Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Загородний, Иерархия Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона и кинетическая теория пылевой плазмы, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 2, 276–289

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 10:54:33

© 2009 г.

А. Г. Загородний*

ИЕРАРХИЯ БОГОЛЮБОВА–БОРНА–ГРИНА–КИРКВУДА–ИВОНА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрено современное состояние последовательной кинетической теории пылевой плазмы. Представлен вывод уравнений для микроскопических фазовых плотностей плазменных частиц и зерен. Такие уравнения используются для обобщения иерархии Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона на случай пылевой плазмы и для вывода кинетических уравнений с учетом как упругих, так и неупругих столкновений частиц. Кроме того, дается кинетическое описание эффективных потенциалов взаимодействия типа “зерно–зерно”.

Ключевые слова: ББГКИ-иерархия, кинетическое уравнение, пылевая плазма, эффективный потенциал, динамическое экранирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы – применение развитых Н. Н. Боголюбовым методов статистической механики к кинетическому описанию пылевой плазмы.

Основы кинетической теории плазмы были заложены Н. Н. Боголюбовым в его знаменитой работе [1]. Одним из ключевых моментов этой теории является иерархия Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) для последовательности функций распределения. Н. Н. Боголюбов определил такую иерархию в наиболее общем виде. Он показал, что, используя принцип полного ослабления начальных корреляций и предполагая существование иерархии характеристических времен, можно редуцировать ББГКИ-иерархию для систем с кулоновским взаимодействием и вывести замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения (кинетическое уравнение Боголюбова–Балеску–Ленарда).

Кроме того, метод Боголюбова был успешно применен для кинетического описания плазмы в терминах микроскопической фазовой плотности (микроскопической функции распределения и ее моментов [2]–[4]). Такой подход используется при изучении плазменных флуктуаций; кроме того, его можно применять для вывода кинетических уравнений. На основании этого подхода было решено много важных задач в теории плазмы (см., например, работы [5]–[8] и цитируемую в них литературу).

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина.
E-mail: azagorodny@bitp.kiev.ua

Идеи Боголюбова создают естественную основу для теоретического описания пылевой плазмы (плазмы, состоящей из электронов, ионов и пылевых частиц (зерен), непрерывно поглощающих электроны и ионы и таким образом аккумулирующих очень большой электрический заряд, вплоть до $10^3 \div 10^5$ зарядов электрона). Такая плазма интенсивно изучалась в течение последних двадцати лет. Кроме важности исследований пылевой плазмы для понимания и использования множества явлений как в природе, так и в лабораторных условиях, отметим, что пылевая плазма является важным объектом и с фундаментальной точки зрения [9], [10]. В частности, возможность экспериментально наблюдать кристаллические структуры, их образование и плавление дает уникальную перспективу проверки предсказаний теории фазовых переходов в многочастичных системах. Как будет показано ниже, метод Боголюбова позволяет обобщить кинетические уравнения для обычной плазмы на случай пылевой плазмы, когда происходит поглощение электронов и ионов зернами, и таким образом сформулировать основу для последовательной кинетической теории пылевой плазмы [11], [12].

Из соображений простоты во многих случаях разумно описывать коллективное поведение подсистемы зерен в терминах эффективных потенциалов взаимодействия зерно–зерно. Очевидно, подобные потенциалы следует вычислять с учетом поглощения зернами плазменных частиц, а также эффектов нелинейного экранирования. Обычно такие потенциалы вычисляются на основании численных решений соответствующих граничных задач или с помощью численного моделирования. Однако описание некоторых интересных явлений, наблюдаемых в экспериментах с пылевой плазмой, таких как образование пылевых кристаллов, распространение пылевых акустических волн, генерация нелинейных пылевых структур в плазме, требует знания аналитических соотношений для эффективных потенциалов. Эти соотношения можно получить из кинетических уравнений с эффективными точечными стоками [13], [14], которые следуют из обсуждавшихся выше строгих уравнений.

В настоящей работе мы применяем микроскопическую модель пылевой плазмы, для того чтобы сформулировать основные принципы кинетической теории и найти явные соотношения для эффективных потенциалов зерен с учетом столкновений плазменных частиц и влияния полей внешних сил, если таковые имеются.

В разделе 2 мы воспроизводим строгие уравнения для микроскопических фазовых плотностей (уравнения Климонтовича) в случае учета поглощения электронов и ионов зернами и контактных столкновений зерно–зерно. Затем в разделе 3 мы формируем соответствующую ББГКИ-иерархию для пылевой плазмы и используем ее для вывода кинетических уравнений. В некоторых специальных случаях воспроизведены результаты, полученные ранее другими авторами. В разделе 4 введенные уравнения применяются для вычисления эффективных потенциалов зерен. В разделе 5 представлен анализ стационарного экранирования. Изучается влияние столкновений плазменных частиц на эффективный потенциал взаимодействия зерно–зерно и обсуждается задача экранирования зерен в плазме при наличии внешнего электрического поля.

