Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Ковалевский, Квазисредние в решении задачи классификации состояний равновесия конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 2, 290–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:07:39

© 2009 г.

М. Ю. Ковалевский*

КВАЗИСРЕДНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД СО СПОНТАННО НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

Развит статистический подход к решению задачи классификации состояний равновесия вырожденных конденсированных сред. Введены генераторы ненарушенной и пространственной симметрий состояния равновесия, на основе которых получены уравнения классификации для параметра порядка. Выявлен механизм появления дополнительных термодинамических параметров, характеризующих как однородные, так и неоднородные состояния равновесия. Найдены аналитические решения задачи классификации состояний равновесия для ряда жидких кристаллов.

Ключевые слова: равновесие, квазисреднее, параметр порядка, уравнение классификации, жидкий кристалл, термодинамические параметры.

1. МОТИВАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теоретическим фундаментом статистической физики, описывающей равновесные состояния конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией, является концепция квазисредних [1], [2]. Ее конструктивный момент – введение в равновесный статистический оператор бесконечно малого источника, который понижает симметрию состояния статистического равновесия по сравнению с симметрией гамильтониана и позволяет обобщить распределение Гиббса на вырожденные конденсированные среды. Развитие концепции квазисредних и ее приложение к квантовым жидкостям со скалярным и тензорным параметрами порядка можно найти в работах [3]–[6].

Состояния равновесия со спонтанно нарушенной симметрией, возникающие в результате фазового перехода второго рода в конденсированных средах, можно описать и классифицировать в рамках феноменологической теории [7]. На основе модельного вида свободной энергии проводились исследования для сред с различным

*Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина; Белгородский государственный университет, Белгород, Россия.
E-mail: mik@kipt.kharkov.ua

видом параметра порядка, в частности для сверхтекучих систем [8] и жидких кристаллов [9]. Соображения симметрии налагают ограничения на явный вид свободной энергии как функционала параметра порядка, однако попытки связать феноменологические параметры разложения с параметрами межчастичного взаимодействия сталкиваются с немалыми трудностями [10]. Другим осложнением указанного подхода является то, что он справедлив только в окрестности точки фазового перехода, где параметр порядка мал. Вдали от критической температуры возникают трудности с выбором явного вида свободной энергии как функционала параметра порядка, а также с решением соответствующих нелинейных уравнений для этого функционала [11]. Теоретико-групповой подход [12], [13] использует представление о ненарушенной симметрии вырожденного состояния равновесия как подгруппе симметрии нормальной фазы. В работах [14]–[16] проводилась классификация состояний в рамках этого подхода для сверхтекучего ^3He , характеризующегося тензорным параметром порядка.

Уменьшение симметрии состояния равновесия в результате фазового перехода приводит к необходимости обобщения термодинамики конденсированной среды и требует введения дополнительных параметров, адекватно описывающих вырожденные состояния. Установление характера и вида этих параметров представляет собой основную задачу наших исследований. В статье предложен метод классификации состояний равновесия вырожденных конденсированных сред на основе введенных представлений генераторов ненарушенной и пространственной симметрий. Показана роль симметрии гамильтониана и трансформационных свойств параметра порядка относительно глобальных преобразований, генераторами которых являются интегралы движения, для классификации таких состояний равновесия. Решение этой задачи опирается на условия ненарушенной и пространственной симметрий при ненулевых значениях параметра порядка. Нами детально изучены конденсированные среды со спонтанно нарушенной трансляционной и вращательной инвариантностью. Установлена связь условий симметрии с одноосной и двухосной структурами параметра порядка жидких кристаллов с нематическим и холестерическим упорядочением в случае непрерывного характера свойств симметрии состояния равновесия. В случае дискретных свойств симметрии состояния равновесия выяснена связь структуры генераторов ненарушенной и пространственной симметрии со смектическим упорядочением.

2. НОРМАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Распределение Гиббса для нормальной немагнитной конденсированной среды в лабораторной системе отсчета $\hat{w}(Y) = e^{\Omega(Y) - Y_a \hat{\gamma}_a}$ зависит от термодинамических параметров Y_a , связанных с симметрией гамильтониана. Эти величины включают в себя $Y_0^{-1} \equiv T$ – температуру, $-Y_k/Y_0 \equiv v_k$ – макроскопическую скорость, $-Y_4/Y_0 \equiv \mu$ – химический потенциал и сопряжены аддитивным интегралам движения $\hat{\gamma}_a = \hat{H}, \hat{P}_k, \hat{N}$ соответственно. Здесь $\hat{H}$ – гамильтониан, $\hat{P}_k$ – импульс, $\hat{N}$ – оператор

числа частиц. Соотношение симметрии

$$[\hat{w}, \hat{P}_i] = 0, \quad (2.1)$$

отражает трансляционную инвариантность, а формула

$$[\hat{w}, \hat{N}] = 0 \quad (2.2)$$

– фазовую инвариантность состояния равновесия. Равенство

$$[\hat{w}, \hat{L}_k(\mathbf{Y})] = 0 \quad (2.3)$$

описывает свойство одноосной анизотропии равновесного статистического оператора при пространственных поворотах; оно выражено в терминах обобщенного оператора орбитального момента $\hat{L}_i(\mathbf{Y}) \equiv \hat{L}_i + \hat{L}_i^{\mathbf{Y}}$, где $\hat{L}_i$ – оператор орбитального момента, $\hat{L}_i^{\mathbf{Y}} \equiv -i\varepsilon_{ikl}Y_k \partial/\partial Y_l$, ($Y_k/|\mathbf{Y}|$ – ось пространственной анизотропии). Он действует в гильбертовом пространстве и в пространстве термодинамических функций. Лабораторная и собственная системы отсчета связаны преобразованием Галилея, которое определяется унитарным оператором,

$$U_{\mathbf{u}} = \exp \left\{ -iu_i \int d^3x x_i m \hat{n}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (2.4)$$

где m – масса частицы и u_i – параметр преобразования. В собственной системе отсчета статистический оператор Гиббса имеет вид

$$w(Y') = U_{\mathbf{u}} \hat{w}(Y) U_{\mathbf{u}}^+ \equiv e^{\Omega - Y'_a \hat{\gamma}_a}, \quad (2.5)$$

где

$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0 u_k, \quad Y'_4 = Y_4 + Y_k u_k + \frac{Y_0 u^2}{2}.$$

При $u_k = -Y_k/Y_0$ имеем $Y'_k = 0$. Нормальная конденсированная среда в собственной системе отсчета изотропна: $[\hat{w}(Y'), \hat{L}_k] = 0$.

