Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили,
Гравитационные волны в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 2, 270–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:25:44

© 2009 г.

С. С. Герштейн*, А. А. Логунов*,
М. А. Мествиришвили†

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Показано, что в релятивистской теории гравитации с гравитоном, имеющим массу покоя, гравитационные волны благодаря условию причинности не имеют нефизических “духовых” состояний.

Ключевые слова: масса покоя гравитона, гравитационные волны.

В работах [1], [2] показано, что в линеаризованной теории гравитации введение массы покоя гравитона в поле со спинами 2 и 0 приводит при объяснении гравитационных эффектов в Солнечной системе к появлению нефизических “духовых” состояний, обязанных спину 0. “Духовые” состояния появляются и в гравитационном излучении, поэтому сложилось мнение, что это доказывает, что масса покоя гравитона точно равна нулю. Однако авторы работ [1], [2] в своих исследованиях не рассматривали гравитационное поле как тензорное *физическое поле* в пространстве Минковского, создающее своим действием эффективное риманово пространство и, следовательно, свой конус причинности. Именно поэтому не возникло *условие причинности*, которое имеет место только в релятивистской теории гравитации (РТГ) [3], поскольку в ней имеются два конуса причинности. В общей теории относительности (ОТО) имеется только конус причинности риманова пространства.

В работе [4] при изучении гравитационного излучения было обнаружено, что учет нелинейных членов позволяет устранить “духовые” состояния. Такой подход также разделяли авторы настоящей работы, и он нашел отражение в монографии [3]. Здесь мы покажем, что в РТГ отрицательный поток энергии и, следовательно, “духовые” состояния в гравитационной волне исключаются и без учета нелинейных членов, оказывается, достаточно только соблюдать условие причинности РТГ. Мы, следуя книгам [5]–[7], исходим из возможности существования свободного гравитационного

*Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Semen.Gershtein@ihep.ru, Anatoly.Logunov@ihep.ru

†Институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

поля – гравитационных волн – как объективной физической реальности подобно электромагнитным волнам в пустоте.

Для простоты и точности анализа рассмотрим в пустоте слабую плоскую гравитационную волну с амплитудой $a^{\mu\nu}(k)$, распространяющуюся вдоль оси Z ,

$$\Phi^{\mu\nu} = a^{\mu\nu}(k) \cos kx, \quad (1)$$

где $k_\nu = (\omega, 0, 0, -q\omega)$, $q^2 = 1 - m^2/\omega^2$, m – масса покоя гравитона.

Мы пользуемся системой единиц, в которой $G = \hbar = c = 1$. В пустоте основные уравнения РТГ в линейном приближении в инерциальной системе в галилеевых координатах для слабого гравитационного поля имеют вид

$$\square \Phi^{\mu\nu} + m^2 \Phi^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_\nu \Phi^{\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

Волна (1) является решением этих уравнений. Слабое гравитационное поле $\Phi^{\mu\nu}$ создает эффективное риманово пространство с метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \Phi, \quad \Phi_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = \Phi;$$

аналогично выражается и тензор $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \Phi. \quad (4)$$

Отсюда следует, что скалярная кривизна R эффективного риманова пространства равна

$$R = \frac{1}{2} m^2 \Phi.$$

Но оказывается (это будет видно в дальнейшем), что ее влияние на поток энергии отсутствует. Интервал пространства Минковского в инерциальной системе в галилеевых координатах равен

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5)$$

Поскольку в РТГ гравитационное поле рассматривается как тензорное физическое поле, развивающееся в пространстве Минковского, конус причинности возникшего эффективного риманова пространства не должен выходить за пределы конуса причинности пространства Минковского. Это и есть принцип причинности РТГ. Согласно этому принципу в эффективном римановом пространстве, которое создано физическим полем, времениподобные и изотропные геодезические этого пространства не должны выходить за пределы границы конуса пространства Минковского. Именно этому физическому требованию нам необходимо дать математическую формулировку.

В РТГ в *гиперболические динамические уравнения* гравитационного поля члены со вторыми производными по координатам пространства-времени входят в форме

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (6)$$

Уравнение характеристик гравитационных уравнений определяется только членами с высшими производными (6):

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение определяет фронт волны поля, если поле не имеет массы покоя. *Характеристики определяют конус причинности эффективного риманова пространства.* В уравнении характеристик (7) для каждого члена со второй производной в (6) присутствует соответствующий член. Если в (6) отсутствует какой-то член со второй производной, то в (7) соответствующий член не появится.