2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНОВ ЗЕРНАМИ

В случае пылевой плазмы, состоящей из электронов, ионов и монодисперсных зерен, в предположении, что каждое зерно поглощает все встречаемые им электроны и ионы, выражение для микроскопической фазовой плотности плазменных частиц имеет вид

$$\mathcal{F}_\alpha(X, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \mathcal{F}_{i\alpha}(X, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(X - X_\alpha(t)) \theta(t_{i\alpha} - t), \quad X \equiv \mathbf{r}, \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

где $t_{i\alpha}$ – время столкновения i -й плазменной частицы с каким бы то ни было зерном (т.е. время поглощения i -й частицы зерном), а нижний индекс α указывает тип плазменной частицы ($\alpha = e, i, g$ для электронов, ионов и зерен соответственно). В отличие от обычной микроскопической фазовой плотности, определение (2.1) содержит ступенчатую функцию Хевисайда $\theta(t_{i\alpha} - t)$. Это означает, что электроны и ионы существуют только до первого столкновения с зерном.

Комбинируя производные функции $\mathcal{F}_\alpha(X, t)$ по t , $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, получаем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right\} \mathcal{F}_\alpha(X, t) = - \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(X - X_{ia}(t)) \delta(t - t_{ia}). \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – микроскопическое электрическое поле в рассматриваемой системе. Коль скоро имеет место равенство

$$\delta(t - t_{ia}) = \delta(|\mathbf{r}_{ia}(t) - \mathbf{r}_g(t)| - a) |\mathbf{e}_{\mathbf{r}_{ia}(t) - \mathbf{r}_g(t)} \cdot (\mathbf{v}_{ia}(t) - \mathbf{v}_g(t))|,$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{r}_g(t)$ и $\mathbf{v}_g(t)$ – координата и скорость зерна, с которым сталкивается i -я частица, a – радиус зерна, уравнение (2.2) можно преобразовать в уравнение

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \mathcal{F}_\alpha(X, t) = \\ = - \int d\mathbf{x} |\mathbf{e}_{\mathbf{r} - \mathbf{r}'} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) \mathcal{F}_g(\mathbf{x}', t) \mathcal{F}_\alpha(X, t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\mathcal{F}_g(\mathbf{x}, t)$ – фазовая плотность зерен,

$$\mathcal{F}_g(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_g} \sum_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^{(n)}(t)) \theta(t_{ig}^{(n+1)} - t) \theta(t - t_{ig}^{(n)}), \quad (2.4)$$

$\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v}, q)$ – расширенная фазовая переменная, введенная для того, чтобы рассматривать заряд зерна q как независимую переменную, $t_{ig}^{(n)}$ – время n -го столкновения i -го зерна с какой бы то ни было другой частицей, $\mathbf{x}_j^{(n)}(t)$ – траектория зерна после n -го и до $(n+1)$ -го столкновения.

Заметим, что представление (2.4) отличается от формального обобщения микроскопического распределения Климонтовича на случай расширенного фазового пространства

$$\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t) = \sum_{i=q}^{N_g} \delta(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_i(t)). \quad (2.5)$$

Дело в том, что в момент столкновения траектория зерна $\mathfrak{X}_i(t)$ скачкообразно меняется и, таким образом, микроскопическое распределение (2.5) становится неопределенным и неинтегрируемым. Преимущество представления (2.4) состоит в том, что оно в отличие от представления (2.5) является интегрируемым.

Уравнение (2.4) описывает микроскопическое состояние подсистемы зерен, определяемое микроскопическим значением заряда зерна q , а также его координатой и скоростью.

Как было показано в работе [12], уравнение для $\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t) = \\ & = - \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathfrak{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a) \{ |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t) - \\ & - |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_\alpha)| \mathcal{F}_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_\alpha q - e_\alpha t) \} \mathcal{F}_\alpha(X', t) - \\ & - \int d\mathfrak{X}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - 2a) |\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| \{ \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t) \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}', t) - \\ & - \mathcal{F}_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_g, q - \delta q; t) \mathcal{F}_g(\mathbf{r}', \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_g, q'; t) \}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_\alpha & \equiv \delta \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = - \frac{m_\alpha}{m_g} (\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \\ \delta \mathbf{v}_g & \equiv \delta \mathbf{v}_g(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')), \\ \delta q & \equiv \delta q(q, q') = q' - q. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что интегрирование по X' и $\mathfrak{X}'$ в уравнениях (2.3) и (2.6) проводится соответственно по областям $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') < 0$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_\alpha) < 0$. Уравнения (2.3) и (2.6) обобщают традиционное микроскопическое уравнение на тот случай, когда учитываются поглощение электронов и ионов зернами и контактные столкновения между зернами. В частности, в случае обычной плазмы ($\mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t) = 0$) уравнение (2.3) сводится к традиционному уравнению Климонтовича. С другой стороны, в отсутствие плазмы ($\mathcal{F}_a(X, t) = 0$) уравнение (2.6) воспроизводит результат Боголюбова для газа, состоящего из нейтральных твердых сфер [15].