3. КВАЗИСРЕДНИЕ. УРАВНЕНИЯ КЛАССИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

В случае фазовых превращений второго рода конденсированная среда из нормального состояния переходит в состояние со спонтанно нарушенной симметрией. Дополнительные термодинамические параметры зависят от характера нарушенной симметрии и связаны с наличием остаточной симметрии состояния равновесия. Выбор параметра порядка связан с конкретной природой равновесных состояний среды. Согласно концепции квазисредних распределение Гиббса для вырожденных сред имеет вид $\hat{w}_v \equiv e^{\Omega_v - Y_a \hat{\gamma}_a - v \hat{F}}$. Источник $\hat{F}$, нарушающий симметрию нормального состояния равновесия, представляет собой линейный функционал оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(\mathbf{x})$:

$$\hat{F} = \int d^3x (f_a(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) + \text{э.с.}).$$

В вырожденном состоянии равновесное среднее параметра порядка не равно нулю:

$$\Delta_a(\mathbf{x}, Y, f) = \text{Sp } \hat{w} \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Sp } \hat{w}_v \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Эта формула связывает равновесное среднее параметра порядка с термодинамическими силами и функцией $f_a(\mathbf{x})$, входящей в источник.

С целью получения уравнений классификации состояний равновесия сформулируем трансформационные свойства оператора параметра порядка. Так как операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(\mathbf{x})$ линейны или билинейны по полевым операторам, правые стороны квантовых скобок Пуассона интегралов движения с операторами параметра порядка будут некоторыми линейными функциями от этих операторов. Условие трансляционной инвариантности имеет вид

$$i[\hat{P}_k, \hat{\Delta}_a(\mathbf{x})] = -\nabla_k \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Генератором группы фазовых преобразований является оператор числа частиц, и оператор параметра порядка $\hat{\Delta}_a(\mathbf{x})$ преобразуется согласно соотношению

$$[\hat{N}, \hat{\Delta}_a(\mathbf{x})] = -g \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

где постоянная величина g зависит от тензорной размерности и внутренней структуры оператора параметра порядка. При пространственных поворотах операторы параметра порядка преобразуются в соответствии с формулой

$$i[\hat{L}_l, \hat{\Delta}_a(\mathbf{x})] = -g_{lab} \hat{\Delta}_b(\mathbf{x}) - \varepsilon_{ljk} x_k \nabla_j \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

где g_{lab} – постоянные величины.

Для трансляционно-инвариантных вырожденных состояний равновесия, удовлетворяющих (2.1), условие ненарушенной (остаточной) симметрии состояния равновесия определяется соотношением

$$[\hat{w}, \hat{T}(\xi, \mathbf{Y})] = 0, \quad (3.4)$$

здесь генератор ненарушенной симметрии

$$\hat{T}(\xi, \mathbf{Y}) \equiv a_i \hat{L}_i(\mathbf{Y}) + c \hat{N} \quad (3.5)$$

представляет собой линейную комбинацию интегралов движения с действительными параметрами $\mathbf{Y}$ и $\xi \equiv (a_i, c)$ и отражает наличие в вырожденной среде остаточной симметрии, которая меньше чем в более симметричном нормальном состоянии равновесия. Соотношения (2.1), (3.4), (3.5) приводят к дифференциальным уравнениям на функцию $f_a(\mathbf{x})$, которые получаются из условия $[\hat{T}, \hat{F}] = 0$, однако более наглядным является получение уравнений классификации непосредственно для равновесного среднего параметра порядка. Для этого умножим соотношение (3.4) на оператор параметра порядка, учтем трансформационные свойства (3.1)–(3.3) и произведем усреднение. В результате свойство ненарушенной симметрии в случае

пространственно-однородных состояний равновесия приводит к линейному дифференциальному уравнению с частными производными для параметра порядка:

$$a_i \left(g_{iab} \Delta_b(\mathbf{x}) + \varepsilon_{ikl} Y_k \frac{\partial \Delta_a(\mathbf{x})}{\partial Y_l} \right) + igc \Delta_a(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.6)$$

Условие пространственной симметрии (2.1) влечет равенство $\nabla_k \Delta_a(\mathbf{x}) = 0$. Линейность коммутационных соотношений (3.1)–(3.3) для оператора параметра порядка приводит к линейности уравнений для определения его равновесной структуры. В случае $\mathbf{Y} = 0$ уравнение (3.6) существенно упрощается и становится линейным однородным алгебраическим уравнением

$$T_{ab}(\xi, 0) \Delta_b = 0, \quad T_{ab}(\xi, 0) \equiv a_i g_{iab} + igc \delta_{ab}. \quad (3.7)$$

Условие нетривиальности решения, $\Delta_a \neq 0$, влечет уравнение $\det |T_{ab}(\xi, 0)| = 0$ на допустимые значения параметров генератора ненарушенной симметрии, что и дает возможность провести классификацию состояний равновесия вырожденных конденсированных сред. При этом статистический оператор Гиббса $\hat{w} = \hat{w}(Y, \xi)$ зависит как от термодинамических параметров Y , так и от параметров ξ генератора ненарушенной симметрии.