Времениподобные геодезические линии в соответствии с (7) описываются уравнениями Гамильтона–Якоби

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 1. \quad (8)$$

Весь набор геодезических линий в соответствии с (6) определяется уравнениями

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ -1, \end{cases}$$

где равенства в первой и второй строках определяют изотропные и времениподобные геодезические линии, тогда как третья строка соотношения описывает пространственноподобные геодезические линии.

Таким образом, на основании (7) и (8) изотропные и времениподобные геодезические линии, соответствующие (6), удовлетворяют неравенству

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \geq 0. \quad (9)$$

Это неравенство можно записать в форме

$$g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \geq 0, \quad (10)$$

где контрвариантный вектор p^α равен

$$p^\alpha = g^{\alpha\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (11)$$

Чтобы конус причинности эффективного риманова пространства находился внутри конуса причинности пространства Минковского, необходимо и достаточно выполнить следующее неравенство:

$$\gamma_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \geq 0. \quad (12)$$

Неравенства (10) и (12) можно записать в форме, непосредственно связанной с геодезическими движениями (7) и (8), находящимися в точном соответствии с (6):

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \geq 0, \quad (13)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} p_\mu p_\nu \geq 0, \quad (14)$$

где ковариантный вектор p_ν равен

$$p_\nu = \frac{\partial S}{\partial x^\nu}. \quad (15)$$

Условия причинности (13), (14) налагают определенные жесткие требования на решения уравнений гравитационного поля. Только решения, удовлетворяющие неравенствам (13), (14), имеют в теории физический смысл. Неравенства (13), (14) непосредственно связаны с гиперболическими уравнениями гравитационного поля, поскольку они установлены на основе структуры вторых производных (6) динамических уравнений. Именно эта математическая формулировка принципа причинности и обеспечивает нахождение риманова конуса причинности внутри конуса причинности пространства Минковского в соответствии с динамической структурой (6).

Ранее в монографии [3] мы осознали не в должной мере факт необходимости установления прямой связи принципа причинности с гиперболической динамической системой уравнений. В случае статической системы уравнения гравитационного поля уже не являются гиперболическими, и поэтому такой прямой связи уже не будет, однако в этом случае условие причинности можно использовать и в виде неравенств (10), (12). Учитывая равенство

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu},$$

где

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \Phi^{\mu\nu},$$

неравенства (13), (14) в инерциальной системе в галилеевых координатах можно переписать в виде

$$(\gamma^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu}) p_\mu p_\nu \geq 0, \quad (16)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} (\gamma^{\alpha\mu} + \Phi^{\alpha\mu}) (\gamma^{\beta\nu} + \Phi^{\beta\nu}) p_\mu p_\nu \geq 0. \quad (17)$$

Для волны (1) имеет место следующее уравнение характеристики:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = g^{00} (p_0)^2 + 2g^{03} p_0 p_3 + g^{33} (p_3)^2 = 0.$$

Для слабого гравитационного поля и конкретного движения (1) вдоль оси Z неравенство (16) выполняется, если величина x , определенная как $x = p_3/p_0$, ограничена неравенствами

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi^{03} - 1 - \frac{1}{2} (\Phi^{00} + \Phi^{33}), \\ x_2 &= \Phi^{03} + 1 + \frac{1}{2} (\Phi^{00} + \Phi^{33}). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом мы определили совокупность времениподобных векторов, лежащих внутри конуса причинности, который образован характеристиками, полученными из (6), для движения (1), ведущего к метрике (4).

Неравенство (17) будет выполняться, если

$$x'_1 \leq x \leq x'_2,$$

где

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2\Phi^{03} - 1 - \Phi^{00} - \Phi^{33}, \\ x'_2 &= 2\Phi^{03} + 1 + \Phi^{00} + \Phi^{33}. \end{aligned} \quad (20)$$

Конус причинности эффективного риманова пространства находится внутри конуса причинности пространства Минковского тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$x'_1 \leq x_1, \quad x_2 \leq x'_2, \quad (21)$$