3. БГКИ-ИЕРАРХИЯ ДЛЯ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ

Используя обозначения

$$\mathcal{F}(\xi, t) \equiv \mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{X}, t) = \begin{cases} \mathcal{F}_\alpha(X, t) \delta(q - e_\alpha), & \alpha = e, i, \\ \mathcal{F}_g(\mathfrak{X}, t), & \alpha = g, \end{cases} \quad (3.1)$$

и $\xi \equiv (\mathbf{X}, \alpha) = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, q, \alpha)$, можно записать уравнения (2.3), (2.6) в объединенном виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}(\xi) \right\} \mathcal{F}(\xi, t) = \int d\xi' \left\{ [W^{(1)}(\xi, \xi') - \widehat{V}(\xi, \xi')] \mathcal{F}(\xi, t) \mathcal{F}(\xi', t) - \right. \\ \left. - W^{(2)}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, \xi' + \Delta'_{\xi\xi'}) \mathcal{F}(\xi - \Delta_{\xi\xi'}, t) \mathcal{F}(\xi + \Delta'_{\xi\xi'}, t) \right\}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{L}(\xi) &\equiv \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \quad \int d\xi \equiv \sum_{a=e,i} \int d\mathbf{x}, \\ W^{(1),(2)}(\xi, \xi') &\equiv W^{(1),(2)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v} - \mathbf{v}'), \\ W^{(1)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\mathbf{e}_\mathbf{r} \mathbf{v} \delta(r - a_{\alpha\alpha'}) (\delta_{\alpha g} + \delta_{\alpha' \alpha} - \delta_{\alpha g} \delta_{\alpha' g}) \theta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right), \\ W^{(2)}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\mathbf{e}_\mathbf{r} \mathbf{v} \delta(r - a_{\alpha\alpha'}) \delta_{\alpha g} \theta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \vartheta = (\widehat{\mathbf{r}\mathbf{v}}), \\ \widehat{V}(\xi, \xi') &= \frac{qq'}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \\ \Delta_{\xi\xi'} &= (0, \delta \mathbf{v}_{\alpha\alpha'}, \delta q_{\alpha\alpha'}, 0), \quad \Delta'_{\xi\xi'} = (0, \delta \mathbf{v}'_{\alpha\alpha'}, 0, 0), \\ \delta q_{\alpha\alpha'} &\equiv \delta q_{\alpha\alpha'}(q, q') = \delta_{\alpha g} \begin{cases} e_{\alpha'}, & \alpha' = e, i, \\ q' - q, & \alpha' = g, \end{cases} \\ \delta v_{\alpha\alpha'} &\equiv \delta v_{\alpha\alpha'}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \delta_{\alpha g} \begin{cases} -\frac{m_{\alpha'}}{m_g} (\mathbf{v} - \mathbf{v}'), & \alpha' = e, i, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} (\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')), & \alpha' = g, \end{cases} \\ \delta v'_{\alpha\alpha'} &= \delta_{\alpha g} \delta_{\alpha' g} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} (\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')), \end{aligned} \quad (3.3)$$

а $\mathbf{F}_\alpha$ – поле внешних сил, если таковое имеется.

Представление (3.1) является наиболее подходящим для вывода обобщенной ББГКИ-иерархии для пылевой плазмы. Вводя функции распределения в терминах статистически усредненных значений соответствующих микроскопических величин,

$$\begin{aligned} f_1(\xi; t) &= \langle N(\xi, t) \rangle, \\ f_2(\xi; t) &= \langle N(\xi, t) N(\xi', t) \rangle - \delta(\xi - \xi') f_1(\xi; t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

и т.д., и усредняя уравнение (3.2) и его комбинации, получаем

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \widehat{L}(\xi_i) - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i=1}^N \widehat{V}(\xi_i, \xi_j) \right\} f_s(\xi_1, \dots, \xi_s; t) + \\ &+ \sum_{i=1}^s \sum_{j \neq i=1}^s [W^{(1)}(\xi_i, \xi_j) f_s(\xi_1, \dots, \xi_s; t) - \\ &- W^{(2)}(\xi_i - \Delta_{ij}, \xi_j + \Delta'_{ij}) f_s(\xi_1, \dots, \xi_i - \Delta_{ij}, \dots, \xi_j + \Delta'_{ij}, \dots, \xi_s; t)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^s \int d\xi_{s+1} \{ \widehat{V}(\xi_i, \xi_{s+1}) f_{s+1}(\xi_1, \dots, \xi_{s+1}; t) - \\
&\quad - [W^{(1)}(\xi_i, \xi_{s+1}) f_{s+1}(\xi_1, \dots, \xi_{s+1}; t) - W^{(2)}(\xi_1 - \Delta_{i,s+1}, \xi_j + \Delta'_{i,s+1}) \times \\
&\quad \times f_{s+1}(\xi_1, \dots, \xi_i - \Delta_{i,s+1}, \dots, \xi_j + \Delta'_{i,s+1}, \dots, \xi_{s+1}; t)] \}; \quad (3.5)
\end{aligned}$$

здесь $\Delta_{ij} = \Delta_{\xi_i \xi_j}$, $\Delta'_{ij} = \Delta'_{\xi_i \xi_j}$.

Для системы с чисто кулоновским взаимодействием ($W^{(1)} = W^{(2)} = 0$) иерархия (3.5) сводится к иерархии для обычной плазмы. В случае нейтральных зерен при $a \rightarrow 0$ (предел Больцмана–Града) воспроизводится стохастическая иерархия для газа, состоящего из твердых сфер [16].