Аналогичным образом получим уравнения классификации состояний равновесия в неоднородном случае. Для пространственно-неоднородных состояний вырожденных конденсированных сред генераторы ненарушенной (остаточной) и пространственной симметрии определяются, соответственно, равенствами

$$\begin{aligned} \hat{T}(\xi, \mathbf{Y}) &\equiv a_i \hat{L}_i(\mathbf{Y}) + c \hat{N} + d_i \hat{P}_i, \\ \hat{P}_k(\eta, \mathbf{Y}) &\equiv \hat{P}_k - p_k \hat{N} - t_{kj} \hat{L}_j(\mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

и ведут к соотношениям

$$\text{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\xi, \mathbf{Y})] \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{Sp}[\hat{w}, \hat{P}_k(\eta, \mathbf{Y})] \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.9)$$

Здесь $\xi \equiv (\mathbf{a}, c, \mathbf{d})$ и $\eta \equiv (\mathbf{p}, t_{kj})$ – действительные параметры, которые характеризуют генераторы ненарушенной и пространственной симметрий. Соотношения (3.9) приводят к зависимости параметра порядка от координаты, а также от параметров ненарушенной и пространственной симметрий. Для того чтобы установить структуру параметра порядка в состоянии равновесия и определить допустимый вид генераторов симметрии, соотношения (3.9) следует дополнить уравнениями

$$\text{Sp}[\hat{w}, [\hat{T}(\xi, \mathbf{Y}), \hat{P}_k(\eta, \mathbf{Y})]] \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{Sp}[\hat{w}, [\hat{P}_i(\eta, \mathbf{Y}), \hat{P}_k(\eta, \mathbf{Y})]] \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.10)$$

которые являются следствиями тождеств Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{T}(\xi, \mathbf{Y})$, $\hat{P}_k(\eta, \mathbf{Y})$ и $\hat{w}$, $\hat{P}_i(\eta, \mathbf{Y})$, $\hat{P}_k(\eta, \mathbf{Y})$ соответственно. Условия (3.9), (3.10) приводят к связям между параметрами генераторов симметрии и позволяют решить задачу классификации состояний равновесия неоднородных конденсированных сред. В силу этого

статистический оператор Гиббса зависит от термодинамических параметров: $\hat{w} = \hat{w}(Y, \xi, \eta)$. Учитывая алгебру (3.1)–(3.3), при $\mathbf{Y} = 0$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \nabla_k \Delta_a(\mathbf{x}) &= G_{ab}^k \Delta_b(\mathbf{x}), & T_{ab}(\xi, \eta) \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, & a_i \varepsilon_{ikl} G_{ab}^l \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, \\ a_i t_{kj} \varepsilon_{ij\lambda} \varepsilon_{\lambda uv} G_{ab}^v \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, & a_i t_{kj} \varepsilon_{ij\lambda} g_{\lambda ab} \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, \\ t_{ij} t_{k\lambda} \varepsilon_{j\lambda l} \varepsilon_{lsp} G_{ab}^p \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, & t_{kj} \varepsilon_{j\lambda sp} G_{ab}^k \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, & t_{ij} t_{k\lambda} \varepsilon_{j\lambda l} g_{lab} \Delta_b(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

устанавливающую структуру параметра порядка в неоднородном состоянии равновесия. Здесь введены обозначения

$$G_{ab}^k \equiv i p_k g \delta_{ab} + t_{kj} g_{jab}, \quad T_{ab}(\xi, \eta) \equiv (a_i + d_l t_{li}) g_{iab} + i g(c + d_l p_l) \delta_{ab}.$$

Отметим, что уравнения (3.7), (3.11) могут быть полезны также при решении задачи классификации в условиях сосуществования нескольких ненулевых равновесных значений параметров порядка.

4. ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ

Применим сформулированный подход к классификации состояний равновесия жидких кристаллов с нарушенной трансляционной и вращательной симметрией. Оператор параметра порядка для таких сред представляет собой симметричный и бесследовый тензор [9], который мы определим как

$$\hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} \left(\nabla_u \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \nabla_v \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \nabla_v \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \nabla_u \hat{\psi}(\mathbf{x}) - \frac{2}{3} \delta_{uv} \nabla_j \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \nabla_j \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right). \quad (4.1)$$

Для этого оператора квантовые скобки с интегралами движения суть

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x})] &= 0, & i[\hat{P}_k, \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x})] &= -\nabla_k \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}), \\ i[\hat{L}_i, \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x})] &= -\varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{iuj} \hat{Q}_{jv}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{ivj} \hat{Q}_{ju}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В силу симметричности и бесследовости параметра порядка его среднее значение $Q_{uv}(\mathbf{x}, \hat{\rho}) = \text{Sp } \hat{\rho} \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x})$ содержит пять независимых величин и может быть представлено в виде

$$Q_{ik}(\mathbf{x}) \equiv Q(\mathbf{x}) \left(n_i(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) - \frac{\delta_{ik}}{3} \right) + Q'(\mathbf{x}) \left(m_i(\mathbf{x}) m_k(\mathbf{x}) - \frac{\delta_{ik}}{3} \right), \quad (4.3)$$

где Q, Q' – модули параметра порядка, $\hat{\rho}$ – произвольный статистический оператор. Взаимно ортогональные единичные векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ задают направления анизотропии жидких кристаллов. Так как $m_u m_v + n_u n_v + l_u l_v = \delta_{uv}$, где $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{l}$, возможны одноосная или двухосная анизотропия жидкокристаллических состояний равновесия.

