказательстве критерия ВК. Интересный и физически значимый анализ, выходящий за рамки линейного приближения, был произведен в работе [22], в которой в случае почти адиабатической и медленно меняющейся во времени неустойчивости было получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для $\omega(t)$ и было найдено несколько сценариев эволюции неустойчивости. Впоследствии подход к исследованию широкого класса НУШ с производными был развит Кузнецовым [17].

Критерий ВК применялся для классов уравнений типа НУШ, среди которых нет уравнения (8), и вопрос использования этого критерия в случае уравнения (8) на сегодняшний день остается открытым. Отметим, что для уравнения (8) соответствующая линеаризованная задача не сводится к задаче на собственные значения, как это происходит в случае мультипликативного оператора (см. детали в работе [17]).

С другой стороны, подход Кузнецова применим к широкому классу НУШ с производными, который также, к сожалению, не включает в себя уравнение (8), и вопрос о применимости к нему подхода Кузнецова тоже остается открытым.

Таким образом, очевидно, что прямое применение обоих методов требует дополнительных доказательств. Тем не менее в случае критерия ВК можно с определенной степенью уверенности “предположить”, что если ограничить рассмотрение солитоноподобными стационарными состояниями (в частности, основным состоянием), то этот критерий будет справедлив и для уравнения (8), так как он имеет простое физическое объяснение. В самом деле, видно, что, представив скорость в виде $V(x, t) = v(x, t) + \rho(x, t) = \partial\theta(x, t)/\partial x + \rho(x, t)$, мы можем привести уравнения (9), (10) к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0, \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)V = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial U'}{\partial x}, \quad (35)$$

где $U' = U'(x, t) = U[\rho(x, t)] + 2V(x, t)\rho - (5/2)\rho^2(x, t)$. Стационарные решения уравнения (8) отвечают условию $V = V_0 = \text{const}$, которое эквивалентно условию $\partial\theta(x, t)/\partial x + \rho(x, t) = V_0$. Заметим, что в рамках гидродинамического представления Маделунга V представляет собой “подходящую” скорость потока (см. уравнение (34)). Соответственно, ограничивая наш анализ только стационарными состояниями, получим, что два уравнения (34), (35) эквивалентны стационарному НУШ с мультипликативным нелинейным оператором потенциальной энергии

$$U'(x, t) = U[|\Psi(x, t)|^2] + 2V_0|\Psi(x, t)|^2 - \frac{5}{2}|\Psi(x, t)|^4.$$

Отсюда можно заключить, что стационарные решения НУШ такого типа отвечают стационарным решениям уравнения (8). В частности, основное состояние получается из условия $V_0 = 0$ (т.е. $\partial\theta(x, t)/\partial x + \rho(x, t) = 0$). Аналогичное соответствие имеет место и в случае задачи об устойчивости стационарных состояний.

Апостериори мы можем дать ответ на вопрос, справедливо это предположение или нет. Для этого возьмем здесь и далее $U(|\Psi|^2) = q|\Psi|^2$ и применим критерий ВК для исследования основного состояния уравнения (8). Рассмотрим стационарное (основное) состояние вида

$$\Psi(x, t) = e^{i\omega t} e^{i\Theta(x, \omega)} \Phi(x, \omega), \quad (36)$$

в котором обе функции $\Theta(x, \omega)$ и $\Phi(x, \omega)$ вещественнозначны. Подставляя (36) в (8) и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\frac{d\Theta}{dx} = -\Phi^2 \quad (37)$$

и (после однократного интегрирования) имеем

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = \omega\Phi^2 - q\Phi^4 + \frac{5}{3}\Phi^6. \quad (38)$$

Решение последнего уравнения имеет вид ($q > 0$, $\omega > 0$)

$$\Phi = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{q + \sqrt{\Delta} \operatorname{ch}(2\sqrt{\omega}x)}}, \quad (39)$$

где величина $\Delta = q^2 - 5\omega/3$ предполагается положительной, $q\sqrt{3/5\omega} > 1$. Фаза $\Theta(x, \omega)$ легко вычисляется из (37):

$$\Theta(x, \omega) = \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{arccth} \left(\sqrt{\frac{3\Delta}{5\omega}} \right) \left(e^{2\sqrt{\omega}x} + \frac{q}{\sqrt{\Delta}} \right). \quad (40)$$