Полученная таким образом иерархия позволяет ввести кинетические уравнения. В частности, в приближении преобладающего влияния контактных столкновений асимптотику бинарных функций распределения можно записать как

$$\begin{aligned}
f_{\alpha g}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) f_g(\mathbf{x}', t) \theta(\vartheta - \vartheta_{\min}^{\alpha g}), \quad \alpha = e, i, \\
&\quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg a \\
f_{gg}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= f_g(\mathbf{x}) f_g(\mathbf{x}', t) \{ \theta(\vartheta - \vartheta_{\min}^{gg}) + \theta(\vartheta_{\min}^{gg} - \vartheta) \}, \\
&\quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg a
\end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\vartheta_{\min}^{\alpha g}$ определяется из уравнения

$$\sin^2 \vartheta_{\min}^{\alpha g} = \frac{a_{\alpha g}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left(1 - \frac{2e_{\alpha} q}{a_{\alpha g} m_{\alpha} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2} \right),$$

$a_{\alpha g} = a$, $\alpha = e, i$ и $a_{gg} = 2a$.

Используя эти соотношения для оценки основных вкладов в бинарные столкновительные члены, можно записать кинетические уравнения в виде

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle \mathbf{E}_{\alpha}^{\text{eff}} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_{\alpha}(X, t) = \\
&= - \int d\mathbf{v}' \int dq' \sigma_{\alpha g}(q', \mathbf{v} - \mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_{\alpha}(X, t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}', q', t) + I_{\alpha}, \quad \alpha = e, i, \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m_g} \langle \mathbf{E}_g^{\text{eff}} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_g(\mathbf{x}, t) = \\
&= - \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v}' [\sigma_{\alpha'g}(q, \mathbf{v} - \mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_g(\mathbf{x}, t) - \\
&\quad - \sigma_{\alpha'g}(q - e_{\alpha}, \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha'}) |\mathbf{v} - \mathbf{v}' - \delta \mathbf{v}_{\alpha'}| \times \\
&\quad \times f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_{\alpha'}, q - e_{\alpha'}, t)] f_{\alpha'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) - \\
&\quad - \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{v}' \int dq' |\mathbf{n}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')| [\sigma_{gg}(q, q', \mathbf{v} - \mathbf{v}') f_g(\mathbf{x}, t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}', q', t) - \\
&\quad - \sigma_{\alpha g}(q - \delta q_g, q'; \mathbf{v} - \mathbf{v}') f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_g, q - \delta q_g, t) f_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}_g, q', t)] + I_g, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где I_{α} и I_g – кулоновские столкновительные члены, которые можно вычислить в терминах корреляционных функций флуктуаций плотности частиц (аналогично случаю

обыкновенной плазмы), а $\sigma_{\alpha\beta}(q, \mathbf{v})$ – сечение перезарядки. В случае бесстолкновительной плазмы в отсутствие внешнего поля имеем

$$\sigma_{\alpha g}(q, v) = \pi a_{\alpha g}^2 \left(1 - \frac{2e_{\alpha} q}{m_{\alpha} v^2 a_{\alpha g}} \right).$$

Применение уравнений (3.7) и (3.8) к вычислению стационарных распределений зерен описано в работе [12].

Итак, мы сформулировали строгие эволюционные уравнения для микроскопических распределений пылевой плазмы. Эти уравнения отличаются от обычных уравнений Климонтовича наличием “микроскопического” столкновительного члена, возникающего вследствие поглощения электронов и ионов зернами. Кроме того, представлено соответствующее обобщение ББК-иерархии.

4. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЗАРЯЖЕННЫХ ЗЕРЕН (ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ)

Теперь применим уравнение (3.7) для вычисления эффективных потенциалов зерен. В случае одиночного неподвижного зерна, $f_g(\mathbf{r}', \mathbf{v}', q') = \delta(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{v}')\delta(q' - q)$, уравнение (3.7) сводится к уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_{\alpha}} \mathbf{F}_{\alpha}(X, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_{\alpha}(X, t) = I_{\alpha} - \nu \sigma_{\alpha q}(q, v) f_{\alpha}(X, t) \delta(\mathbf{r}), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{F}_{\alpha}(X, t)$ – поле внешних сил, если таковые имеются. Для простоты мы не будем далее использовать столкновительный член, вычисленный в терминах корреляционных функций микроскопических флуктуаций. Вместо этого мы будем использовать простую версию модельного интеграла столкновений (простую модель Бхатнагара–Гросса–Крука), предложенную в работе [17], а именно

$$I_{\alpha} = -\nu_{\alpha} \left\{ f_{\alpha}(X, t) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_{\alpha}(X, t) \right\}. \quad (4.2)$$

Здесь ν_{α} – эффективная частота столкновений, а $\Phi_{\alpha}(\mathbf{v})$ – функция распределения, возникающая в ходе столкновений плазменных частиц.