В нормальном состоянии конденсированной среды условие пространственной изотропии $[\hat{w}(Y'), \hat{L}_k] = 0$, алгебра квантовых скобок (4.2) и явная формула для среднего значения (4.3) приводят к равенству

$$i \text{Sp} [\hat{w}(Y'), \hat{L}_i] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = Q(Y') (\varepsilon_{iuj} n_j n_v + \varepsilon_{ivj} n_j n_u) + Q'(Y') (\varepsilon_{iuj} m_j m_v + \varepsilon_{ivj} m_j m_u) = 0,$$

из которого ввиду отсутствия выделенных направлений в этом состоянии равновесия следует, что модули параметра порядка $Q(Y') = Q'(Y') = 0$. Поэтому в системе покоя среднее значение параметра порядка жидких кристаллов обращается в нуль: $\text{Sp } \hat{w}(Y') \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0$. В лабораторной системе отсчета, где термодинамический параметр $\mathbf{Y} \neq 0$, параметр порядка отличен от нуля. Из определения (4.1) и соотношений $U_{\mathbf{u}} \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) U_{\mathbf{u}}^+ = e^{im\mathbf{u}\mathbf{x}} \hat{\psi}^+(\mathbf{x})$, $U_{\mathbf{u}} \hat{\psi}(\mathbf{x}) U_{\mathbf{u}}^+ = e^{im\mathbf{u}\mathbf{x}} \hat{\psi}(\mathbf{x})$ получим трансформационное свойство параметра порядка при преобразовании Галилея:

$$U_{\mathbf{u}} \hat{Q}_{ik}(\mathbf{x}) U_{\mathbf{u}}^+ = \hat{Q}_{ik}(\mathbf{x}) + m \left(u_i \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + u_k \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) - 2u_j \hat{\pi}_j(\mathbf{x}) \frac{\delta_{ik}}{3} \right) + m^2 \hat{n}(\mathbf{x}) \left(u_i u_k - \frac{u^2 \delta_{ik}}{3} \right) \quad (4.4)$$

(здесь $\hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ – оператор плотности импульса.) Замечая далее, что в собственной системе отсчета справедливы соотношения $\text{Sp } w(Y') \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) = 0$, $\text{Sp } w(Y') \hat{Q}_{ik}(\mathbf{x}) = 0$, получим выражение для равновесного значения параметра порядка в лабораторной системе отсчета:

$$\text{Sp } \hat{w}(Y) \hat{Q}_{ik}(\mathbf{x}) = m^2 \text{Sp } \hat{w} \hat{n}(0) \cdot \left(u_i u_k - \frac{\delta_{ik} u^2}{3} \right) \neq 0. \quad (4.5)$$

Одноосные нематики. Рассмотрим трансляционно-инвариантные состояния равновесия жидkokристаллических сред, удовлетворяющих (2.1), и установим возможные равновесные структуры параметра порядка. Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний осуществим в собственной системе отсчета исходя из соотношения

$$[\hat{w}(Y'), \hat{T}] = 0. \quad (4.6)$$

Генератор ненарушенной симметрии $\hat{T}$ представляет собой линейную комбинацию интегралов движения. Учитывая, что фазовая инвариантность в жидких кристаллах не нарушена, $[\hat{w}(Y'), \hat{N}] = 0$, имеем

$$\hat{T} \equiv a_i \hat{L}_i, \quad (4.7)$$

где a_i – действительный вектор, характеризующий повороты в пространстве. Не ограничивая общности рассмотрения, полагаем, что вектор $\mathbf{a}$ единичный: $a^2 = 1$. Унитарные преобразования $U = e^{i\hat{T}(\mathbf{a})}$ образуют непрерывные подгруппы ненарушенной симметрии, $U(\mathbf{a})U(\mathbf{a}') = U(\mathbf{a}'')$, $\mathbf{a}' = \mathbf{a}''(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, равновесного состояния. Согласно (4.6), (4.7) имеем $\text{Sp} [\hat{w}(Y'), a_i \hat{L}_i] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому, учитывая алгебру (4.2), приходим к уравнению

$$F_{jk}^{uv} Q_{jk} = 0, \quad F_{jk}^{uv} \equiv a_i (\varepsilon_{iuj} \delta_{vk} + \varepsilon_{iuv} \delta_{uk}). \quad (4.8)$$

Перейдем в этой формуле от двойного суммирования к одинарному, заменяя две пары индексов u, v и j, k , каждый из которых принимает значения 1, 2, 3, на индексы $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 9$ так, что $(1, 1) \mapsto 1$, $(1, 2) \mapsto 2$, $\dots$, $(3, 3) \mapsto 9$, получим систему линейных алгебраических уравнений $F_{\alpha}^{\beta} Q_{\alpha} = 0$. Условием существования

нетривиального решения $Q_\alpha(\mathbf{x}) \neq 0$ этой системы является $\det |F_\alpha^\beta| = 0$. Из явного вида F_α^β , заданного в (4.8), следует, что это соотношение выполняется при любых направлениях вектора $\mathbf{a}$. В этом легко убедиться, если выписать детерминант в системе координат, где этот вектор имеет компоненты $(0, 0, 1)$. Решение уравнения (4.8) $Q_{ik}(\mathbf{a}) = Q(a_i a_k - \delta_{ik}/3)$ и вид генератора ненарушенной симметрии (4.7) отвечают случаю одноосного нематика. Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что функция f_{uv} , входящая в выражение для источника $\hat{F}$, имеет вид $f_{uv} = a_u a_v - \delta_{uv}/3$. Следовательно, рассматриваемое жидкокристаллическое состояние описывается статистическим оператором $\hat{w} = \hat{w}(Y, \mathbf{a})$, который зависит от термодинамических сил и вектора пространственной анизотропии (директора), причем зависимость равновесных средних от последнего аргумента сохраняется и после термодинамического предельного перехода.