Данная функция монотонно убывает по x ,

$$\Theta(-\infty, \omega) = \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{arccth} \left(q\sqrt{\frac{3}{5\omega}} \right), \quad \Theta(+\infty, \omega) = 0.$$

Это с очевидностью следует из (37), поскольку производная $\partial\Theta/\partial x$ всюду отрицательна. К правой части выражения (40) следует добавить положительную постоянную Θ_0 , чтобы обеспечить положительность $\Theta(x, \omega)$ на всей вещественной оси, и при этом решение $\Psi(x, t)$, задаваемое выражением (36), вполне может соответствовать вещественнозначному основному состоянию.

С учетом (39) можно легко вычислить величину $N(\omega)$:

$$N(\omega) = -(\Theta(+\infty, \omega) - \Theta(-\infty, \omega)) = \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{arccth}(z(\omega)), \quad z(\omega) = \sqrt{\frac{3}{5}} q \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Поскольку $\frac{dz(\omega)}{d\omega} < 0$ и $\frac{d(\operatorname{arccth} z)}{dz} < 0$, очевидно, что $\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{dN(z)}{dz} \frac{dz}{d\omega} > 0$, и в соответствии с критерием ВК стационарное состояние (39) устойчиво.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

Можно сделать два основных вывода.

Во-первых, отметим полезность подхода Маделунга при установлении соответствия между обобщенным НУШ с производной (8) и обобщенным уравнением КдФ. Если профиль скорости потока v постоянен, то последнее уравнение легко интегрируется, что позволяет построить яркие, серые и темные солитонные решения, равно как и периодические решения. Насколько известно авторам, некоторые из этих решений не встречались ранее в литературе, что подчеркивает ценность предлагаемого подхода. Интересно, что гидродинамическое представление Маделунга было также использовано в настоящей работе для объяснения гипотезы о возможности применения критерия ВК при исследовании стационарных решений уравнения (8).

Во-вторых, мы рассмотрели проблему устойчивости основного состояния относительно малых возмущений. Применяя критерий ВК, можно доказать, что основное состояние устойчиво, что оправдывает апостериори наше предположение о применимости критерия ВК к уравнению (8).

Авторам неизвестно ни одного строгого доказательства применимости критерия ВК в случае обобщенного НУШ с производной. Следует отметить, что различие между обычным обобщенным НУШ и обобщенным НУШ с производной становится понятным с самого начала из определений стационарных состояний (32), (36). В случае обобщенного НУШ с производной необходимо вводить фазовую составляющую $\Theta(x, \omega)$, что затрудняет дальнейшие математические рассуждения. Вместо

того чтобы исследовать свойства вещественнозначной функции $\Phi(x, \omega)$, необходимо вводить систему с двумя компонентами – вещественной и мнимой частями функции Ψ , при этом все уравнения становятся (2×2) -матричными уравнениями. Но все же и в этом случае, как и в случае обобщенного НУШ, линеаризация нелинейного уравнения содержит голдстоуновскую моду, отвечающую нулевому собственному значению. Наличие этой моды представляет собой ключевой пункт в доказательстве критерия ВК, и поэтому нам представляется достаточно вероятным, что должно существовать строгое доказательство справедливости выдвинутой нами гипотезы также и в случае обобщенного НУШ с производной.

С другой стороны отметим, что в настоящее время неизвестен способ прямого применения подхода Кузнецова к анализу устойчивости в случае НУШ с производной (8). Возможность применения этого подхода, а также строгое доказательство этой применимости в данном случае остается открытой задачей. Тем не менее на основе физических рассуждений, сходных с теми, которые были использованы в процессе применения критерия ВК, можно заключить, что подход Кузнецова применим к исследованию стационарных солитоноподобных решений уравнения (8). В дальнейших исследованиях мы надеемся расширить рамки этих методов и рассмотреть более сложные сценарии поведения систем, например систем с нелинейностью типа кубики-квинтики.

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту за тщательное прочтение работы и сделанные при этом ценные замечания и предложения. Работа была проведена в рамках 15-й итальяно-румынской программы по науке и технологиям. Работа А. Визинеску и Д. Греку частично поддержана CNCSIS Program IDEI-325/2007, Румыния.