В связи с тем что поглощение плазменных частиц значительно подавляет влияние нелинейности, можно сказать, что стоки являются причиной небольших возмущений эффективного электрического поля, и поэтому можно использовать линеаризованную версию уравнения (4.2):

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_{\alpha}} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \delta f_{\alpha}(X, t) - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \\ = -\nu \sigma_{\alpha}(q(t), v) f_{0\alpha}(\mathbf{v}) - \nu_{\alpha} \left\{ \delta f_{\alpha}(X, t) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} \delta f_{\alpha}(X, t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь и далее мы используем одночастичные функции распределения, нормированные на объем. В этом случае потенциал $\Phi(\mathbf{r}, t)$ подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi q(t) \delta(\mathbf{r}) - 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \int d\mathbf{v} \delta f_{\alpha}(X, t). \quad (4.4)$$

Решение уравнения (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha(X, t) &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\alpha(X, X'; t - t') \frac{\partial \delta \Phi(\mathbf{r}', t')}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - \\ &\quad - \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\alpha(X, X'; t - t') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}', t'), \\ S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}, t) &= v \sigma_\alpha(q(t), t) f_{0\alpha}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $W_\alpha(X, X'; t - t')$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_\alpha(X, X'; \tau) &= \\ = -\nu_\alpha \left\{ W_\alpha(X, X'; \tau) - \Phi_\alpha(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} W_\alpha(X, X'; \tau) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

с начальным условием

$$W_\alpha(X, X'; 0) = \delta(X - X'). \quad (4.7)$$

Как видно из уравнений (4.6), (4.7), величина $W_\alpha(X, X'; \tau)$ представляет собой фазовую плотность вероятности перехода частицы из точки X' в фазовом пространстве в точку X в течение времени τ в системе, где нет самосогласованного взаимодействия частиц, обусловленного электрическим полем.

Подставляя уравнение (4.5) в уравнение Пуассона (4.4), получаем

$$\Phi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi q_\omega}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \sum_\alpha e_\alpha n_{0\sigma} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{\alpha\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'), \quad (4.8)$$

где $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)$ — диэлектрическая функция отклика,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}\omega) &= 1 - i \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_{0\sigma}}{k^2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}, \\ W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} W_\alpha(X, X', \tau), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В стационарном случае $q(t) = q$ уравнение (4.8) сводится к

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \sum_\alpha e_\alpha n_{0\sigma} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}'). \quad (4.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{\omega=0}, \quad \varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2}, \\ k_D^2 &= \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2 n_{0\sigma}}{T_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом, мы получили общие соотношения, описывающие эффективные макрочастичные потенциалы с учетом поглощения электронов и ионов зернами и столкновений плазменных частиц с нейтральными молекулами газа.

5. ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ЗЕРЕН

Рассмотрим более подробно влияние свойств плазмы на конкретные характеристики эффективного потенциала зерна, заряд которого обуславливается плазменными токами. Начнем со случая изотропной плазмы в отсутствие внешнего поля. В этом случае имеем

$$W_{\alpha\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\alpha} - \frac{i\nu_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\alpha)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i\nu_\alpha)} \left[1 - i\nu_\alpha \int d\mathbf{v} \frac{\Phi_\alpha(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\alpha} \right]^{-1}, \quad (5.1)$$

откуда следует выражение для стационарного потенциала зерна:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i \sum_\alpha 4\pi e_\alpha n_\alpha \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + k_D^2} \frac{\int d\mathbf{v} \frac{v\sigma_\alpha(q, v) f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_\alpha}}{1 + i\nu_\alpha \int d\mathbf{v} \frac{\Phi_\alpha(\mathbf{v})}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i\nu_\alpha}}. \quad (5.2)$$

В бесстолкновительном пределе ($\nu_\alpha \rightarrow 0$) это соотношение упрощается:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i \sum_\alpha 4\pi e_\alpha n_{0\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + k_D^2} \int d\mathbf{v} \frac{v\sigma_\alpha(q, v) f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{k}\mathbf{v} - i0}, \quad (5.3)$$

таким образом, мы получаем

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} - \frac{\tilde{Q}}{r} g(k_D r), \quad (5.4)$$

где

$$g(X) = e^{-X} \text{Ei}(X) - e^X \text{Ei}(-X), \quad \tilde{Q} = \frac{2\pi}{k_D} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int_0^\infty dv v \sigma_\alpha(q, v) f_{0\sigma}(v). \quad (5.5)$$

При $k_D r \gg 1$ уравнение (5.4) приводит к хорошо известному результату

$$\Phi(r) \simeq -\frac{2Q}{k_D r^2},$$

т.е. эффективный потенциал является потенциалом дипольного типа.

В пределе сильностолкновительной плазмы ($\nu_\alpha \gg ks_\alpha$, $s_\alpha = (T_\alpha/m_\alpha)$) уравнение (5.2) сводится к суперпозиции экранированных и неэкранированных потенциалов:

$$\Phi(\mathbf{r}) = (q + \tilde{S}) \frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\tilde{S}}{r}, \quad (5.6)$$

где

$$\tilde{S} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha S_\alpha}{D_\alpha}, \quad S_\alpha = n_\alpha \int d\mathbf{v}' v \sigma_\alpha(q, v) f_{0\alpha}(\mathbf{v}), \quad D_\alpha = \frac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha},$$

и это согласуется с результатами, полученными в рамках дрейфово-диффузионного приближения [18], [19]. При выводе формулы (5.6) мы положили $\Phi_\alpha(\mathbf{v}) = f_{0\sigma}(\mathbf{v})$.