Холестерики. Исследуем случай, когда пространственная симметрия состояния равновесия имеет более сложный характер и определяется равенством

$$\hat{P}_k(t) \equiv \hat{P}_k - t_{kj} \hat{L}_j, \quad (4.9)$$

где $\hat{P}_k(t)$ – генератор пространственной симметрии, t_{ik} – числовая матрица с комплексными элементами, характеризующая пространственную симметрию. Генератор ненарушенной симметрии для таких неоднородных состояний представляет собой линейную комбинацию операторов импульса и орбитального момента:

$$\hat{T}(\mathbf{a}, \mathbf{d}) \equiv a_i \hat{L}_i + d_i \hat{P}_i, \quad (4.10)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{d}$ – действительные векторные параметры, причем $a^2 = 1$. Условие пространственной симметрии состояния равновесия

$$[\hat{w}(Y'), \hat{P}_k] = 0 \quad (4.11)$$

таких жидких кристаллов следует дополнить условием ненарушенной симметрии состояния равновесия (4.6), где теперь генератор $\hat{T}$ определяется равенством (4.10). В соответствии с этими условиями симметрии запишем равенства

$$i \text{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{a}, \mathbf{d})] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0, \quad i \text{Sp}[\hat{w}, \hat{P}_i(t)] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.12)$$

Условие (4.11), вид генератора $\hat{P}_k$ (4.9) и алгебра (4.2) приводят к системе уравнений

$$\nabla_k Q_{uv}(\mathbf{x}) = t_{kj} Q_{uv}^j(\mathbf{x}), \quad t_{kj} \varepsilon_{jsq} t_{qp} Q_{uv}^p(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.13)$$

где введено обозначение $Q_{uv}^j(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{ju\lambda} Q_{\lambda v}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{jv\lambda} Q_{\lambda u}(\mathbf{x})$. Второе соотношение в (4.13) вытекает из требования отсутствия линейного по координате слагаемого в соотношении пространственной симметрии (4.12) и первого соотношения в (4.12). Условие ненарушенной симметрии в (4.12) с учетом вида генератора (4.10) приводит к уравнениям

$$a_i \varepsilon_{ikl} t_{lj} Q_{uv}^j(\mathbf{x}) = 0, \quad \underline{a}_i Q_{uv}^i(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.14)$$

где $\underline{a}_i \equiv a_i + d_j t_{ji}$. Дополнительные связи параметров генераторов симметрии, введенных соотношениями (4.9), (4.10), установим на основании тождества Якоби. Для операторов $\hat{w}$, $\hat{T}$, $\hat{P}$, принимая во внимание свойства симметрии (4.6), (4.11), приходим к равенству $\text{Sp}[\hat{w}, [\hat{T}, \hat{P}_k]]\hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0$. Откуда, учитывая (4.2), (4.9), (4.10), получаем соотношения

$$a_i t_{kj} \varepsilon_{ij\lambda} \varepsilon_{\lambda sl} t_{lp} Q_{uv}^p(\mathbf{x}) = 0, \quad a_i t_{kj} \varepsilon_{ijp} Q_{uv}^p(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.15)$$

Используя тождество Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$ и учитывая свойство пространственной симметрии (4.11), приходим к равенству $\text{Sp}([\hat{w}, [\hat{P}_i, \hat{P}_k]]\hat{Q}_{uv}(\mathbf{x})) = 0$. Отсюда следуют уравнения

$$t_{i\lambda} t_{kj} \varepsilon_{\lambda jq} \varepsilon_{qsl} t_{ls} Q_{uv}^s(\mathbf{x}) = 0, \quad t_{i\lambda} t_{kj} \varepsilon_{\lambda jq} Q_{uv}^q(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.16)$$

Система уравнений (4.13)–(4.16) полностью определяет допустимую структуру параметров генератора симметрии и вид параметра порядка в изучаемом неоднородном состоянии равновесия. Покажем, что решение этой системы уравнений может быть представлено в виде

$$Q_{ik}(\mathbf{x}) = Q(Y) \left\{ (m_i \cos \varphi(\mathbf{x}) + n_i \sin \varphi(\mathbf{x})) (m_k \cos \varphi(\mathbf{x}) + n_k \sin \varphi(\mathbf{x})) - \frac{\delta_{ik}}{3} \right\}. \quad (4.17)$$

Действительно, если подставить это выражение для параметра порядка в уравнения (4.13), то уравнения выполняются тождественно. Далее, первое соотношение в (4.14) приводит при $\mathbf{a} \parallel \mathbf{l}$ к равенству $t = -l/d\mathbf{l}$. Матрица t_{ik} , задающая генератор пространственной симметрии (4.9), при этом имеет вид $t_{ik} = t l_i l_k$. Аналогично можно показать, что и остальные уравнения в (4.15), (4.16) справедливы при этих же условиях на параметры генераторов симметрии. В рассматриваемом случае неоднородная структура параметра порядка описывает холестерическое состояние и характеризуется функцией $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi - \mathbf{t}\mathbf{x}$, где вектор холестерической спирали $\mathbf{t}$ направлен по оси $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$, величина $2\pi/t$ имеет физический смысл шага этой спирали. Решение подобного вида для параметра порядка ранее было получено в работе [17] из условия минимума модельного выражения энергии как функции поля директора. Наличие двух векторов в генераторе пространственной симметрии приводит к возможности существования прямой и скошенной холестерических спиралей.