из которых, учитывая (19), (20), получим

$$\Phi^{00} \pm 2\Phi^{03} + \Phi^{33} \geq 0. \quad (22)$$

Из уравнения (3) находим для волны (1)

$$\Phi^{00} = q\Phi^{03}, \quad \Phi^{03} = q\Phi^{33}. \quad (23)$$

Подставляя эти равенства в (22), получим

$$(q \pm 1)^2 \Phi^{03} \geq 0. \quad (24)$$

Из этого неравенства и решения (1) следует, что

$$\Phi^{03} \equiv 0, \quad (25)$$

а поэтому на основании (23) мы можем также записать равенства

$$\Phi^{00} \equiv 0, \quad \Phi^{33} \equiv 0. \quad (26)$$

Принцип причинности в РТГ выбирает физическое решение уравнений гравитации. Из (25), (26) следует, что продольно-продольные компоненты в решении в форме волны (1) отсутствуют. Именно поэтому в потоке энергии не возникает член вида

$$R\Phi^{03} = \frac{1}{2} m^2 \Phi\Phi^{03},$$

поскольку он тождественно равен нулю. При массе покоя гравитона, равной нулю, равенства (25), (26) обычно получают, используя калибровочные преобразования. Здесь же они следуют из требования принципа причинности. Это и обеспечивает положительность потока энергии в РТГ при наличии массы покоя гравитона.

В РТГ в квадратичном приближении в галилеевых координатах поток гравитационной энергии определяется *тензорной* величиной [3], [4]

$$t_g^{\epsilon\lambda} = \frac{1}{32\pi} \gamma^{\epsilon\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \left(\partial_\alpha \Phi_\nu^\tau \partial_\beta \Phi_\tau^\nu - \frac{1}{2} \partial_\alpha \Phi \cdot \partial_\beta \Phi \right). \quad (27)$$

Подъем и опускание индексов в поле $\Phi^{\mu\nu}$ осуществляется с помощью метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$. Согласно уравнению (3) для решения (1) имеют место равенства

$$a^{10} = qa^{13}, \quad a^{20} = qa^{23}. \quad (28)$$

Учитывая (1), а также равенства (25), (26), (28), на основании (27) после усреднения по времени для волны (1) получим

$$t_g^{03} = \frac{1}{32\pi} q\omega^2 \left\{ (a_1^2)^2 + \frac{1}{4} (a_1^1 - a_2^2)^2 + \frac{m^2}{\omega^2} [(a_3^1)^2 + (a_3^2)^2] \right\}. \quad (29)$$

Отсюда следует, что в плотности потока волны (1) присутствуют только поперечно-поперечные компоненты a_1^1 , a_2^2 , a_1^2 , а также продольно-поперечные компоненты a_3^1 , a_3^2 , a_0^1 , a_0^2 , причем последние в потоке энергии (29) умножаются на величину m^2/ω^2 . Продольно-продольные компоненты в волне (1) отсутствуют. Следует отметить, что согласно РТГ в данной задаче можно осуществить непрерывный переход к массе гравитона, равной нулю.

Таким образом, из (29) следует, что в РТГ наличие массы покоя гравитона не приводит к появлению нефизических “духовых” состояний. В РТГ “духовые” состояния не возникают и при объяснении эффектов в Солнечной системе, при этом на расстоянии от источника $r \gg r_g = 2M$ имеет место непрерывный переход к массе покоя гравитона, равной нулю. Масса покоя гравитона в РТГ с необходимостью возникает, если мы начинаем рассматривать гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского.

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. И. Денисову, В. А. Петрову, А. П. Самохину, К. А. Свешникову, Н. Е. Тюрину за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. И. Захаров, *Письма в ЖЭТФ*, **12**:9 (1970), 447–449.
- [2] Н. van Dam, М. Veltman, *Nucl. Phys. B*, **22**:2 (1970), 397–411.
- [3] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 2006.
- [4] Ю. М. Лоскутов, *ТМФ*, **107**:2 (1996), 329–343.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. II. Теория поля*, Физматлит, М., 2001.
- [6] А. С. Эддингтон, *теория относительности*, ГТТИ, Л.-М., 1934.
- [7] А. Эйнштейн, “О гравитационных волнах”, *Работы по теории относительности* 1905–1920, Собрание научных трудов в 4-х томах, Т. I, ред. И. Е. Тамм, Я. А. Смодинский, Б. Г. Кузнецов, Наука, М., 1965, 631–646.

Поступила в редакцию 22.12.2008