Таким образом, мы видим, что в случае пылевой плазмы, которую можно интерпретировать как открытую систему, стационарный экранированный потенциал сильно зависит от деталей плазменной динамики, в отличие от случая экранированного потенциала для обычной плазмы.

Если присутствует внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$, то уравнение (4.1) порождает уравнение для невозмущенной функции распределения:

$$\frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f_{0a}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -\nu_a \left\{ f_{0a}(\mathbf{v}) - \Phi_a(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_{0a}(\mathbf{v}) \right\}, \quad (5.7)$$

а $W_a(X, X'; t - t')$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_a(X, X'; t - t') = \\ = -\nu_a \left\{ W_a(X, X'; t - t') - \Phi_a(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} W_a(X, X'; t - t') \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Интегрируя уравнение (5.7), получаем

$$f_{0a}(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{v_z} dv'_z \beta_a \Phi_a(\mathbf{v}_\perp, v'_z) e^{-\beta_a(v_z - v'_z)}, \quad \beta_a > 0, \quad (5.9)$$

$$f_{0a}(\mathbf{v}) = - \int_{v_z}^{\infty} dv'_z \beta_a \Phi_a(\mathbf{v}_\perp, v'_z) e^{-\beta_a(v_z - v'_z)}, \quad \beta_a < 0, \quad (5.10)$$

где

$$\beta_a = \frac{1}{v_a}, \quad v_a = \frac{e_a E_0}{m_a \nu_a}.$$

Решение уравнения (5.8) в $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении при $v_{0a} > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} W_{a\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{\beta_a}{\nu_a} \times \left\{ \delta(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}'_\perp) \theta(v_z - v'_z) e^{-i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v'_z)} + \nu_a W_{a\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{v_z} dv''_z \Phi_a(\mathbf{v}_\perp, v''_z) e^{-i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v''_z)} \right\} e^{i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v_z)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где

$$\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v_z) = \frac{\beta_a}{\nu_a} \left\{ (\omega - \mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp + i\nu_a) v_z - \frac{k_z v_z^2}{2} \right\}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} W_{a\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \frac{\beta_a}{\nu_a} \int dv_z e^{i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v_z) - i\psi_a(\mathbf{v}'_\perp, v'_z)} \theta(v_z - v'_z) \times \\ \times \left\{ 1 - \beta_a \int d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{v_z} dv''_z \Phi_a(\mathbf{v}_\perp, v''_z) e^{i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v_z) - i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v''_z)} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

При $v_a < 0$ имеем

$$\begin{aligned} W_{a\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = - \frac{\beta_a}{\nu_a} \left\{ \delta(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}'_\perp) \theta(v'_z - v_z) e^{-i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v'_z)} + \right. \\ \left. + \nu_a W_{a\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') \int_{v_z}^{\infty} dv''_z \Phi_a(\mathbf{v}_\perp, v''_z) e^{-i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v''_z)} \right\} e^{i\psi_a(\mathbf{v}_\perp, v_z)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$W_{\mathbf{a}\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = -\frac{\beta_a}{\nu_a} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z e^{i\psi_a(\mathbf{v}'_z, v_z) - i\psi_a(\mathbf{v}'_{\perp}, v'_z)} \theta(v'_z - v_z) \times \\ \times \left\{ 1 + \beta_a \int d\mathbf{v} \int_{v_z}^{\infty} dv''_z \Phi_a(\mathbf{v}_{\perp}, v''_z) e^{i\psi_a(\mathbf{v}_{\perp}, v_z) - i\psi_a(\mathbf{v}_{\perp}, v''_z)} \right\}^{-1}. \quad (5.15)$$

Подставляя (5.7)–(5.15) в уравнения (4.9) для диэлектрической функции отклика $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$, получаем

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{k_a^2}{\varkappa_a^2(\mathbf{k}) G_a(\mathbf{k}, \omega)} \int_0^{\infty} dy e^{-y} W\left(\frac{\omega + i\nu_a - k_z v_a y}{\varkappa_a(\mathbf{k}) S_a}\right), \quad (5.16)$$

где

$$G_a(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega + i\nu_a} \left[\omega + i\nu_a W\left(\frac{\omega + i\nu_a}{\varkappa_a(\mathbf{k}) S_a}\right) \right], \quad (5.17)$$

$$k_a^2 = \frac{4\pi e_a^2 n_a}{T_a}, \quad \varkappa_a^2(\mathbf{k}) \equiv \varkappa_a^2 = k^2 + \frac{ik_z v_a \nu_a}{S_a^2}, \quad \omega_{pa}^2 = \frac{4\pi e_a^2 n_a}{m_a},$$

$$W(z) = 1 - ze^{-z^2/2} \int_0^z dy e^{y^2/2} + i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} ze^{-z^2/2}. \quad (5.18)$$