Двухосные нематики. Рассмотрим теперь однородные состояния жидких кристаллов, генератор ненарушенной симметрии которых имеет вид

$$\hat{T}(\mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv a_i \hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n}). \quad (4.18)$$

Этот вид генератора, как мы увидим ниже, соответствует двухосным жидкокристаллическим состояниям. Здесь обобщенный оператор орбитального момента определяется равенствами

$$\hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv \hat{L}_i + \hat{L}_i^{\mathbf{m}} + \hat{L}_i^{\mathbf{n}}, \quad \hat{L}_i^{\mathbf{m}} \equiv -i\varepsilon_{ikl} m_k \frac{\partial}{\partial m_l}, \quad \hat{L}_i^{\mathbf{n}} \equiv -i\varepsilon_{ikl} n_k \frac{\partial}{\partial m_l} \quad (4.19)$$

(векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ единичны и ортогональны, $\mathbf{nm} = 0$) и имеет смысл генератора двухосной пространственной симметрии. В силу определения (4.19) справедливо соотношение $i[\hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n}), \hat{L}_k(\mathbf{m}, \mathbf{n})] = -\varepsilon_{ikl}\hat{L}_l(\mathbf{m}, \mathbf{n})$. Используя условие симметрии (4.6) при $Y_i = 0$ с генератором, заданным соотношениями (4.18), (4.19), приходим к уравнению

$$a_i \left(\varepsilon_{iuj} Q_{jv} + \varepsilon_{ivj} Q_{ju} + \varepsilon_{ikl} m_k \frac{\partial Q_{uv}}{\partial m_l} + \varepsilon_{ikl} n_k \frac{\partial Q_{uv}}{\partial n_l} \right) = 0. \quad (4.20)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $Q_{uv} \equiv Q_1(e_u^{(1)}e_v^{(1)} - \delta_{uv}/3) + Q_2(e_u^{(2)}e_v^{(2)} - \delta_{uv}/3)$, где единичные векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ определены равенствами $\mathbf{e}^{(1)} \equiv \mathbf{m} \cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi$, $\mathbf{e}^{(2)} \equiv -\mathbf{m} \sin \varphi + \mathbf{n} \cos \varphi$. Учитывая далее формулы

$$\frac{\partial n_i}{\partial n_k} = \frac{\partial m_i}{\partial m_k} \equiv \delta_{ik} - n_i n_k - m_i m_k = l_i l_k,$$

преобразуем уравнение (4.20) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & a_i \varepsilon_{iuj} (Q_1 e_j^{(1)} e_v^{(1)} + Q_2 e_j^{(1)} e_v^{(1)}) + a_i \varepsilon_{ivj} (Q_1 e_j^{(1)} e_u^{(1)} - + Q_2 e_j^{(1)} e_u^{(1)}) = \\ & = Q_1 (\mathbf{an} \cos \varphi - \mathbf{am} \sin \varphi) (l_u e_v^{(1)} + l_v e_u^{(1)}) - \\ & - Q_2 (\mathbf{an} \sin \varphi + \mathbf{am} \cos \varphi) (l_u e_v^{(2)} + l_v e_u^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Для определения допустимых значений вектора $\mathbf{a}$ ищем его в виде разложения по ортонормированному реперу: $a_i = \alpha n_i + \beta m_i + \gamma l_i$, где числа α, β, γ связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. В результате получим условие $\gamma(Q_1 - Q_2)(e_u^{(1)}e_v^{(2)} + e_v^{(1)}e_u^{(2)}) = 0$. Отсюда следует, что при $Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0, Q_1 \neq Q_2$ параметр $\gamma = 0$. Это решение описывает пространственно-однородный двухосный нематик:

$$Q_{uv} = Q_1 \left(e_u^{(1)} e_v^{(1)} - \frac{\delta_{uv}}{3} \right) + Q_2 \left(e_u^{(2)} e_v^{(2)} - \frac{\delta_{uv}}{3} \right). \quad (4.22)$$

Другое решение получается, если $Q_1 = Q_2$. В этом случае вектор $\mathbf{a}$ произволен. В силу соотношения $m_u m_v + n_u n_v + l_u l_v = \delta_{uv}$ параметр порядка приобретает вид $Q_{uv} = -Q(l_u l_v - \delta_{uv}/3)$ и соответствует одноосному нематику. Полученные результаты классификации однородных состояний равновесия жидких кристаллов приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Классификация однородных состояний равновесия жидких кристаллов.

Состояние равновесия	Генератор ненарушенной симметрии	Параметр порядка
Одноосный нематик	$a_i \hat{L}_j$	$Q_{ik}(\mathbf{a}) = Q(a_i a_k - \delta_{ik}/3)$
Двухосный нематик	$(\alpha n_i + \beta m_i) \hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n}),$ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$	$Q_1(e_i^{(1)}e_k^{(1)} - \delta_{ik}/3) + Q_2(e_i^{(2)}e_k^{(2)} - \delta_{ik}/3),$ $e_i^{(1)} = m_i \cos \varphi + n_i \sin \varphi, e_i^{(2)} = -m_i \sin \varphi + n_i \cos \varphi$

Двойная спираль. Рассматриваемый случай жидкокристаллического упорядочения может быть охарактеризован генератором ненарушенной симметрии вида

$$\hat{T}(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv a_i \hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + d_i \hat{P}_i(t, \mathbf{m}, \mathbf{n}). \quad (4.23)$$

Здесь генератор обобщенного орбитального момента задан равенством (4.19), а генератор пространственной симметрии определяется соотношением

$$\hat{P}_k(t, \mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv \hat{P}_k - t_{kj} \hat{L}_j(\mathbf{m}, \mathbf{n}). \quad (4.24)$$

Допустимые ограничения на параметры генераторов ненарушенной и пространственной симметрий находятся из соотношений

$$i \text{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n})] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0, \quad i \text{Sp}[\hat{w}, \hat{P}_i(t, \mathbf{m}, \mathbf{n})] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.25)$$

Дополнительные соотношения возникают при учете тождества Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$ и $\hat{w}$, $\hat{T}$, $\hat{P}_k$:

$$\text{Sp}[\hat{w}, [\hat{T}, \hat{P}_k]] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{Sp}[\hat{w}, [\hat{P}_i, \hat{P}_k]] \hat{Q}_{uv}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.26)$$