Список литературы

- [1] E. Madelung, *Z. Phys.*, **40** (1926), 332–326.
- [2] D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**:2 (1952), 166–179.
- [3] D. Bohm, B. J. Hiley, P. N. Kaloyerou, *Phys. Rep.*, **144**:6 (1987), 321–375.
- [4] G. Auletta, *Foundation and Interpretation of Quantum Mechanics*, World Sci., Singapore, 2000.
- [5] J. C. Vink, *Nucl. Phys. B*, **369**:3 (1992), 707–728; N. Pinto-Neto, *Found. Phys.*, **35**:4 (2005), 577–603.
- [6] F. Haas, L. G. Garcia, J. Goedert, G. Manfredi, *Phys. Plasmas*, **10**:10 (2003), 3858–3866; F. Haas, G. Manfredi, M. Feix, *Phys. Rev. E*, **62**:2 (2000), 2763–2772.
- [7] P. A. Markowich, C. A. Ringhofer, C. Schmeiser, *Semiconductor Equations*, Springer, Berlin, 1990.
- [8] R. Fedele, D. Anderson, M. Lisak, *Eur. Phys. J. B*, **49**:3 (2006), 275–281.
- [9] R. Fedele, *Phys. Scripta*, **65**:6 (2002), 502–508; R. Fedele, H. Schamel, *Eur. Phys. J. B*, **27**:3 (2002), 313–320; R. Fedele, H. Schamel, P. K. Shukla, *Phys. Scripta*, **T98**:1 (2002), 18–23; R. Fedele, H. Schamel, V. I. Karpman, P. K. Shukla, *J. Phys. A*, **36**:4 (2003), 1169–1173.
- [10] D. Grecu, A. T. Grecu, A. Visinescu, R. Fedele, S. De Nicola, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**, Suppl. 3 (2008), 209–219.
- [11] A. Visinescu, R. Fedele, D. Grecu, S. De Nicola, “Periodic solutions of NLS equation in Madelung fluid description”, Talk of International Conference on Fundamental and Applied Research in Physics FARPhys 2007 (25–28 October, Iassy, Romania), 2007.

- [12] R. Fedele, S. De Nicola, D. Grecu, P.K. Shukla, A. Visinescu, "Cylindrical nonlinear Schrödinger equation versus cylindrical Korteweg–de Vries equation", *Frontiers in Modern Plasma Physics*, AIP Conf. Proc., **1061**, eds. P.K. Shukla, B. Eliasson, L. Stenflo, Melville, NY, 2008, 273–281.
- [13] D.J. Kaup, A.C. Newell, *J. Math. Phys.*, **19**:4 (1978), 798–801; T. Kawata, H. Inoue, *J. Phys. Soc. Japan*, **44**:6 (1978), 1968–1976; X.-J. Chen, J. Yang, W.K. Lam, *J. Phys. A*, **39**:13 (2006), 3263–3274.
- [14] A. Nakamura, H.H. Chen, *J. Phys. Soc. Japan*, **49**:2 (1980), 813–816.
- [15] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *J. Math. Phys.*, **21**:5 (1980), 1006–1015; V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov, *Bulgar. J. Phys.*, **10**:2 (1983), 130–143; T. Tsuchida, *J. Phys. A*, **35**:36 (2002), 7827–7847.
- [16] Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, *Изв. вузов. Сер. радиофизика*, **16**:7 (1973), 1020–1028.
- [17] Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ*, **116**:1 (1999), 299–317.
- [18] P.F. Byrd, M.D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Grundlehren Math. Wiss., **67**, Springer, Berlin, 1971.
- [19] E. A. Kuznetsov, A. M. Rubenchik, V. E. Zakharov, *Phys. Rep.*, **142**:3 (1986), 103–165.
- [20] M. I. Weinstein, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**:1 (1986), 51–67.
- [21] S. Cuccagna, "A survey on asymptotic stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations", *Dispersive Nonlinear Problems in Mathematical Physics*, Quad. Mat., **15**, ed. P.D'Ancona V. Georgev, Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2004, 21–57.
- [22] D. E. Pelinovsky, V. V. Afanasjev, Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. E*, **53**:2 (1996), 1940–1953.