При $|k_z v_a| \ll \nu_a$ уравнение (5.16) упрощается:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{k_a^2}{\varkappa_a^2 G_a(\mathbf{k}, \omega)} W\left(\frac{\omega + i\nu_a}{\varkappa_a(\mathbf{k}) S_a}\right) = 1 + \sum_a \frac{k_a^2}{\varkappa_a^2} \frac{(\omega + i\nu_a) W\left(\frac{\omega + i\nu_a}{\varkappa_a S_a}\right)}{\omega + i\nu_a W\left(\frac{\omega + i\nu_a}{\varkappa_a S_a}\right)}. \quad (5.19)$$

В случае дрейфово-диффузионного приближения ($\omega \ll \nu_a$) имеем

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \simeq 1 + i \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\nu_a (\omega - k_z v_a + ik^2 D_a)}, \quad (5.20)$$

где $D_a = S_a^2/\nu_a$ – коэффициент диффузии для частиц типа a . В стационарном случае ($\omega = 0$)

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 - i \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\nu_a (k_z v_a - ik^2 D_a)}. \quad (5.21)$$

Для дальнейших вычислений нам потребуется явный вид величин, описывающих вклад процессов поглощения в эффективный потенциал, а именно во вторые члены в уравнениях (4.8), (4.10). Обозначим их как $\Phi_{\mathbf{k}\omega}^s$ и $\Phi_{\mathbf{k}}^s$, т.е.

$$\Phi_{\mathbf{k}\omega}^s = \frac{4\pi Q_{\omega}^{(s)}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (5.22)$$

где

$$Q_{\omega}^{(s)} = \sum_a e_a n_a \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\mathbf{a}\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{a\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'). \quad (5.23)$$

С учетом явного вида $W_{a\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ получаем

$$Q_{\omega}^{(s)} = -i \sum_a \frac{e_a n_a}{G_a(\mathbf{k}, \omega)} \int d\mathbf{v} \frac{S_{a\omega}^{(0)}(v)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_a} \left[1 - W\left(\frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_a}{\sqrt{ik_z v_a \nu_a}}\right) \right], \quad (5.24)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{ik_z v_a \nu_a} > 0,$$

где

$$S_a^{(0)}(v) = v \sigma_a(q, v) f_{0a}(\mathbf{v}).$$

Как следует из (5.24), при $\nu_a \gg \mathbf{k}\mathbf{v}$ имеем

$$Q_{\omega}^{(s)} = -i \sum_a \frac{e_a}{G_a(\mathbf{k}, \omega)} \frac{1}{(\omega + i\nu_a)} \left[1 - W\left(\frac{\omega + i\nu_a}{\sqrt{ik_z v_a \nu_a}}\right) \right] S_{a\omega}^{(0)}, \quad (5.25)$$

$$S_{a\omega}^{(0)} = n_a \int d\mathbf{v} S_{a\omega}^{(0)}(\mathbf{v}).$$

В стационарном случае ($\omega = 0$) уравнение (5.25) сводится к

$$Q^{(s)} = - \sum_a \frac{e_a}{\nu_a G_a(\mathbf{k})} \left[1 - W\left(\sqrt{\frac{i\nu_a}{k_z v_a}}\right) \right] S_a^{(0)}, \quad (5.26)$$

$$S_a^{(0)} = n_a \int d\mathbf{v} v \sigma_a(q, v) f_{0a}(v), \quad G_a(\mathbf{k}) \simeq W\left(\frac{i\nu_a}{\varkappa_a(\mathbf{k}) S_a}\right).$$

Если выполнено условие $|\varkappa_a(\mathbf{k}) S_a| \ll \nu_a$, то

$$G_a(\mathbf{k}) \simeq \frac{k^2 S_a^2 + ik_z v_a \nu_a}{\nu_a^2}. \quad (5.27)$$

Очевидно, что при $k_z v_a \ll \nu_a$ мы имеем

$$Q^{(s)} \simeq - \sum_a \frac{e_a}{\nu_a G_a(\mathbf{k})} S_a^{(0)}. \quad (5.28)$$

Таким образом, в случае дрейфово-диффузионного приближения ($\nu_a \gg k S_a, k_z v_a$) получаем

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \sum_a \frac{e_a}{\nu_a G_a(k)} S_a^{(0)}. \quad (5.29)$$

Если пренебречь влиянием поля на электроны ($\mathbf{v}_e = 0$), т.е. предположить, что электроны описываются распределением Больцмана, можно положить

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{k_e^2}{k^2} + \frac{k_i^2}{k^2 + ik_z v_i \nu_i / S_i^2}, \quad G_e(\mathbf{k}) = \frac{k^2 S_e^2}{\nu_e^2}. \quad (5.30)$$

Если известен потенциал $\Phi_{\mathbf{k}}$, то можно вычислить силу, действующую на зерно вследствие поляризации среды:

$$\mathbf{F} = -q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}=0} = -q \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} i\mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}}. \quad (5.31)$$