Из соотношений (4.25), учитывая алгебру (4.2), получим уравнения,

$$\begin{aligned} \nabla_k Q_{uv}(\mathbf{x}) &= t_{kj} Q_{uv}^j(\mathbf{x}), & t_{kj} \varepsilon_{jsq} t_{qp} Q_{uv}^p(\mathbf{x}) &= 0, \\ a_i \varepsilon_{ikl} t_{lj} Q_{uv}^j(\mathbf{x}) &= 0, & \underline{a}_i Q_{uv}^j(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где величина $Q_{uv}^j(\mathbf{x})$ задается равенством

$$Q_{uv}^j(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{jul} Q_{lu}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{jvl} Q_{lu}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{jsl} n_s \frac{\partial Q_{uv}(\mathbf{x})}{\partial n_l} + \varepsilon_{jsl} m_s \frac{\partial Q_{uv}(\mathbf{x})}{\partial m_l}. \quad (4.28)$$

Из тождеств Якоби получаем уравнения

$$\begin{aligned} a_i t_{kj} \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lsj} t_{lp} Q_{uv}^p(\mathbf{x}) &= 0, & a_i t_{kj} \varepsilon_{ijp} Q_{uv}^p(\mathbf{x}) &= 0, \\ t_{i\lambda} t_{kj} \varepsilon_{\lambda jq} \varepsilon_{qsl} t_{l\sigma} Q_{uv}^\sigma(\mathbf{x}) &= 0, & t_{i\lambda} t_{kj} \varepsilon_{\lambda jq} Q_{uv}^q(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Поступая далее так же, как и при рассмотрении одноосного холестерика, нетрудно показать, что при $\mathbf{a} \parallel \mathbf{l}$ и $t = -l/d\mathbf{l}$ уравнения (4.27)–(4.29) выполняются, а параметр порядка в состоянии равновесия приобретает вид

$$Q_{ik}(\mathbf{x}) = Q_1 \left(e_i^{(1)}(\mathbf{x}) e_k^{(1)}(\mathbf{x}) - \frac{\delta_{ik}}{3} \right) + Q_2 \left(e_i^{(2)}(\mathbf{x}) e_k^{(2)}(\mathbf{x}) - \frac{\delta_{ik}}{3} \right),$$

где $e_i^{(1)}(\mathbf{x}) = m_i \cos \varphi(\mathbf{x}) + n_i \sin \varphi(\mathbf{x})$, $e_i^{(2)}(\mathbf{x}) = -m_i \sin \varphi(\mathbf{x}) + n_i \cos \varphi(\mathbf{x})$ – единичные и взаимно ортогональные векторы, а зависимость фазы от координаты имеет вид $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi - \mathbf{l} \mathbf{x} / d\mathbf{l}$. Заметим, что решение с пространственной структурой двойной спирали напоминает структуру молекулы ДНК [18]. Комплементарные пары Уотсона–Крика аденин-тимин и гуанин-цитозин лежат в плоскости векторов $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{x})$ и поворачиваются вокруг оси анизотропии $\mathbf{l}$ при смещении координаты. Случай коллинеарных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{d}$ отвечает В-форме ДНК. При этом

Таблица 2. Классификация неоднородных состояний равновесия жидких кристаллов.

Состояние равновесия	Генератор ненарушенной симметрии	Генератор пространственной симметрии	Параметр порядка
холестерик	$l_i \hat{L}_i + d_i \hat{P}_i$	$\hat{P}_k + \frac{l_k}{d\mathbf{l}} l_i \hat{L}_i$	$Q(e_i^{(1)}(\mathbf{x})e_k^{(1)}(\mathbf{x}) - \delta_{ik}/3),$ $e_i^{(1)}(\mathbf{x}) = m_i \cos \varphi(\mathbf{x}) + n_i \sin \varphi(\mathbf{x}),$ $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi - \mathbf{l}\mathbf{x}/d\mathbf{l}$
двойная спираль	$l_i \hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + d_i \hat{P}_i,$	$\hat{P}_k + \frac{l_k}{d\mathbf{l}} l_i \hat{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{n})$	$Q_1(e_i^{(1)}(\mathbf{x})e_k^{(1)}(\mathbf{x}) - \delta_{ik}/3) +$ $+ Q_2(e_i^{(2)}(\mathbf{x})e_k^{(2)}(\mathbf{x}) - \delta_{ik}/3),$ $e_i^{(1)}(\mathbf{x}) = m_i \cos \varphi(\mathbf{x}) + n_i \sin \varphi(\mathbf{x}),$ $e_i^{(2)}(\mathbf{x}) = -m_i \sin \varphi(\mathbf{x}) + n_i \cos \varphi(\mathbf{x})$

комплементарные пары располагаются в плоскости, ортогональной оси спирали. Если векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{d}$ неколлинеарны, то такая пространственная структура представляет собой А-форму, и имеет место упорядочение пространственной структуры типа скошенной спирали. Плоскости комплементарных пар в этом случае располагаются под углом к оси спирали. Различие в знаке скалярного произведения векторов ($\mathbf{l}\mathbf{d} > 0$ или $\mathbf{l}\mathbf{d} < 0$) означает возможность физической реализации правосторонней и левосторонней спиралей.

А-смектик. Для этого состояния равновесия жидких кристаллов условия пространственной симметрии имеют вид

$$[\hat{w}, l_i \hat{L}_i] = 0, \quad \varepsilon_{ikl} l_k [\hat{w}, \hat{P}_l] = 0, \quad e^{i\hat{P}_k l_k b} \hat{w} e^{-i\hat{P}_k l_k b} = \hat{w}. \quad (4.30)$$

Они показывают, что среда обладает одноосной пространственной анизотропией. Вдоль оси анизотропии $\mathbf{l}$ имеет место периодическая кристаллическая структура (одномерный кристалл), а в плоскости, ортогональной этой оси, реализуется двумерное однородное и изотропное состояние конденсированной среды (жидкая фаза). Первое соотношение в (4.30) и операторная алгебра (4.2) приводят к равновесной структуре параметра порядка:

$$Q_{uv}(\mathbf{x}, Y, \mathbf{l}, b) = Q(\mathbf{x}, Y, \mathbf{l}, b) \left(l_u l_v - \frac{1}{3} \delta_{uv} \right). \quad (4.31)$$