Если внешнее поле отсутствует, то $\Phi_{\mathbf{k}}$ зависит от квадрата вектора $\mathbf{k}$, и действующая на частицу сила равна нулю. Ситуация существенно меняется, если в плазме возникают потоки частиц. Учитывая явный вид величин $\varepsilon(\mathbf{k}, 0)$ и $G_i(\mathbf{k})$, находим, что

$$F_z = -\frac{q}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} \frac{ik_z}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \left[q - \sum_a \frac{e_a}{\nu_a G_a(\mathbf{k})} S_a^{(0)} \right]. \quad (5.32)$$

При малых скоростях v_i уравнение (5.31) сводится к

$$F_z = \frac{qv_{0i}}{2\pi^2 D_i} \int d\mathbf{k} \frac{k_z^2}{k^2(k^2 + k_D^2)} \left[\frac{k_D^2 \tilde{S}_i}{k^2} + \frac{k_i^2}{k^2 + k_D^2} \left(q - \frac{k_D^2 \tilde{S}_i}{k^2} \right) \right], \quad (5.33)$$

$$\tilde{S} = \sum_a \frac{e_a}{k_D^2 D_a} S_a^{(0)} = \sum_a \tilde{S}_a.$$

После интегрирования получаем

$$F_z = \frac{qv_{0i}}{6D_i k_D} \{ k_i^2 (q - \tilde{S}) + 2k_D^2 \tilde{S}_i \}. \quad (5.34)$$

Мы видим, что если поглощения зернами нет ($\tilde{S}_a = 0$), то увлекающая сила положительна, т.е. действует в том же направлении, куда направлена скорость потока ионов. Однако если выполнено условие

$$k_i^2 (q - \tilde{S}) + 2k_D^2 \tilde{S}_i < 0, \quad (5.35)$$

то сила становится отрицательной. Уравнения (5.33)–(5.35) воспроизводят результаты, полученные ранее в работах [20], [21].

6. ИТОГИ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены микроскопические уравнения для пылевой плазмы с учетом поглощения электронов и ионов зернами. При этом в случае пылевой плазмы для кинетического описания эффективных макрочастичных потенциалов использовалась ББГКИ-иерархия. Использование интеграла Бхатнагара–Гросса–Крука позволило воспроизвести результаты, известные из численного решения дрейфово-диффузионного уравнения, а также бесстолкновительного кинетического уравнения. При подходящем выборе заряда зерна и интенсивности поглощения полученные соотношения с хорошей точностью воспроизводят численное решение нелинейной граничной задачи. Общие соотношения, полученные в данной работе, можно использовать для описания экранирования зерен в плазме при наличии внешнего электрического поля.

Благодарности. Данная работа частично поддержана совместной программой НАНУ–РФФИ (грант № 1-2008).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, М.-Л., 1946.
- [2] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, *ЖЭТФ*, **23** (1952), 151–160.
- [3] Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория неравновесных процессов в плазме*, МГУ, М., 1967.
- [4] S. Ichimaru, *Ann. Phys.*, **20**:1 (1962), 78–118.
- [5] А. Г. Ситенко, *Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [6] S. Ichimaru, *Statistical Plasma Physics*, Addison–Wesley, Redwood City, CA, 1992.
- [7] Yu. L. Klimontovich, H. Wilhelmsson, I. P. Yakimenko, A. G. Zagorodny, *Phys. Rep.*, **175**:5–6 (1989), 263–401.
- [8] Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория открытых систем. Т. 2. Кинетическая теория плазмы. Кинетическая теория фазовых переходов второго рода*, Янус-К, М., 1999.
- [9] V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, G. E. Morfill, *Phys. Rep.*, **421**:1–2 (2005), 1–103.
- [10] В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, *УФН*, **174**:5 (2004), 495–544.
- [11] P. P. J. M. Schram, A. G. Sitenko, S. A. Trigger, A. G. Zagorodny, *Contrib. Plasma Phys.*, **41**:2–3 (2001), 211–214.
- [12] P. P. J. Schram, A. G. Sitenko, S. A. Trigger, A. G. Zagorodny, *Phys. Rev. E*, **63**:1 (2000), 016403.
- [13] А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. И. Момот, *Письма в ЖЭТФ*, **86**:12 (2007), 873–878.
- [14] А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, *Письма в ЖЭТФ*, **88**:1 (2008), 27–33.
- [15] Н. Н. Боголюбов, *ТМФ*, **24**:2 (1975), 242–247.
- [16] Д. Я. Петрина, К. Д. Петрина, *Укр. мат. журн.*, **50**:2 (1998), 195–210.
- [17] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, **54**:3 (1954), 511–525.
- [18] A. G. Zagorodny, A. V. Filippov, A. F. Pal', A. N. Starostin, A. I. Momot, *Probl. Atomic Sci. and Technology*, 2006, № 6, 99–103.
- [19] А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ*, **131**:1 (2007), 164–179.
- [20] S. A. Khrapak, S. K. Zhdanov, A. V. Ivlev, G. E. Morfill, *J. Appl. Phys.*, **101**:3 (2007), 033307.
- [21] M. Chandhuri, S. A. Khrapak, G. E. Morfill, *Phys. Plasmas*, **14**:2 (2007), 022102.

Поступила в редакцию 5.02.2009