В рассматриваемом случае модуль параметра порядка зависит от пространственной координаты. Эту зависимость мы будем искать в виде

$$Q(\mathbf{x}, Y, \mathbf{l}, b) = Q(\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{l}, b, Y)), \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{l}, b) = \varphi(\mathbf{x} + k\mathbf{l}b). \quad (4.32)$$

Второе условие в (4.30) приводит к равенству $[\mathbf{l} \times \nabla \varphi] = 0$, откуда находим $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(0) + p\mathbf{l}\mathbf{x}$. Так как из последнего соотношения в (4.30) следует периодичность

фазовой функции, $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + b\mathbf{l})$, из ее разложения в ряд Фурье

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_k \varphi_k e^{ikp\mathbf{l}\mathbf{x}} = \sum_k \varphi_k e^{ikp\mathbf{l}(\mathbf{x}+b\mathbf{l})}$$

(k – натуральное число) находим значения параметра $p = 2\pi/b$. Таким образом, пространственная зависимость функции $\varphi(\mathbf{x})$ имеет вид $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_k \varphi_k e^{2\pi i k \mathbf{l} \mathbf{x} / b}$.

С-смектик. Условия пространственной симметрии этого типа жидких кристаллов имеют вид

$$[\hat{w}, m_i \hat{L}_i] = 0, \quad \varepsilon_{ikl} l_k [\hat{w}, \hat{P}_l] = 0, \quad e^{i\hat{P}_k l_k b} \hat{w} e^{-i\hat{P}_k l_k b} = \hat{w}, \quad (4.33)$$

где векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ удовлетворяют соотношениям $l^2 = m^2 = 1$, $\mathbf{l}\mathbf{m} = \cos \theta$. В каждой плоскости длинные оси молекул (оптическая ось $\mathbf{m}$) наклонены по отношению к кристаллической оси $\mathbf{l}$ на угол θ . Условия симметрии (4.33) приводят к равновесной структуре параметра порядка:

$$Q_{uv}(\mathbf{x}, Y, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + Q_{uv}(\varphi(\mathbf{x}), Y) \left(m_u m_v - \frac{1}{3} \delta_{uv} \right), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \sum_k \varphi_k e^{2\pi i k \mathbf{l} \mathbf{x} / b}.$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены дискотические жидкие кристаллы.

5. ВЫВОДЫ

Предложенный статистический подход к классификации состояний равновесия конденсированных сред с нарушенной симметрией не содержит каких-либо модельных предположений о виде свободной энергии и не использует требования близости температуры к точке фазового перехода. Метод классификации вырожденных состояний конденсированных сред применен при описании квадрупольных магнетиков с векторным и квадрупольным параметрами порядка [19], [20]. Получено аналитическое решение задачи классификации состояний равновесия для сверхтекучих систем: сверхтекучего ^3He [5], сверхтекучей среды с d-спариванием [21] и раствора ферми-жидкостей с векторным параметром порядка [22].

Благодарности. Автор выражает благодарность РФФИ за финансовую поддержку (грант № 09-01-00086_а).

Список литературы

- [1] N. Bogolubov, *Physica*, **26**, Suppl. 1 (1960), s1–s16.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.
- [3] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, М., 1977.
- [4] Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, *УФН*, **159:4** (1989), 585–620.
- [5] М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ЭЧАЯ*, **33:6** (2002), 1357–1445.

- [6] М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, М., 2006.
- [7] Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ*, **7** (1937), 18–33; “К теории фазовых переходов. I”, *Собрание трудов*, Т. 1, ред. Б. М. Лифшиц, Наука, М, 1969, 234–252.
- [8] G. Barton, M. A. Moore, *J. Phys. C*, **7**:17 (1974), 2989–3000.
- [9] P. G. de Gennes, J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [10] М. Клеман, О. Д. Лаврентович, *Основы физики частично упорядоченных сред*, Физматлит, М., 2007.
- [11] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick, T. Vojta, *Rev. Modern Phys.*, **77**:2 (2005), 579–632.
- [12] V. P. Mineev, *Sov. Sci. Rev. A*, **2** (1980), 173–246; *Topologically Stable Defects and Solitons in Ordered Media*, Classic Rev. Phys., **1**, Harwood Academic, Amsterdam, 1998.
- [13] F. W. Nijhoff, H. W. Capel, A. Breems, *Phys. A*, **130**:3 (1985), 375–411.
- [14] A. M. J. Schakel, F. A. Bais, *J. Phys.*, **1**:9 (1989), 1743–1752.
- [15] H. W. Capel, “Group theory and phases of superfluid ^3He ”, *Selected Topics in Statistical Mechanics*, eds. A. A. Logunov, N. N. Bogolubov, Jr., V. G. Kadyshevsky A. S. Shumovsky, World Sci., Teaneck, NJ, 1990, 73–83.
- [16] D. Vollhardt, P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor & Francis, New York, 1990.
- [17] Е. Кац, В. В. Лебедев, *Динамика жидких кристаллов*, УРСС, М., 1988.
- [18] А. В. Финкельштейн, О. Б. Птицин, *Физика белка*, Курс лекций, Книжный Дом “Университет”, М., 2002.
- [19] Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, *УФЖ*, **50**:8A (2005), A104–A112.
- [20] Д. А. Демьяненко, М. Ю. Ковалевский, *ФНТ*, **33**:11 (2007), 1271–1281.
- [21] А. П. Ивашин, М. Ю. Ковалевский, Н. Н. Чеканова, *ФНТ*, **30**:9 (2004), 920–927.
- [22] M. Y. Kovalevskii, A. A. Rozhkov, L. V. Logvinova, *Phys. A*, **336**:3–4 (2004), 271–293.

Поступила в редакцию 30.12.2008